

BIAA

Bulletin d'Informatique Approfondie & Applications
Computation - Information
Volumes 2017

106 - 107 - 108



LE MOÏGNE

B.I.A.A.

BULLETIN D'INFORMATIQUE APPROFONDIE ET APPLICATIONS
Revue fondée par Edmond Bianco
Publication trimestrielle de l'Université d'Aix-Marseille
ISSN 0291-5413

Le bulletin d'informatique approfondie et applications est une revue pluridisciplinaire destinée à éclairer les connaissances fondamentales informatiques. Les fondements sont un domaine vaste allant de la structure intérieure de l'ordinateur, où se matérialise la machine universelle, à l'algorithme qui devient programme, pour aboutir à la notion de système. Nous contribuons ainsi à ce que les autres disciplines plus anciennes (sciences humaines et de la société, sciences de la matière et de l'énergie, sciences mathématiques, sciences de la nature, sciences de la terre, sciences de l'univers, sciences de la vie, etc.) n'aient pas tendance à considérer l'informatique comme un simple outil définitivement figé. Il importe de continuer à maîtriser les développements fondamentaux de l'informatique pour que nos disciplines puissent en tirer un meilleur parti.

Notre publication est ouverte à l'ensemble de la communauté scientifique. Le périodique est diffusé vers les bibliothèques universitaires de France et vers quelques bibliothèques des cinq continents.

DIRECTEUR DE LA PUBLICATION

Jean - Michel Knippel

RESPONSABLE DE L'ÉDITION

Eric Olivier

SERVEUR DE PUBLICATION

Christian Blanvillain

SECRÉTARIAT

Kalassoumi Adjlani
Université d'Aix-Marseille
Site St Charles, Case 33
3 place Victor Hugo
F -13331 Marseille Cedex 3
Téléphone : +33 (0) 413 550 252

DÉPOSITAIRE

Université d'Aix-Marseille
Bibliothèque Universitaire
Site St Charles
3 place Victor Hugo
F -13331 Marseille Cedex 3
Téléphone : +33 (0) 413 550 579

IMPRIMEUR

Université d'Aix-Marseille
Service Reprographie
Site St Charles
3 place Victor Hugo
F -13331 Marseille Cedex 3
Téléphone : +33 (0) 413 551 569

COMITÉ SCIENTIFIQUE

Pr. Patrick Abellard (Université du Sud, Toulon)
Françoise Adreit (Université de Toulouse I)
France Chappaz (Université de Provence)
Georges Chappaz (Université d'Aix-Marseille)
M'hamed Charifi (Consultant autonome)
Jean - Paul Coste (Université de Provence)
Pr. Roger Cusin (Université de la Méditerranée)
Christian Faivre (Université d'Aix-Marseille)
Jean - Claude Fumanal (Université Paul Cézanne)
Alain de Gantès (Université d'Aix-Marseille)
Jean Gonella (Université d'Aix-Marseille)
Pr. Bernard Goossens (Université de Perpignan)
Sami Hilala (Université d'Aix-Marseille)
Patrick Isoardi (Université d'Avignon et Pays de Vaucluse)
Robert Jacquier (Université Paul Cézanne)
Jean - Michel Knippel (Université d'Aix-Marseille)
Jean - Philippe Lehmann (Université d'Avignon et Pays de Vaucluse)
Pr. Agathe Merceron (Technische Fachhochschule, Berlin)
Nadia Mesli (Université d'Aix-Marseille)
Eric Olivier (Université d'Aix-Marseille)
Patrick Sanchez (C.N.R.S., Marseille)
Rolland Stutzmann (I.U.T. de Strasbourg Sud)
Alain Thomas (Université d'Aix-Marseille)
Pr. André Tricot (E.S.P.E., Toulouse)

CORRESPONDANT(E)S

Pr. Mohamed Tayeb Laskri (Université Badji Mokhtar, Afrique)
Sylvie Monjal (Cégep de Sainte Foy, anciennement Académie de Québec, Amériques)
Moussa HadjAli (Université Virtuelle de Syrie, Asie)
José Rouillard (Université des Sciences et Technologies de Lille, Europe)
Kalina Yacef (Université de Sydney, Océanie)

Table Des Matières

BULLETIN n° 106 (2017)	7
ÉDITORIAL : Aix-Marseille : AUM ou AMU ; la mue de l'AMU (par Robert CHAUDENSON)	9
Le tenseur de courbure I : l'identité cyclique de Riemann (par Eric OLIVIER)	11
1. Introduction	11
2. Géodésiques inertielles – Coordonnées normales – Exponentielle de Riemann	19
3. Du lemme de Gauss spectral à l'identité cyclique de Riemann	23
4. Lemme de Milnor	29
5. Lemme de Moore	33
6. Dimension de certains sous-espaces de $\mathcal{Q}^\pm(\mathbb{R}^d)$	39
7. Les composantes des tenseurs R et H	41
8. Courbure et rayon de courbure d'une courbe plane	43
9. Coordonnées et courbure gaussiennes	44
10. La seconde forme fondamentale	47
11. Theorema Egregium	51
12. Appendice A : Lemme de Gauss de la géométrie riemannienne	55
13. Appendice B : L'identité de Lagrange	59
14. Appendice C: Formule de la courbure gaussienne (d'après Wikipédia)	60
Références	61
VOUZZAVEDIBISAR : Informagique : catastrophe (par Jean-Pierre PETIT)	63
BULLETIN n° 107 (2017)	65
ÉDITORIAL : Yvon Berland et le classement QS (par Pierre DUBOIS)	67
Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience (par André-Marie AMPERE)	69
VOUZZAVEDIBISAR : Informagique : CHIP ! (par Jean-Pierre PETIT)	77
BULLETIN n° 108 (2017)	79
ÉDITORIAL : CUPGE : pourquoi j'arrête les colles (par Pierre ARNOUX)	81
Le codage du flot géodésique sur la surface modulaire (par Pierre ARNOUX)	83
1. Introduction	83
2. La transformation des fractions continues	85
3. Le flot géodésique sur la surface modulaire	87
4. Une autre présentation du flot géodésique	88
5. Un système de coordonnées sur l'espace des réseaux	89
6. Le codage du flot géodésique	91
7. La constante de Lévy et le volume du fibré tangent à la surface modulaire	93
8. Un codage du flot géodésique sur un alphabet fini	95
Références	97

BIAA

Bulletin d'Informatique Approfondie & Applications
Computation - Information
Volumes 2017

106 - 107 - 108



LE MOÏGNE

Couverture : dessin de Michel Avezard (Zevard) interprété par la MMIAGe (1985-1987)

ÉDITORIAL : Aix-Marseille : AUM ou AMU ; la mue de l'AMU

Robert CHAUDENSON ¹

Résumé. – Robert Chaudenson est un « homme qui élabore mentalement ses articles de blog, le matin, en promenant son chien, ne peut pas être totalement mauvais. » Bernard Gensane écrit cette phrase dans son blog de [mediapart.fr](https://blogs.mediapart.fr/bernard-gensane) (<https://blogs.mediapart.fr/bernard-gensane>). Robert Chaudenson nous livre, dans les lignes qui suivent, quelques pensées sur la toute jeune université d'Aix-Marseille. N.D.L.R.

Il ne vous a pas échappé qu'il y a quelques années notre Président de République, Nicolas Sarkozy, et sa ministre de l'enseignement supérieur, Madame Valérie Pécresse, ont été cruellement mortifiés par la place très modeste des universités françaises dans le classement des universités du monde, qu'on nomme généralement le classement de Shanghai. Nos universités étaient en effet dans les profondeurs du classement, pour la plupart entre la centième et la cent cinquantième place : après mûres réflexions et consultations de quelques prétendus experts (spécialisés surtout, à vrai dire, dans la gestion de leur propre carrière comme T. Coulhon), il a été décidé que cette injustice flagrante tenait essentiellement à ce que nos universités n'avaient pas suffisamment d'étudiants pour atteindre une prétendue « masse critique » (mal définie d'ailleurs car les dix universités du monde les mieux placées dans ce classement n'ont pas plus d'étudiants que la plupart des nôtres) un choix si stupide a donc conduit à décider des regroupements d'universités par un mouvement exactement inverse de celui auquel avait procédé Edgar Faure avec sa loi de 1968 qui avait, au contraire, créé en général deux ou trois universités dans chacune des académies qui auparavant n'en comportaient qu'une seule.

Dans cette perspective si évidemment absurde (la crise universitaire française a des causes bien différentes), on a aussitôt procédé au regroupement des universités ; pour ne prendre qu'un seul exemple, le 1er janvier 2012, on a procédé à la fusion des trois universités d'Aix-Marseille : Université de Provence ; Université de la Méditerranée ; Université Paul Cézanne ; à l'origine, Edgar Faure n'en avait créé que deux, mais cela n'avait pas été supportable pour les juristes qui ne pouvaient admettre de ne pas avoir la leur ! Cette fusion a conduit à constituer une université réunissant 74 000 étudiants et en a fait (défense de rire car c'est elle-même qui le dit !) « la plus grosse université francophone du monde ».

Si nos autorités avaient eu la moindre connaissance des réalités universitaires, il n'aurait évidemment pas fait un raisonnement aussi stupide puisque, par exemple, l'université de Buenos Aires, qui a un classement encore plus mauvais que celui de la plupart des universités françaises (elle se situe entre les 150 et 200^{ème} place des universités du monde), compte pourtant plus du double d'étudiants puisqu'elle n'en réunit pas moins de 170 000 au moins et compte parmi ses anciens étudiants Che Guevara !

Ce point est toutefois relativement mineur par rapport au changement de dénomination de cet établissement, l'ex-université d'Aix-Marseille devenant AMU, « Aix-Marseille Université » favorisant ainsi une lecture attentatoire à la langue française « Aix-Marseille University » avec cette finale en « -u » du sigle caractéristique de nombre d'universités américaines, acquise au prix d'une manifeste contravention avec les règles les plus élémentaires de la syntaxe du français !

Un malheur ne venant jamais seul, cette pauvre AMU a fait en outre l'objet de l'un de ces fameux partenariats public-privé (un PPP) qui l'a mise, pour 30 ans me semble-t-il, entre les mains du groupe Eiffage qui s'est illustré en particulier dans les affaires du

1. Ecrivain de billets sur son blog de Mediapart. <https://blogs.mediapart.fr/robert-chaudenson/blog>.

Carlton de Lille et par ses cadeaux en natures (l'adjonction de cet -s est volontaire!) à notre ex futur Président de la République Dominique Strauss-Kahn.

À partir de 2010 (« Convention d'ingénierie et de pilotage opérationnel » suivi d'une « convention partenariale de sites »), on s'est acheminé alors, comme on vous le narre dans le détail sur internet, images oniriques à l'appui² vers la signature d'un « contrat de partenariat entre l'AMU et le groupe Eiffage » (mai 2014) et les travaux ont commencé en particulier par la construction d'un « parking silo » (entendre quelques étages de mécano destinés au parking des voitures du personnel de l'université). Tous ces travaux sont naturellement accomplis par des ouvriers de l'est-européen, parqués, logés et nourris sur le chantier en containers. A voir ce « tas de ferraille » (qu'on hésite à nommer « bâtiment » comme le descriptif le fait), on se demande ce que sera « en vrai » le futur « quartier des facultés » dont la première merveille, le « coeur de campus » sera visible, nous dit-on, à partir de septembre 2018. Que sera sera! comme chantait Doris Day! Tout cela va assurément fortement concurrencer le « Quartier Mazarin » aux yeux des touristes du monde!

Je vous conseille vivement d'aller voir sur Internet, car il faut bien rêver, les merveilleuses images de ce superbe et futur ensemble universitaire de rêve qui me semblent toutes fabriquées par un procédé de morphing quelconque et ne correspondent rien en rien à la réalité, ni passée, ni présente, ni à venir, donnant l'image fallacieuse des plus belles universités américaines (au lierre près!) et même, cerise sur le gâteau, peuplées d'accortes étudiantes aussi imaginaires que les constructions elles-mêmes (Pourquoi se priver?).

Ces merveilles remplaceront-elles un jour les anciennes facultés de droit et de lettres qui sont, en tout cas depuis deux ans au moins, un chantier ignoble? Le pire de tout tient à ce que, pour la prétendue réalisation de ce rêve, on a, sans le moindre remords, mis aux ordures, à l'ex fac de lettres, une quantité invraisemblable d'ouvrages imprimés, parfois neufs, ou de travaux de recherche inédits (mémoires, thèses, etc.) qui, bien entendu, n'ont pas la moindre importance aux yeux du groupe Eiffage qui est désormais le maître des lieux, mais qui semblent ne pas en avoir beaucoup plus pour les responsables universitaires, auxquels on peut espérer que le groupe Eiffage a, comme dans l'affaire DSK, accordé quelques avantages en nature qui leur ont fait aisément oublier ces destructions universitaires qui n'indignent que les collègues étrangers qui ont pu les constater ou les apprendre.

Il ne fait pas de doute que ce partenariat public-privé sera une réalisation aussi heureuse que celle du Centre hospitalier sud francilien (CHSF), donné au départ et longtemps comme exemplaire et pour lequel le CHSF et Eiffage ont récemment fini par signer un accord de résiliation de ce « Partenariat Public Privé » aux termes duquel le groupe de BTP devait assurer le fonctionnement et la maintenance des bâtiments jusqu'en 2041! Eiffage a obtenu 80 millions d'euros d'indemnités moyennant certains travaux complémentaires, mais a dû renoncer au remboursement des surcoûts (entre 175 et 200 millions en incluant les frais financiers de retard). Peut-être à l'AMU, vu le manifeste manque d'intérêt, évitera-t-on au moins les suicides?

2. dircom.univamu.fr/ses/dircom...amu.../dossier_presse_ppp_mai2014.p.

Le tenseur de courbure I : l'identité cyclique de Riemann

Eric OLIVIER^{1,2}

Résumé. – (Version di 17 novembre 2016) Gauss définit la courbure d'une surface en un point dans ses « *Disquisitiones generales circa superficies curvas* » (1828) et y démontre le « *Theorema Egregium* » : celui-ci affirme que cette courbure est une caractéristique intrinsèque de la surface (i.e. qui ne dépend pas du plongement isométrique de la surface dans l'espace). Dans son mémoire d'habilitation (1854), Riemann généralise le travail de Gauss sur la courbure des surfaces à des objets différentiels de dimension quelconque qui s'appelleront bientôt des « *variétés riemanniennes* ». Une difficulté qui apparaît à la lecture des textes de ces deux géomètres, vient de l'utilisation implicite qu'ils font d'une notion primitive de tenseur, sans toutefois la formaliser entièrement. Le calcul tensoriel – proprement dit – se développera réellement à partir des successeurs de Riemann. Dans cette première note, nous présentons les idées géométriques introduites par Gauss et Riemann, à la lumière d'un calcul tensoriel présenté de manière minimale. (Les notes qui suivent sont un compte rendu d'une série de discussions – et de séances de travail – que j'ai eu avec John Hubbard lors de son séjour à Marseille durant l'année universitaire 2015-2016. Le texte est dans un état suffisamment avancé pour être publié ici, même si le lecteur doit resté vigilant. J'espère qu'elles traduisent (au moins partiellement) les idées et le questionnement que nous avons abordés à cette époque : ce travail constitue en un sens une version d'étape d'une publication à venir, que nous pourrons espérer plus finalisée.)

1. Introduction

1.1. Soit (M, g) une variété riemannienne (lisse) de dimension n . Nous supposons que M est plongée isométriquement dans \mathbb{R}^m (pour $m \geq n$) : en d'autres termes, la métrique riemannienne g est celle qui est induite par la structure euclidienne de \mathbb{R}^m (cette apparente restriction simplificatrice nous est « autorisée » par « [le théorème du plongement de Nash](#) » [Nas54, Nas56]). Tout au long de cette note, nous noterons $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de « [l'espace ambiant](#) » de M (i.e. \mathbb{R}^m) de sorte que $|u|^2 := \langle u | u \rangle$ coïncide avec le carré de la norme euclidienne de u dans \mathbb{R}^m . Dans un système de coordonnées, les composantes $g_{\mu\nu}$ de la métrique sont associées aux « [symboles de Riemann](#) » noté $g_{\mu\nu, \sigma\tau}$ et définis comme les dérivées partielles secondes $\partial_{\sigma\tau}(g_{\mu\nu})$. La symétrie de la métrique (traduisant la symétrie du produit scalaire) et le lemme de Schwarz (commutation de l'ordre des dérivées partielles), entraînent immédiatement les symétries 1 et 2 des symboles de Riemann, soient respectivement

$$(1) \quad g_{\mu\nu, \sigma\tau} = g_{\nu\mu, \sigma\tau} \quad \text{et} \quad g_{\mu\nu, \sigma\tau} = g_{\mu\nu, \tau\sigma}$$

Les idées de Riemann sur la courbure et développées dans le sillage d'Euler [Eul60] et de Gauss [Gau28], sont difficiles à mettre en évidence au travers des textes originaux (essentiellement [Rie68] et [Rie92]). Une référence importante à ce sujet est le tome II de l'introduction à la géométrie différentielle de Spivak [Spi99] (voir aussi [Kli72, Chap. 37], [Die86, Chap. IX par P. Libermann] et [DD87] pour des notes historiques). Les successeurs de Riemann ont travaillé sur diverses interprétations géométriques de ce qu'on appelle

1. GDAC-I2M UMR 7373 CNRS Université d'Aix-Marseille
2. eric.olivier@univ-amu.fr

maintenant le « *tenseur de Riemann-Christoffel* » – où plus simplement le « *tenseur de courbure*³ ». Le calcul différentiel absolu de Ricci et Levi-Civita (i.e. le calcul tensoriel), la notion de connexion affine de Koszul, le transport parallèle, jusqu'à la notion courbure pour la connexion d'Ehresmann, seront traités ultérieurement (c.f. [Oli17a] et [Oli17b]). Dans cette première note, nous basons notre présentation sur le calcul des variations d'Euler-Lagrange; cette théorie – déjà développée à l'époque de Riemann – permet d'obtenir l'équation des « *géodésiques inertielles* » (c.f. Théorème 2.1) et ainsi de définir « *l'exponentielle de Riemann* » et « *les systèmes de coordonnées dites normales* » (voir la Section 2).

1.2. Plaçons nous dans un système x de coordonnées locales de M et définies sur un voisinage d'un point $X \in M$; la variété M étant de dimension n , les coordonnées x sont à valeurs dans \mathbb{R}^n et nous supposons que $x(X)$ coïncide avec l'origine $0 = (0, \dots, 0)$ de \mathbb{R}^n . Nous avons déjà défini les symboles de Riemann $g_{\mu\nu, \sigma\tau}(X)$ comme les dérivées secondes $\partial_{\sigma\tau}|_X(g_{\mu\nu})$ des x -composantes $g_{\mu\nu}$ de la métrique riemannienne (définies sur le domaine de x): de manière analogue, nous noterons dans la suite $g_{\mu\nu, \sigma}(X)$ la dérivée partielle première $\partial_{\sigma}|_X(g_{\mu\nu})$. Nous dirons que les coordonnées locales x sont « *euclidiennes en X* » lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites, soient

$$(2) \quad g_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad g_{\mu\nu, \sigma}(X) = 0$$

Nous considérerons essentiellement deux types de coordonnées locales, les coordonnées normales (dont nous avons déjà parlé) et les coordonnées gaussiennes (pour M de dimension 2 : c.f. Section 9), qui se trouvent être l'une et l'autre euclidiennes (c.f. Proposition 2.4 & Proposition 9.1); lorsque M est de dimension 2, la manière dont ces deux systèmes de coordonnées se correspondent nous fournit un grand nombre d'informations sur la géométrie locale de M . Cependant, lorsque M est de dimension quelconque, ce sont les coordonnées normales qui sont le mieux adaptées pour accéder à la « *courbure* » locale de M . Afin de comprendre simplement comment ces coordonnées sont définies, supposons que Y soit un deuxième point de M « *assez* » proche de X (pour la distance riemannienne sur M): alors il existe une unique géodésique inertielle $t \mapsto \xi(t)$ issue de X (i.e. $\xi(0) = X$) et joignant Y avec $\xi(1) = Y$, de sorte que la longueur de l'arc géodésique entre X et Y coïncide avec la distance riemannienne de X à Y . Cette géodésique est entièrement déterminée par le vecteur vitesse initial $\dot{\xi}(0)$ (vecteur de l'espace tangent $T_X M$). Toute base orthonormée⁴ de $T_X M$ détermine un système de coordonnées normales en X de la manière suivante : si (y^1, \dots, y^n) sont des coordonnées de $\dot{\xi}(0)$ dans cette base, alors celles-ci sont aussi – par définition – les coordonnées normales du point Y vu de X et déterminée par la base orthonormée de $T_X M$ considérée : nous détaillons tout cela à la Section 2. Ici, notre point de départ est le théorème suivant.

Théorème A. *Si les coordonnées considérées sont normales en un point X alors l'identité cyclique de Riemann est satisfaite, en ce sens que*

$$(ICR) \quad g_{\mu\nu, \sigma\tau}(X) + g_{\mu\sigma, \tau\nu}(X) + g_{\mu\tau, \nu\sigma}(X) = 0$$

3. Si aucune précision n'est donnée, cela signifie qu'il s'agit du tenseur de courbure associé à la connexion de Levi-Civita : c.f. [Oli17a] pour un développement de cette question.

4. Orthonormée pour la structure euclidienne de l'espace ambiant – \mathbb{R}^m – de M .

1.3. Les symétries des symboles de Riemann, s'interprètent naturellement au sein de structures algébriques générales. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie) et soit $\mathcal{Q}(E)$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des formes quadrilinéaires sur E : pour $\epsilon = \pm$, nous notons $\mathcal{Q}^\epsilon(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{Q}(E)$ des formes quadrilinéaires U vérifiant les symétries (resp. antisymétries) 1 et 2 pour $\epsilon = +$ (resp. $\epsilon = -$) : plus précisément, $U \in \mathcal{Q}^\epsilon(E)$ ssi, pour tout $u, v, w, z \in E$,

$$(S\epsilon) \quad U(u, v, w, z) = \epsilon U(v, u, w, z) = \epsilon U(u, v, z, w)$$

Soient $\mathcal{Q}_C^\epsilon(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{Q}^\epsilon(E)$ des U vérifiant la cyclicité, i.e. :

$$(SC) \quad U(u, v, w, z) + U(u, w, z, v) + U(u, z, v, w) = 0$$

et $\mathcal{Q}_B^\epsilon(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{Q}^\epsilon(E)$ des U vérifiant la bisymétrie, i.e. :

$$(SB) \quad U(u, v, w, z) = U(w, z, u, v)$$

Alors le Lemme de Milnor (c.f. Lemme 4.1) affirme que $\mathcal{Q}_C^\epsilon(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{Q}_B^\epsilon(E)$. Supposons maintenant que $U \in \mathcal{Q}^+(E)$; alors il est immédiat de vérifier que si U satisfait la cyclicité (et donc la bi-symétrie) alors U satisfait aussi « l'identité de Moore », en ce sens que pour tout $u, v \in E$

$$(S^{**}) \quad U(u, v, v, v) = 0$$

Le lemme de Moore (c.f. Lemme 5.1) affirme que réciproquement, si $U \in \mathcal{Q}^+(E)$ satisfait (S**) alors U satisfait aussi la cyclicité (SC) et donc la bisymétrie (SB).

1.4. Considérons le cas où $E = \mathbb{R}^n$; en utilisant « les notations sommatoires d'Einstein », tout vecteur u de \mathbb{R}^n s'écrit $u = u^\mu e_\mu$, où les u^μ sont les coordonnées cartésiennes de u et où les e_μ sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n . L'espace $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ est dimension n^4 : pour $U \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$, nous notons $U_{\mu\nu\sigma\tau} := U(e_\mu, e_\nu, e_\sigma, e_\tau)$ les n^4 « composantes cartésiennes » de U , de sorte que $U(u, v, w, z) = u^\mu v^\nu w^\sigma z^\tau U_{\mu\nu\sigma\tau}$, pour tout $u, v, w, z \in \mathbb{R}^n$. Les symétries de U introduites au § 1.3 peuvent alors se traduire en composantes. Ainsi, les symétries/antisymétries 1 et 2 signifient que $U_{\mu\nu\sigma\tau} = \pm U_{\nu\mu\sigma\tau} = \pm U_{\mu\nu\tau\sigma}$; la cyclicité et la bi-symétrie de U se traduisent respectivement en écrivant $U_{\mu\nu\sigma\tau} + U_{\mu\sigma\tau\nu} + U_{\mu\tau\nu\sigma} = 0$ et $U_{\mu\nu\sigma\tau} = U_{\sigma\tau\mu\nu}$; enfin U satisfait l'identité de Moore ssi $U_{\mu\nu\nu\nu} = 0$.

1.5. Pour $X \in M$ donné, le « hessien métrique » associée à des coordonnées normales en X (c.f. Proposition 3.2) est défini comme la forme quadrilinéaire $h \in \mathcal{Q}^+(\mathbb{R}^n)$ dont les composantes cartésiennes coïncident avec les symboles de Riemann en X , en ce sens que

$$(3) \quad h_{\mu\nu\sigma\tau} = g_{\mu\nu, \sigma\tau}(X)$$

Par le Théorème A nous avons $h \in \mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^n)$; le lemme de Milnor entraîne donc que h satisfait aussi la bi-symétrie et cela signifie – pour les symboles de Riemann – que

$$(4) \quad g_{\mu\nu, \sigma\tau}(X) = g_{\sigma\tau, \mu\nu}(X)$$

En fait, la combinaison des lemmes de Milnor et de Moore montrent que la cyclicité et la bi-symétrie des symboles de Riemann (au centre X d'un système de coordonnées normales) sont équivalentes à l'identité de Moore $g_{\mu\nu,\nu\nu}(X) = 0$: il est donc intéressant (et utile) de noter que le théorème suivant⁵ est une forme équivalente du Théorème A.

Théorème A'. *Les symboles de Riemann pris au centre X d'un système de coordonnées normales vérifie l'identité de Moore en ce sens que $g_{\mu\nu,\nu\nu}(X) = 0$.*

1.6. Nous allons voir en quoi le hessien métrique h (et donc les symboles de Riemann) associé par (3) à des coordonnées normales en un point X de M , caractérise l'absence de courbure en ce point. Supposons M connexe par arc et soit $d_R(X, Y)$ la distance riemannienne séparant deux points X et Y de M (i.e. l'infimum des longueurs des chemins de M reliant X et Y). Si \mathbf{X} est la carte associée à un système de coordonnées normales en X , alors \mathbf{X} est définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n et $X = \mathbf{X}(0)$: la principale propriété d'une telle carte est de réaliser une isométrie radiale (de centre 0) d'un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n (muni de la distance euclidienne) sur un voisinage de X dans M (muni de la distance riemannienne). Pour préciser cela, nous introduisons la distance $\rho_X(\cdot, \cdot)$ définie sur le domaine de définition de \mathbf{X} en posant

$$\rho_X(y, z) = d_R(\mathbf{X}(y), \mathbf{X}(z))$$

de sorte que (c.f. Proposition 2.3) pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ (suffisamment petit) :

$$(5) \quad \rho_X(0, z) = |z|$$

La propriété d'isométrie radiale d'une carte associée à des coordonnées normales est un cas particulier d'une approximation plus générale formulée dans le théorème suivant.

Théorème B. *Si h est le hessien métrique d'un système de coordonnées supposées euclidiennes en X – i.e. $g_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu,\sigma}(X) = 0$ – alors (i) : h est un élément de $\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si (ii) : pour tout $y, z \in \mathbb{R}^n$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$*

$$(6) \quad \rho_X(\varepsilon y, \varepsilon(y+z))^2 = |\varepsilon z|^2 + \frac{\varepsilon^4}{2} h(z, z, y, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^5)$$

Soit \mathbf{X} la carte associée à des coordonnées normales en $X = \mathbf{X}(0)$ et soit h le hessien métrique correspondant. Par le Théorème A, nous savons que h est une forme quadrilinéaire de $\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^n)$; or les coordonnées normales en X étant aussi euclidiennes en ce point, le Théorème B assure que l'approximation (6) est valide pour tout $y, z \in \mathbb{R}^n$ et tout ε réel dans un voisinage de 0 : notons alors que dans ce cas, la condition $h \equiv 0$ assure que la distance $\rho_X(\cdot, \cdot)$ est très proche de la distance euclidienne au voisinage de 0. Mais d'une part, nous pouvons vérifier (argument de polarisation) que $h \equiv 0$ ssi $h(z, z, y, y) = 0$, pour tout $y, z \in \mathbb{R}^n$ et d'autre part, si $\hat{\mathbf{X}}$ est la carte d'un autre système de coordonnées normales en X , alors il existe une isométrie A de \mathbb{R}^n t.q. $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \circ A$ (du moins, dans un voisinage de 0) : si \hat{h} est le hessien métrique associée à $\hat{\mathbf{X}}$ et si (A^i_j) est la matrice (orthogonale) de A dans la base canonique de \mathbb{R}^n , alors les composantes cartésiennes de h et \hat{h} sont liées par la formule de passage $h_{\mu\nu\sigma\tau} = A^a_\mu A^b_\nu A^c_\sigma A^d_\tau \hat{h}_{abcd}$: cela entraîne en particulier que $h \equiv 0$ ssi $\hat{h} \equiv 0$. Ces dernières remarques justifient la définition suivante.

5. Il est très probable que l'identité cyclique de Riemann était connue de Riemann sous la forme du Théorème A ; la chose est moins évidente pour le Théorème A'.

Définition A. *La variété riemannienne (M, g) – de dimension n – est plate en X ssi le hessien métrique h associé à des coordonnées normales en X est la forme quadrilinéaire nulle sur \mathbb{R}^n .*

1.7. Les conséquences de la Définition A sont difficiles à appréhender sans l'aide du calcul tensoriel, c'est-à-dire du calcul différentiel dit *covariant* ou *absolue*. L'idée de *covariance* se trouvent déjà dans le « *Theorema Egregium* » de Gauss (c.f. [Gau28] et Section 10 pour des détails) et se développe en dimension quelconque chez Riemann dans les deux textes déjà mentionnés. Cependant, le fait que la notion de tenseur soit implicite aussi bien chez Gauss que chez Riemann, entraîne des difficultés pour saisir les idées originales mises en jeu. La clarification de ces idées vient avec la formalisation moderne du calcul tensoriel, où les dérivées partielles sont remplacées par les *dérivées partielles covariantes*. Cette théorie s'est développée par étapes successives avec (entre autres) Christoffel, Beltrami, Ricci, Levi-Civita, jusqu'en 1917 date d'introduction de la notion de transport parallèle (Levi-Civita) : voir le Chapitre 48 du livre de Kline [Kli72], ou encore les notes historiques de Bourguignon dans [Bou92]. Disons, pour fixer les idées, qu'un objet lié à la variété M est covariant lorsque sa définition ne dépend pas du système de coordonnées à travers lequel on voit la variété. Einstein fera de la covariance un principe fondamental de la physique moderne en affirmant que « *les lois de la physique doivent s'exprimer de manière covariante* ».

1.8. Les objets covariants du calcul tensoriel sont les (champs de) tenseurs : afin d'en donner une présentation minimale (suffisante pour nos besoins), nous commençons par noter $\mathcal{C}^\infty(M)$ l'anneau des champs scalaires définis sur M et à valeurs réelles. Alors l'application $(X, f) \mapsto V|_X(f)$ définie sur $M \times \mathcal{C}^\infty(M)$ et à valeur réelle est un **champ de vecteurs** (ou de – manière équivalente – une **dérivation**), si pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ l'application partielle $X \mapsto V|_X(f)$ est dans $\mathcal{C}^\infty(M)$ et si pour tout $X \in M$, l'application partielle $f \mapsto V|_X(f)$ est \mathbb{R} -linéaire et satisfait la **règle de dérivation de Leibniz en X** en ce sens que $V|_X(fg) = V|_X(f)g(X) + f(X)V|_X(g)$ pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Afin de retrouver une intuition géométrique, il est aussi possible de dire que V une section \mathcal{C}^∞ du **fibré tangent** $TM := \coprod_X T_X M$ (union disjointe⁶ des espaces tangents $T_X M$ pour $X \in M$) i.e. une application $V : X \mapsto V|_X$ de M dans $T_X M$ t.q. $V|_X \in T_X M$, de sorte que pour tout $X \in M$ et tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ la valeur $V|_X(f)$ s'identifie à la dérivée directionnelle de f suivant le vecteur $V|_X$ (l'application $X \mapsto V|_X(f)$ étant elle-même \mathcal{C}^∞ sur M). **Nous notons $\Gamma(TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs** dont on vérifie facilement (à partir de la définition d'un champ de vecteurs comme dérivation) qu'il constitue un $\mathcal{C}^\infty(M)$ -module. Dans cette note, nous ne rencontrerons que des tenseurs complètement covariants, c'est-à-dire de valence $(0, p)$ pour $p \geq 1$: plus précisément, un $(0, p)$ -tenseur T sur M est une forme p -linéaire sur le $\mathcal{C}^\infty(M)$ -module $\Gamma(TM)$ des champs de vecteurs sur M , ce qui signifie que T est $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linéaire en chacune de ses p entrées. Enfin, pour tout $X \in M$, nous notons $T|_X$ la forme p -linéaire sur $T_X M$ t.q. $T|_X(u, \dots, v) = T|_X(U, \dots, V)$, dès que les valeurs respectives des p champs de vecteurs U, \dots, V coïncident en X avec les p vecteurs u, \dots, v de $T_X M$. Considérons maintenant que X est la carte associée à un système

6. La variété M étant supposée plongée dans \mathbb{R}^m , les espaces tangents $T_X M$ sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^m ; ainsi TM est donc un sous-ensemble de la grassmannienne $\text{Gr}_n(\mathbb{R}^m)$ formée des sous-espaces vectoriels de dimension n de \mathbb{R}^m .

(quelconque) $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ de coordonnées sur M ; si $\mathbf{x}(X) = (x^1, \dots, x^n)$ alors les vecteurs $\partial/\partial x^\mu|_X$ de $T_X M$ (aussi notés $\partial_\mu|_X$) obtenus comme la dérivée en $t = 0$ du chemin $t \mapsto \mathbf{X}(x^1, \dots, x^\mu + t, \dots, x^n)$, forment la base holonôme de $T_X M$ associée au coordonnées \mathbf{x} . Les \mathbf{x} -composantes du $(0, p)$ -tenseurs T sont par définition les n^p fonctions définies sur le domaine de définition de \mathbf{x} en posant :

$$T_{\mu_1 \dots \mu_p} = T\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\mu_p}}\right)$$

La covariance de T se traduit en composantes par un système d'équations de changement de coordonnées : si $\hat{T}_{\nu_1 \dots \nu_p}$ sont les composantes de T dans un autre système de coordonnées $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$, alors (dans l'intersection des domaines de \mathbf{x} et $\hat{\mathbf{x}}$) :

$$(7) \quad \hat{T}_{\nu_1 \dots \nu_p} = \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \hat{x}^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \hat{x}^{\nu_p}} T_{\mu_1 \dots \mu_p}$$

La formule de changement de coordonnées (7) assure à elle seule la nature tensorielle de T : c'est sous cette forme « élémentaire » que Riemann pratiquait le calcul tensoriel.

Notre approche du tenseur de courbure n'est pas orthodoxe : elle est entièrement basée sur l'existence d'un $(0, 4)$ -tenseur H – que nous appelons **le tenseur hessien métrique** – telle qu'énoncée dans le théorème B ci-dessous (plusieurs démonstrations en seront données dans [Oli17a]). Nous définirons le tenseur de courbure R (c.f. Définition B) à partir du tenseur hessien métrique : ceci n'est pas la présentation adoptées dans la plupart des textes classiques de géométrie différentielle, où le tenseur H – si toutefois il est évoqué – passe au second plan par rapport au tenseur R (voir [BG68]⁷ et surtout [Moo09]).

Théorème C. *Le tenseur hessien métrique est le $(0, 4)$ -tenseur H dont les composantes $H_{\mu\nu\sigma\tau}(X)$ coïncident avec les symboles de Riemann $g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X)$, dès que les coordonnées sont normales en X .*

Par suite, si h est le hessien métrique au centre X de coordonnées normales \mathbf{x} , alors les \mathbf{x} -composantes H en X coïncident avec les composantes cartésiennes de h , i.e.

$$(8) \quad H_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = h_{\mu\nu\sigma\tau}$$

Partant de la Définition A (et du fait qu'un tenseur ne dépend pas du système de coordonnées), nous déduisons le théorème suivant comme une conséquence de (8).

Théorème D. *La variété riemannienne (M, g) est plate en X ssi $H|_X \equiv 0$.*

1.9. Le Théorème A assure que le hessien métrique h (associé au centre d'un système de coordonnées normales) est une forme quadrilinéaire dans $\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^d)$; par le Theorème C combiné à (8), les symétries h se transposent globalement au tenseur hessien métrique.

Théorème E. $H \in \mathcal{Q}_C^+(\Gamma(TM))$.

7. On peut lire dans [BG68, p. 251] : « Let x^i be normal coordinates at m and let $b_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ be expanded in a finite Taylor expansion of at least the second order, $b_{ij} = a_{ij} + b_{ijk}x^k + b_{ijhk}x^h x^k + \dots$, where $b_{ijhk} = b_{ijkh}$ and $a_{ij} = b_{ij}(m)$. Since a change of one normal coordinate to another is linear, the tensor whose components with respect to $\{\partial_i(m)\}$ are b_{ijhk} is an invariant of the metric structure. Hence, it is the value of a tensor field on M . This tensor field can be expressed in terms of the curvature tensor and its covariant differentials, but we shall not do so here. »

Les symétries 1 et 2 du $(0, 4)$ -tenseur H signifient pour tout $U, V, W, Z \in \Gamma(TM)$,

$$(9) \quad H(U, V, W, Z) = H(V, U, W, Z) = H(U, V, Z, W)$$

la cyclicité (c.f. Théorème A) se traduisant en écrivant

$$(10) \quad H(U, V, W, Z) + H(U, W, Z, V) + H(U, Z, V, W) = 0$$

Enfin le Lemme de Milnor (c.f. Lemme 5.1) nous permet de déduire automatiquement que H vérifie aussi la bi-symétrie en ce sens que

$$(11) \quad H(U, V, W, Z) = H(W, Z, U, V)$$

Dans notre présentation, le tenseur de courbure (complètement covariant) est défini à partir du tenseur hessien métrique H .

Définition B. *Le tenseur de courbure (de Riemann-Christoffel) est le $(0, 4)$ -tenseur R tel que⁸ :*

$$(12) \quad R(U, V, W, Z) = H(U, W, V, Z) - H(U, Z, V, W)$$

1.10. Nous pouvons, dès à présent, montrer que M est plate en X (c.f. Définition A) si et seulement si $R|_X \equiv 0$. En effet (c.f. Théorèmes E), nous savons que $H \in \mathcal{Q}_C^+(\Gamma(TM))$ et donc (lemme de Milnor), par la bisymétrie :

$$\begin{aligned} R(V, U, W, Z) &= H(V, W, U, Z) - H(V, Z, W, U) \\ &= -(H(U, W, V, Z) - H(U, Z, V, W)) = -R(U, V, W, Z) \end{aligned}$$

Cela démontre que R satisfait l'anti-symétrie 1 et un raisonnement analogue établirait de même que R satisfait aussi l'anti-symétrie 2. Enfin, à partir des symétries 1 et 2, nous pouvons établir la cyclicité de R en écrivant :

$$\begin{aligned} R(U, W, Z, V) + R(U, Z, V, W) &= (H(U, Z, W, V) - H(U, V, W, Z)) \\ &\quad + (H(U, V, Z, W) - H(U, W, Z, V)) \\ &= H(U, Z, W, V) - H(U, W, Z, V) = -R(U, V, W, Z) \end{aligned}$$

Théorème F. $R \in \mathcal{Q}_C^-(\Gamma(TM))$.

Le point clef est alors de remarquer que H s'exprime en fonction de R , puisque

$$\begin{aligned} R(U, W, V, Z) + R(U, Z, V, W) &= H(U, V, W, Z) - H(U, Z, W, V) \\ &\quad + H(U, V, Z, W) - H(U, W, Z, V) \\ &= 2H(U, V, W, Z) - H(U, Z, W, V) \\ &\quad + (H(U, Z, V, W) + H(U, V, W, Z)) = 3H(U, V, W, Z) \end{aligned}$$

ce qui s'écrit finalement

$$(13) \quad H(U, V, W, Z) = \frac{1}{3}R(U, W, V, Z) + \frac{1}{3}R(U, Z, V, W)$$

Les identités (12) et (13) entraînent que $H|_X \equiv 0$ ssi $R|_X \equiv 0$. Nous venons de voir que les Théorèmes A et C entraînent que :

Théorème G. *La variété riemannienne (M, g) est plate en X ssi $R|_X \equiv 0$.*

8. Il y a ici une ambiguïté sur le signe de R : cette ambiguïté se retrouve dans toute la littérature concernant le tenseur de Riemann-Christoffel.

1.11. Cette première note sur la courbure riemannienne est organisée autour de la démonstration de l'identité cyclique de Riemann sous la forme du Théorème A puis du Théorème A'. La Section 2 commence par la description lagrangienne des géodésiques inertielles obtenues grâce aux équations d'Euler-Lagrange (c.f. Théorème 2.1) : cela nous permet d'introduire les coordonnées normales en un point ainsi que l'exponentielle de Riemann qui leurs est associée. La Section 3 commence par une heuristique de nature géométrique basée sur le [théorème spectral](#) et nous menant alors au « [lemme de Gauss Spectral](#) » (c.f. Théorèmes 3.3 & 3.4) : ce dernier est l'ingrédient principal permettant d'établir les Théorèmes A & A'. La preuve du Théorème A' se trouve au § 3.4 et nous reproduisons au § 3.6 l'argument de Spivak dans [Spi99] qui démontre le Théorème A.

Un point important (c.f. Appendice A), est de noter que le lemme de Gauss spectral est une forme équivalente du Lemme de Gauss géométrique affirmant que les géodésiques inertielles issues d'un point donné de M sont orthogonales (pour la métrique riemannienne) aux hypersphères centrées en ce point. Nous insistons sur le fait que les lemmes de Gauss spectral/géométrique – et par conséquent l'identité cyclique de Riemann – dépendent du théorème spectral.

Les Sections 4 & 5 sont respectivement dédiées au Lemme de Milnor (c.f. Lemme 4.1) et au Lemme de Moore (c.f. Lemme 5.1). La Section 5 est conclue par une démonstration du Théorème B. Dans la Section 6 nous donnons les calculs explicites des dimensions des espaces $\mathcal{Q}_C^\pm(E)$ et $\mathcal{Q}_B^\pm(E)$ en fonction de la dimension n du \mathbb{R} -espace vectoriel E (c.f. Propositions 6.1, 6.2 & 6.4); bien que sous une forme différente, ces résultats faisaient partie du travail original de Riemann : combinés aux lemmes de Milnor et de Moore, ils permettent d'avoir une vue synthétique de l'ensemble des propriétés de symétrie du tenseur hessien métrique H et du tenseur de courbure R . En particulier, dans le cas où E est de dimension 2, nous pourrions utiliser le fait que $\mathcal{Q}_C^-(E)$ est de dimension 1 afin d'établir la relation qui existe entre la courbure de Gauss et le tenseur de courbure dans le cas où la variété M est elle même de dimension 2 (c.f. Théorème 11.4 in Section 11).

La Section 7 est consacrée à une présentation des expressions développées des x -composantes du tenseur de Riemann-Christoffel R (c.f. Théorème 7.1) ainsi que du tenseur hessien métrique H (c.f. Corollaire 7.2) dans un système de coordonnées x supposé quelconque. Il n'y a ici ni démonstration, ni présentation heuristique permettant de « *comprendre* » des formules très sophistiquées qui sont au coeur du travail de Riemann (les composantes de R apparaissent pour la première fois dans [Rie92]) : nous vérifions simplement la cohérence qui existe entre ces formules et un certain nombre des propriétés des tenseurs R et H . La question des composantes de R (et par conséquent de H) sera traitée dans la seconde note [Oli17a] de plusieurs points de vues (i.e. celui de Riemann, mais aussi des points de vues utilisant des outils/concepts plus modernes comme le transport parallèle).

Nous avons vu (c.f. Théorème D & G) que les tenseurs H et R caractérisent – de manière équivalente – « *l'absence de courbure en un point* » : la question naturelle qui se pose alors est savoir comment il est possible de « *mesurer cette courbure* ». Il se trouve que cette information existe aussi bien dans H que dans R (encore une fois de manière équivalente), mais c'est le tenseur R qui est utilisé pour caractériser la courbure (ce qui justifie

son nom). On pourra invoquer plusieurs justifications pour cela (y compris des raisons tenant à l'histoire mathématique) : cependant la simplicité de la relation entre le tenseur de courbure R et la courbure gaussienne, dans le cas des variétés de dimension 2, nous fournit une justification très raisonnable. En effet, il découle de l'étude dimensionnelle de $\mathcal{Q}_C^\pm(E)$ de la Section 6 que les espaces $\mathcal{Q}_C^-(T_X M)$ sont tous de dimension 1 lorsque la variété riemannienne M est de dimension 2. Or dans ce cas 2-dimensionnel, si nous notons Ω le $(0, 2)$ -tenseur tel que $\Omega|_X(U, V)$ soit le déterminant⁹ de $(U|_X, V|_X)$, alors il est facile de vérifier que la forme quadrilinéaire $\Omega \otimes \Omega|_X$ appartient à $\mathcal{Q}_C^-(T_X M)$. Par conséquent $R|_X$ et $\Omega \otimes \Omega|_X$ sont proportionnels : nous verrons qu'en fait $R_X = -K(X)\Omega \otimes \Omega|_X$, où $X \mapsto K(X)$ est le champ scalaire de la courbure gaussienne sur (la surface) M . Les dernières sections sont consacrées à établir la relation entre le tenseur de courbure et la courbure gaussienne dans le cas des surfaces. Ainsi, la Section 8 est une introduction rapide aux notions de courbure et de rayon de courbure d'une courbe plane. Dans la Section 9 nous considérons le cas d'une surface Σ plongée isométriquement dans l'espace euclidien et nous définissons la courbure gaussienne en un point à partir d'un système de coordonnées gaussiennes.

Enfin, les Sections 10 & 11 décrivent les relations entre le tenseur de Riemann-Christoffel, la seconde forme fondamentale et la courbure gaussienne en un point de la surface Σ . Dans le § 10.2 nous introduisons le tenseur de Gauss G comme un $(0, 4)$ -tenseur défini à partir de la seconde forme fondamentale (c.f. Théorème 10.4) : nous montrons alors que les composantes de $G_{\mu\nu, \sigma\tau}(X)$ coïncident avec les symboles de Riemann $g_{\mu\nu, \sigma\tau}(X)$, lorsque les coordonnées locales considérées sont gaussiennes en X (c.f. Corollaire 10.5) : un point intéressant sera alors de voir pourquoi (dans le cas d'une surface Σ de l'espace) le tenseur de Gauss et le tenseur hessien métrique différent, malgré la forte analogie de leur définition (c.f. Proposition 10.6). Nous terminons cette note en démontrant le « *Theorema Egregium* » sous trois formes telles qu'énoncées dans les Théorèmes 11.3, 11.4 & 11.6.

2. Géodésiques inertielles – Coordonnées normales – Exponentielle de Riemann

2.1. Les géodésiques riemanniennes sur M peuvent être définies par « un principe d'action extrémale » (c.f. [Arn13] pour une référence en mécanique lagrangienne et hamiltonienne) : grâce aux équations d'Euler-Lagrange elles sont alors caractérisées comme les solutions d'un système différentiel du second ordre. (Nous verrons dans [Oli17a] – avec le Théorème de Levi-Civita – que cette approche s'interprète géométriquement en terme de transport parallèle.) Pour commencer, considérons le lagrangien¹⁰

$$(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = (q, \dot{q}) \mapsto L(q, \dot{q})$$

où la variable q (resp. \dot{q}) est prise dans un ouvert de \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{R}^n tout entier). Alors le chemin $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n) : [a; b] \rightarrow \mathcal{V}$ sera appelé une L -géodésique s'il satisfait le système des équations d'Euler-Lagrange i.e.

$$(\forall \sigma) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \frac{\partial L}{\partial q^\sigma}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$$

9. Calculé dans $T_X M$ muni de sa structure euclidienne induite par l'espace ambiant (i.e. \mathbb{R}^m).

10. Ici on se restreint à un lagrangien stationnaire en ce sens qu'il ne dépend pas d'un paramètre temporel ; on exige seulement que les dérivées partielles $\partial L / \partial q^\mu$ et $\partial L / \partial \dot{q}^\mu$ existent et soient continues.

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème 2.1. Soient $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \circ X$ où X est la carte d'un système de coordonnées (quelconque) sur (M, g) et L le *lagrangien-inertiel* défini pour tout (q, \dot{q}) (avec q dans le domaine de X) et t, q .

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \gamma_{\mu\nu}(q)$$

Soit $t \mapsto X(\xi^1, \dots, \xi^n) =: \xi(t)$ un germe de chemin en un point $X = \xi(0)$ de M ; alors ξ est une géodésique inertielle de M si et seulement si $t \mapsto (\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ est une L -géodésique : dans ce cas les composantes de ξ satisfont le système d'équation

$$(14) \quad (\forall \sigma) \quad \ddot{\xi}^\sigma(t) + \dot{\xi}^\mu(t) \dot{\xi}^\nu(t) \mathbf{C}^\sigma_{\mu\nu}(\xi(t)) = 0$$

où les symboles de Riemann-Christoffel de deuxième espèce sont définis en posant :

$$(15) \quad \mathbf{C}^\sigma_{\mu\nu} := \frac{1}{2} g^{\sigma\epsilon} (g_{\epsilon\nu, \mu} + g_{\mu\epsilon, \nu} - g_{\mu\nu, \epsilon})$$

Preuve. Nous commençons par calculer les dérivées partielles de L . D'une part,

$$\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial}{\partial q^\sigma} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \gamma_{\mu\nu}(q) \right) = \frac{1}{2} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial q^\sigma}$$

et d'autre part (en utilisant la symétrie $\gamma_{\mu\sigma} = \gamma_{\sigma\mu}$)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \gamma_{\mu\nu}(q) \right) = \dot{q}^\mu \gamma_{\mu\sigma}(q)$$

Les équations d'Euler-Lagrange pour $t \mapsto (\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ s'écrivent alors :

$$(\forall \sigma) \quad \ddot{\xi}^\mu(t) g_{\mu\sigma}(\xi(t)) + \dot{\xi}^\mu(t) \dot{\xi}^\nu(t) \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}(\xi(t)) = \frac{1}{2} \dot{\xi}^\mu(t) \dot{\xi}^\nu(t) \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}(\xi(t))$$

Or, il est évident par la convention sommatoire d'Einstein que

$$\dot{\xi}^\mu(t) \dot{\xi}^\nu(t) \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}(\xi(t)) = \dot{\xi}^\nu(t) \dot{\xi}^\mu(t) \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}(\xi(t))$$

d'où l'identité

$$\dot{\xi}^\mu(t) \dot{\xi}^\nu(t) \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}(\xi(t)) = \frac{1}{2} \dot{\xi}^\mu(t) \dot{\xi}^\nu(t) \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}(\xi(t)) + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}(\xi(t)) \right)$$

et nous obtenons une forme équivalente des équations d'Euler-Lagrange, soient :

$$(\forall \sigma) \quad \ddot{\xi}^\mu(t) g_{\sigma\nu}(\xi(t)) + \frac{1}{2} \dot{\xi}^\mu(t) \dot{\xi}^\nu(t) \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}(\xi(t)) + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}(\xi(t)) - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}(\xi(t)) \right) = 0$$

L'équation (14) s'en déduit en utilisant le fait que $g^{\sigma\sigma} g_{\mu\sigma} = g^{\sigma\sigma} g_{\sigma\mu} = \delta^\sigma_\mu$ et par définition des symboles de Christoffel de seconde espèce. □

2.2. Les symboles de Christoffel de deuxième espèce définis en (15) apparaissent « naturellement » dans l'équation différentielle des géodésiques de M ; nous utiliserons aussi les symboles Riemann-Christoffel de première espèce, soient ¹¹

$$(16) \quad \mathbf{C}_{\mu\nu, \sigma} = -g_{\sigma\epsilon} \mathbf{C}^\epsilon_{\mu\nu} := \frac{1}{2} (g_{\sigma\nu, \mu} + g_{\mu\sigma, \nu} - g_{\mu\nu, \sigma})$$

11. De même que pour les symboles de Riemann $g_{\mu\nu, \sigma\tau}$, nous utilisons toujours une notation (assez classique) en écrivant $g_{\mu\nu, \sigma} = \partial_\sigma g_{\mu\nu}$.

D'une part, il découle directement de la symétrie du tenseur métrique que ¹²

$$(17) \quad C_{\mu\nu,\sigma} = C_{\nu\mu,\sigma} \quad \text{et} \quad C^\sigma_{\mu\nu} = C^\sigma_{\nu\mu}$$

D'autre part, à partir de (16) il vient ¹³

$$(19) \quad g_{\mu\nu,\sigma} = C_{\sigma\nu,\mu} + C_{\mu\sigma,\nu}$$

Dans cette note, notre approche est basée sur les symboles de Riemann $g_{\mu\nu,\sigma\tau}$ ainsi que sur l'identité cyclique de Riemann en coordonnées normales (c.f. Théorème A). Cela justifie l'importance (technique) du lemme suivant obtenu comme conséquence directe de (19).

Lemme 2.2. *Les symboles de Riemann sont liés aux Symboles de Christoffel i.e. :*

$$(20) \quad g_{\mu\nu,\sigma\tau} = \partial_\tau C_{\sigma\nu,\mu} + \partial_\tau C_{\mu\sigma,\nu}$$

2.3. Nous avons vu (c.f. § 2.1) qu'une géodésique inertielle issue d'un point X est un germe de chemin $t \mapsto \xi(t)$ en X (i.e. $\xi(0) = 0$) satisfaisant un principe variationnel lagrangien (c.f. Théorème 2.1). Une telle géodésique est entièrement déterminée (c.f. Théorème de Cauchy-Lipschitz) par les conditions initiales $\xi(0) = X$ et ¹⁴ $\dot{\xi}(0) =: y \in T_X M$: pour préciser les paramètres de la géodésique, nous noterons $\xi(t) = \exp_X(ty)$, c'est-à-dire que $(\xi(0), \dot{\xi}(0)) = (X, y)$. Alors, le sous-ensemble des vecteurs tangents $y \in T_X M$ tels que $\exp(ty)$ soit défini pour tout $0 \leq t \leq 1$ est un voisinage ouvert de 0 (dans $T_X M$) : l'application $y \mapsto \exp_X(y) := \exp_X(1y)$ définie sur ce voisinage est l'exponentielle de Riemann en X . En général, l'exponentielle de Riemann n'est ni injective, ni surjective (penser par exemple à la 2-sphère pour l'injectivité, ou encore à une variété non connexe pour la surjectivité ¹⁵). Nous supposons par la suite que (M, g) est géodésiquement complète, ce qui assure par le Théorème de Hopf-Rinow ¹⁶ que (pour tout $X \in M$) l'application \exp_X réalise une surjection de $T_X M$ sur l'ensemble de la variété M . Par définition le rayon d'injectivité de l'exponentielle de Riemann en X est le supremum $r_* = r_*(X)$ des $r > 0$ t.q. \exp_X soit définie et injective sur l'ensemble des $y \in T_X M$ de norme euclidienne $|y| < r$

12. Les symboles de Christoffel $C^\sigma_{\mu\nu}$ sont les coefficients de la connexion de Levi-Civita ∇ et (17) signifie que ∇ est sans torsion : c.f. [Oli17a].

13. Nous pouvons écrire par exemple les identités matricielles équivalentes suivantes :

$$(18) \quad \begin{pmatrix} C_{\mu\nu,\sigma} \\ C_{\sigma\nu,\mu} \\ C_{\mu\sigma,\nu} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{\mu\nu,\sigma} \\ g_{\sigma\nu,\mu} \\ g_{\mu\sigma,\nu} \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} g_{\mu\nu,\sigma} \\ g_{\sigma\nu,\mu} \\ g_{\mu\sigma,\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{\mu\nu,\sigma} \\ C_{\sigma\nu,\mu} \\ C_{\mu\sigma,\nu} \end{pmatrix}$$

14. Nous utilisons la notation de Newton pour la dérivée d'une fonction ne dépendant que d'une seule variable.

15. On peut aussi considérer le plan euclidien privé du disque unité fermé pour la surjectivité : mais dans ce cas la variété riemannienne obtenue n'est pas complète (en tant qu'espace métrique) et donc pas géodésiquement complète (Théorème d'Hopf-Rinow).

16. (D'après Wikipédia) : Etant donnée (M, g) une variété riemannienne connexe (sans bord), le **Théorème de Hopf-Rinow** affirme que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) : Il existe un point X de M pour lequel l'application exponentielle d'origine X est définie sur $T_X M$.
- (2) : Pour tout point X dans M , l'application exponentielle d'origine X est définie sur $T_X M$.
- (3) : (M, g) est géodésiquement complète, c'est-à-dire que les géodésiques sont définies sur \mathbb{R} .
- (4) : L'espace métrique (M, d_R) est complet.
- (5) : Les parties fermées et bornées sont compactes.

En outre, dans cette situation, deux points quelconques X et Y de M peuvent être reliés par une géodésique de longueur $d_R(X, Y)$. En particulier, l'application exponentielle (quelle que soit son origine) est surjective.

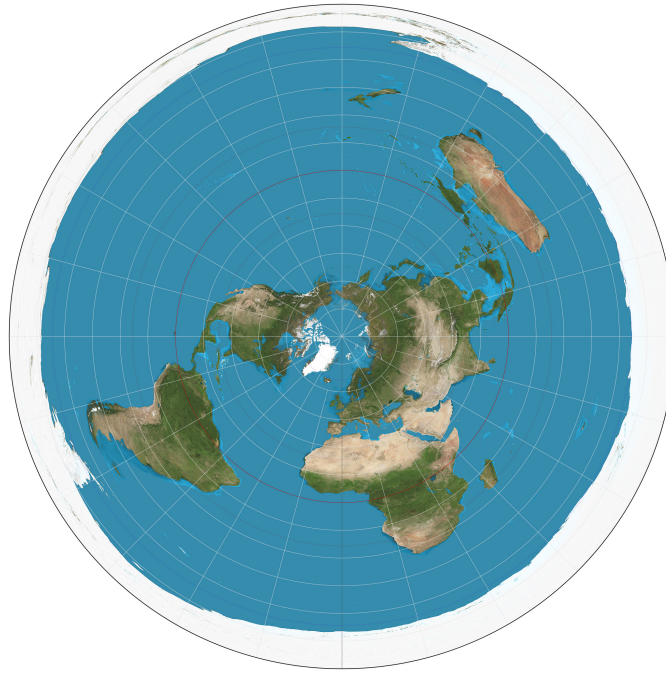


FIGURE 1. Représentation de la carte du Monde en coordonnées de Riemann centrées sur le Pôle Nord (N); la distance (dans le plan euclidien de la carte) entre N et le cercle extérieur représente le rayon d'injectivité r_* de l'exponentielle de Riemann en N (on a approximativement $r_* \approx \pi \times 6357$ km); les points sur le cercle extérieur ne font pas partie de la représentation et s'identifient tous au Pôle Sud. Dans le plan euclidien de la carte, les aires ne sont pas identiquement proportionnelles aux aires réelles (i.e. telles que calculées sur sphère terrestre) alors que les distances radiales le sont; ainsi, on remarquera (en confondant le rayon r_*/π des méridiens avec le rayon équatorial) que la surface de la terre telle que représentée ici vaut πr_*^2 , soit un peu moins de 2.5 fois la surface « réelle » $4\pi(r_*/\pi)^2$.

(voir la Figure 1 pour une illustration du rayon d'injectivité de l'exponentielle de Riemann associé au Pôle Nord de la surface terrestre). Enfin, il est facile de vérifier que si $Y = \exp_X(y)$ alors la norme euclidienne $|y|$ coïncide avec la longueur riemannienne de l'arc de géodésique correspondant à l'image par \exp_X de l'intervalle $[0; |y|]$: lorsque X et Y sont suffisamment proche l'un de l'autre, alors $|y|$ coïncide avec la distance riemannienne entre X et Y : nous précisons cela dans la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Si (M, g) est géodésiquement complète alors l'exponentielle de Riemann \exp_X en tout point X de M réalise un bijection (lisse) de la boule ouverte $\{|y| < r_*(X)\}$ (dans $T_X M$) sur son image (dans M) qui est une isométrie radiale, i.e. pour tout $y \in T_X M$ t.q. $|y| < r_*(X)$:*

$$|y| = d_R(X, \exp_X(y))$$

Supposons que la carte X associée à un système de coordonnées x soit définie sur un voisinage de 0 (dans \mathbb{R}^n) et soit $X = X(0)$: alors les coordonnées x sont dites **normales**

(ou encore inertielles) en X , si la base holonôme $(\partial_1|_X, \dots, \partial_n|_X)$ de $T_X M$ est orthonormée et si de plus pour tout (y^1, \dots, y^n) dans le domaine de \mathbf{X}

$$(21) \quad \exp_X(y^i \partial_i|_X) = Y \iff \mathbf{X}(y^1, \dots, y^n) = Y \iff (y^1, \dots, y^n) = \mathbf{x}(Y)$$

Dire que \mathbf{x} est un système de coordonnées normales en X signifie (en un sens) que la carte \mathbf{X} coïncide avec l'exponentielle de Riemann en X . Mais il faut préciser un peu les choses, à cause des conventions/notations que nous avons choisies (c.f. supra). Ainsi, en supposant que M est géodésiquement complète, l'application \exp_X (l'exponentielle de Riemann en X) est définie sur $T_X M$ (par définition un sous-espace vectoriel de l'espace ambiant \mathbb{R}^m) et n'a aucune raison (en général) de coïncider avec \mathbb{R}^n (qui par convention est le sous-espace de \mathbb{R}^m engendré par les n premiers vecteurs de la base canonique). Ainsi, d'une manière équivalente à (21), nous pouvons dire que le système de coordonnées \mathbf{x} est normal en X s'il existe une isométrie Ψ de \mathbb{R}^m pour laquelle

$$(22) \quad \Psi(\mathbb{R}^n) = T_X M \quad \text{et} \quad \mathbf{X} = \exp_X \circ \Psi$$

En particulier, l'exponentielle de Riemann en X réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $T_X M$ sur un voisinage de X dans M . Enfin, il est évident de remarquer que l'identité $\exp_X(0) = X$ combinée à (21) entraîne que $\mathbf{x}(X) = (0, \dots, 0)$ dès que le système de coordonnées \mathbf{x} est normal en X . La proposition suivante complète la liste des simplifications qu'assure l'utilisation d'un système de coordonnées normales.

Proposition 2.4. *Des coordonnées normales en un point X de M sont nécessairement euclidiennes en ce point : en d'autres termes $g_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu,\sigma}(X) = 0$.*

Preuve. Soient \mathbf{x} des coordonnées normales en X ; alors par définition $(\partial_1|_X, \dots, \partial_n|_X)$ est une base orthonormée de $T_X M$: cela assure que $g_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu}$. Pour montrer que $g_{\mu\nu,\sigma}(X) = 0$, soit $t \mapsto \xi(t) \in \mathcal{U}$ une géodésique issue de X (i.e. $\xi(0) = X$). Si $\xi^1(t), \dots, \xi^n(t)$ sont les composantes de $\xi(t)$ – en ce sens que $\mathbf{x}(\xi(t)) = (\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ – alors $\xi(t) = \exp_X(ty)$ où $y = \dot{\xi}^\mu(0)\partial_\mu|_X$. Alors (Théorème 2.1) le chemin $t \mapsto (\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ (dans \mathbb{R}^n) est un germe de chemin en $\mathbf{x}(X)$ solution du système différentiel :

$$(23) \quad (\forall \sigma) \quad \ddot{\xi}^\sigma(t) + \dot{\xi}^\mu(t)\dot{\xi}^\nu(t)\mathbf{C}^\sigma_{\mu\nu}(\xi(t)) = 0$$

Les coordonnées \mathbf{x} étant supposée normales en X , d'après (21) l'identité $\exp_X(0v) = X$ implique d'une part que $\mathbf{x}(X) = (0, \dots, 0)$; mais d'autre part (21) entraîne aussi que

$$\exp_X(ty^\mu \partial_\mu|_X) = \xi(t) \iff (ty^1, \dots, ty^n) = \mathbf{x}(\xi(t))$$

Ainsi $ty^\mu = \xi^\mu(t)$, pour tout t et tout $1 \leq i \leq n$ et donc $(\dot{\xi}^\mu(t), \ddot{\xi}^\mu(t)) \equiv (y^\mu, 0)$. D'après (23) il vient $y^\mu y^\nu \mathbf{C}^\sigma_{\mu\nu}(\xi(t)) = 0$. La géodésique considérée en X étant arbitraire, nous obtenons (seulement avec $t = 0$) que $y^\mu y^\nu \mathbf{C}^\sigma_{\mu\nu}(X) = 0$, pour tout $(y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$: cela entraîne $\mathbf{C}^\sigma_{\mu\nu}(X) = 0$, pour tout triplet d'indices (σ, μ, ν) . Comme $\mathbf{C}_{\mu\nu,\sigma} = g_{\sigma\epsilon} \mathbf{C}^\epsilon_{\mu\nu}$ et que $g_{\mu\nu,\sigma} = \mathbf{C}_{\sigma\nu,\mu} + \mathbf{C}_{\mu\sigma,\nu}$ (c.f. Lemme 2.2), nous en déduisons que $g_{\mu\nu,\sigma}(X) = 0$. □

3. Du lemme de Gauss spectral à l'identité cyclique de Riemann

3.1. Notons $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$ où \mathbf{X} est la carte d'un système de coordonnées normales en un point $X = \mathbf{X}(0)$ de M . Pour tout $y = (y^1, \dots, y^n)$ et $z = (z^1, \dots, z^n)$ dans \mathbb{R}^n , nous

voulons préciser en quel sens $z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(y)$ (i.e. le carré de la norme du vecteur $z^\mu \partial_\mu|_{\mathbf{X}(y)}$ de $T_{\mathbf{X}(y)}M$) approxime le carré de la distance riemannienne $\rho_X(y, y+z) = d_R(\mathbf{X}(y), \mathbf{X}(y+z))$ séparant $\mathbf{X}(y)$ et $\mathbf{X}(y+z)$ dans M . Pour cela, nous allons utiliser le fait que si y et z sont assez petits, alors il existe une unique géodésique inertielle de vitesse unité, issue de $\mathbf{X}(y)$ et atteignant $\mathbf{X}(y+z)$ en parcourant la distance riemannienne $\rho_X(y, y+z)$.

Proposition 3.1. *Soit $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$, où \mathbf{X} est la carte d'un système de coordonnées normales en $X = \mathbf{X}(0)$ et soit $y \in \mathbb{R}^n$ fixé (et suffisamment petit); alors pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ avec $z \rightarrow 0$:*

$$(24) \quad \rho_X(y, y+z)^2 \sim z^\mu z^\mu \gamma_{\mu\nu}(y)$$

Preuve. Soit $y, z \in \mathbb{R}^n$ avec y fixé; nous supposons y suffisamment petit pour que, dans la limite où $z \rightarrow 0$, il existe une unique géodésique $t \mapsto \xi(t) = \mathbf{X}(\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ de vitesse unité et reliant $\mathbf{X}(y)$ à $\mathbf{X}(y+z)$ par un segment géodésique dont la longueur coïncide avec la distance riemannienne $r(z) := \rho_X(y, y+z)$ entre $\mathbf{X}(y)$ et $\mathbf{X}(y+z)$. Cette géodésique est déterminée par sa position initiale $\xi(0) = \mathbf{X}(y)$ et par le vecteur $v = v(z) := \dot{\xi}(0)$ t.q.

$$(25) \quad v^\mu v^\nu \gamma_{\mu\nu}(y) = 1$$

En particulier, nous avons $\xi(r) = \mathbf{X}(y+z)$. Le développement de Taylor de $\xi^\mu(t)$ donne alors $\xi^\mu(t) = y^\mu + tv^\mu + tA^\mu(z, t)$, où les fonctions $(t) \rightarrow A^\mu(z, t)$ sont continues sur un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, avec $A^\mu(z, 0) = 0$; or $\xi^\mu(r) = y^\mu + z^\mu$ et donc, pour $t = r$ nous avons $z^\mu = r(v^\mu + a^\mu)$ où $a^\mu = a^\mu(z) := A^\mu(z, r(z))$: par suite, en utilisant (25)

$$z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(y) = r^2(v^\mu v^\nu + v^\mu a^\nu + a^\mu v^\nu + a^\mu a^\nu) \gamma_{\mu\nu}(y) = r^2(1 + B)$$

où nous avons posé $B = B(z) := (2v^\mu + a^\mu)a^\nu \gamma_{\mu\nu}(y)$. D'une part, la fonction $z \mapsto B(z)$ est continue en $z = 0$ dans \mathbb{R}^n ; mais d'autre part, comme $r(z) = 0$ quand $z = 0$ et que $A^\mu(z, t) = 0$ quand $t = 0$, nous avons $a^\mu(z) = 0$ quand $z = 0$ et donc $B(0) = 0$. □

3.2. Le résultat suivant prolonge la Proposition 3.1 par le développement de $z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(y)$ suivant $(z, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans une précision en $\circ(|z|^2|y|^2)$ et en fonction du hessien métrique, dont nous avons déjà parlé : c'est un point clef qui nous permettra (avec la Proposition 3.1) de fournir une démonstration simple du Théorème A' (c.f. infra).

Proposition 3.2. *Soit $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$, où \mathbf{X} est la carte d'un système de coordonnées normales en $X = \mathbf{X}(0)$; si y, z sont deux vecteurs de \mathbb{R}^n (suffisamment petits) alors, pour $(y, z) \rightarrow (0, 0)$:*

$$(26) \quad z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(y) = |z|^2 + \frac{1}{2}h(z, z, y, y) + \circ(|z|^2|y|^2)$$

où le « hessien métrique » h est par définition la forme quadrilinéaire sur \mathbb{R}^n dont les composantes cartésiennes coïncident avec les symboles de Riemann, en ce sens que¹⁷

$$h_{\mu\nu\sigma\tau} = g_{\mu\nu, \sigma\tau}(X) = \gamma_{\mu\nu, \sigma\tau}(0)$$

17. Rappelons que nous notons $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ les n vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n , de sorte que les composantes cartésiennes de h sont par définition les $h_{\mu\nu\sigma\tau} = h(\mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu, \mathbf{e}_\sigma, \mathbf{e}_\tau)$. Rappelons aussi que nous notons $\gamma_{\nu\nu, \sigma} := g_{\mu\nu, \sigma} \circ \mathbf{X}$ et $\gamma_{\nu\nu, \sigma\tau} := g_{\mu\nu, \sigma\tau} \circ \mathbf{X}$.

Preuve. La carte \mathbf{X} étant associée à des coordonnées normales en $\mathbf{X}(0)$, nous savons (c.f. Proposition 2.4) que $\gamma_{\mu\nu}(0) = \delta_{\mu\nu}$ et que $\gamma_{\mu\nu,\sigma}(0) = 0$: par suite en écrivant le développement de Taylor de $\gamma_{\mu\nu}(y) := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}(y)$ en 0 à l'ordre 2, il existe une fonction $y \mapsto C_{\mu\nu}(y)$ qui est continue dans un voisinage de 0 avec ¹⁸ $C_{\mu\nu}(0) = 0$

$$\gamma_{\mu\nu}(y) = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}y^\sigma y^\tau \gamma_{\mu\nu,\sigma\tau}(0) + |y|^2 C_{\mu\nu}(y)$$

Ainsi, par définition du hessien métrique h , il vient

$$z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(y) = |z|^2 + \frac{1}{2}h(z, z, y, y) + |y|^2 (z^\mu z^\nu C_{\mu\nu}(y))$$

Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|z^\mu z^\nu C_{\mu\nu}(y)| \leq |z|^2 |C(y)|$, où $|C(y)|$ est la norme (de Frobenius par exemple ¹⁹) de la matrice $(\delta^{\mu\epsilon} C_{\epsilon\nu}(y))$. En posant $D(y, 0) := 0$ et $D(y, z) := z^\mu z^\nu C_{\mu\nu}(y)/|z|^2$, lorsque $z \neq 0$, nous définissons une fonction $D(y, z)$ qui est continue sur un voisinage de $(0, 0)$, nulle en ce point et t.q. $z^\mu z^\nu C_{\mu\nu}(y) = |z|^2 D(y, z)$. □

3.3. Nous considérons toujours que $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$, où \mathbf{X} est la carte associée à des coordonnées normales en $X = \mathbf{X}(0)$. Nous traduisons (26) en écrivant :

$$(27) \quad \varphi_y(z) = \varphi_0(z) + \psi(y, z) + o(|y|^2 |z|^2)$$

où pour tout y , l'application $z \mapsto \varphi_y(z) := z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(y)$ est une forme quadratique sur \mathbb{R}^n et où $(y, z) \mapsto \psi(y, z) := 1/2 z^\mu z^\nu y^\sigma y^\tau \gamma_{\mu\nu,\sigma\tau}(0)$ est la forme bi-quadratique associée à la forme quadrilinéaire $1/2h$. Les propriétés des coordonnées normales assurent d'une part que $\rho_X(0, z) = \varphi_0(z) = |z|$; d'autre part, pour y fixé, il est évident (définition d'une variété riemannienne) que φ_y est une forme quadratique définie positive. En revanche, la forme quadratique $\psi_y := \psi(y, \cdot)$ est nécessairement non définie. En effet, il découle directement de (27) que (a) : $y = 0 \implies \psi_y \equiv 0$; mais les coordonnées normales en un point étant des isométries radiales, nous avons aussi $\varphi_y(y) = \varphi_0(y)$ et donc, par nouvelle application de (27) il vient (b) : $y \neq 0 \implies \psi_y(y) = 0$. Afin de mieux comprendre l'approche riemannienne de la courbure, nous allons voir que pour tout y voisin de 0, la forme quadratique ψ_y est dégénérée et que son noyau contient toujours y : plus précisément, (b) doit être complétée par une implication plus forte, soit (c) : $y \neq 0 \implies y \in \text{Ker}(\psi_y)$. Si nous fixons $y \neq 0$, alors pour tout z l'identité (27) entraîne que $\varphi_y(\varepsilon z) = \varphi_0(\varepsilon z) + \psi_y(\varepsilon z) + o(\varepsilon^2)$, pour tout réel ε (assez petit) et donc $\varphi_y(z) - \varphi_0(z) - \psi_y(z) = o(1)$: ceci n'est possible que si $\psi_y = \varphi_y - \varphi_0$. Si nous notons Φ_y et Ψ_y les endomorphismes (symétriques) de \mathbb{R}^n associé respectivement à φ_y et ψ_y , alors $\Psi_y = \Phi_y - \Phi_0$: comme $\Phi_0(y) = y$ (Φ_0 est l'identité de \mathbb{R}^n) nous avons :

$$(28) \quad \Psi_y(y) = 0 \iff \Phi_y(y) = y$$

L'implication (c) est donc une forme équivalente du théorème (très important) suivant.

18. Nous utilisons les notations standards $\gamma_{\mu\nu,\sigma} := \partial\gamma_{\mu\nu}/\partial x^\sigma$ et $\gamma_{\mu\nu,\sigma\tau} := \partial^2\gamma_{\mu\nu}/\partial x^\sigma \partial x^\tau$.

19. La norme de Frobenius $|A|$ d'une matrice $A = (a^i_j)$ (supposée $n \times m$ par exemple) est définie comme la trace de la matrice A^*A ; elle correspond donc à la norme euclidienne standard sur \mathbb{R}^{nm} , mais n'est pas subordonnée à un couple de normes sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m ; elle vérifie cependant la sous-multiplicativité en ce sens que (lorsque le produit matriciel AB existe) $|AB| \leq |A||B|$. En particulier, si X et Y sont des matrices colonnes $n \times 1$ et si A est une matrice $n \times n$ alors $|X^*AY| \leq |X||A||Y|$.

Théorème 3.3. Soit $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ X$, où X la carte associée à des coordonnées normales en $X(0)$; pour $y \in \mathbb{R}^n$ fixé et suffisamment petit, si Φ_y désigne l'endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n associé à la forme quadratique $z \mapsto \varphi_y(z) = z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(y)$, alors :

$$(29) \quad \Phi_y(y) = y$$

Preuve heuristique. Le cas $y = 0$ étant immédiat, fixons $y \neq 0$ petit²⁰ et $\varepsilon > 0$ (supposé tendre vers 0). Premièrement, la carte X étant une isométrie radiale (issue de X) :

$$(30) \quad \varphi_y(\pm \varepsilon y) = |\varepsilon y|^2$$

Deuxièmement, par l'inégalité triangulaire majorante combinée au fait que $\rho_X(0, \cdot) = |\cdot|$

$$(31) \quad |y + z| = \rho_X(0, y + z) \leq \rho_X(0, y) + \rho_X(y, y + z) = |y| + \rho_X(y, y + z)$$

Si maintenant z est un vecteur de \mathbb{R}^n dans l'ensemble de niveau $\{\varphi_y(\cdot) = |\varepsilon y|^2\}$, alors (c.f. Proposition 3.1), nous savons que $\rho_X(y, y + z)^2 \sim \varphi_y(\varepsilon z) = |\varepsilon y|^2$ dans la limite où $\varepsilon \rightarrow 0$: pour la suite de l'argument heuristique, nous identifions $\rho_X(y, y + z)$ et $|\varepsilon y|$, de sorte que²¹ l'inéquation (31) devient (approximativement) $|y + z| \leq (1 + \varepsilon)|y|$. L'inégalité triangulaire minorante, nous donnant de même $|y + z| \geq (1 - \varepsilon)|y|$, nous obtenons :

$$(32) \quad \varphi_y(z) = |\varepsilon y|^2 \implies (1 - \varepsilon)|y| \leq |y + z| \leq (1 + \varepsilon)|y|$$

Comme φ_y est définies positives, $\{\varphi_y(\cdot) = |\varepsilon y|^2\}$ est un ellipsoïde de centre²² 0 : par le « théorème spectral » (30) et (32) entraînent que y est une des directions principales de φ_y (voir Fig. 2). De manière équivalente, il existe un réel λ t.q. $\Phi_y(y) = \lambda y$ et comme $|y|^2 = \varphi_y(y) = \langle y | \Phi_y(y) \rangle = \lambda |y|^2$ et que $y \neq 0$, nous obtenons $\lambda = 1$ et donc $\Phi_y(y) = y$. □

3.4. Il est possible de démontrer directement le Théorème A' (et donc le Théorème A) directement à partir du Théorème 3.3.

Preuve du Théorème A'. Soit $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ X$, où X est la carte associée à des coordonnées normales en $X = X(0)$ et soit $h \in \mathcal{Q}^+(\mathbb{R}^n)$ le hessien métrique associé. Pour $y \in \mathbb{R}^n$ fixé et suffisamment petit, Φ_y et Ψ_y sont les endomorphismes symétriques associées respectivement au forme quadratique φ_y et ψ_y , de sorte que $\langle u | \Phi_y(v) \rangle = u^\mu v^\nu \gamma_{\mu\nu}(0)$ et $\langle u | \Psi_y(v) \rangle = u^\mu v^\nu y^\sigma y^\tau \gamma_{\mu\nu, \sigma\tau}(0) = h(u, v, y, y)$, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$. Le Théorème 3.3 affirme que $\Phi_y(y) = y$, ce qui d'après (28) est équivalent à $\Psi_y(y) = 0$; de la relation entre h et Ψ_y , nous tirons que $0 = \langle z | \Psi_y(y) \rangle = h(z, y, y, y)$. □

20. On pourra supposer par exemple que $|y|$ est majorée par le rayon d'injectivité de l'exponentielle de Riemann en $X(0)$.

21. C'est le point de l'heuristique qu'il est difficile de rendre rigoureux, sans rentrer dans des calculs d'approximation assez lourds.

22. Notons qu'ici l'heuristique tient au fait que (dans la limite où $\varepsilon \rightarrow 0$) l'ellipsoïde $\{\varphi_y(\cdot) = |\varepsilon y|^2\}$ est une approximation $\{\rho_X(y, y + \cdot) = |\varepsilon y|\}$.

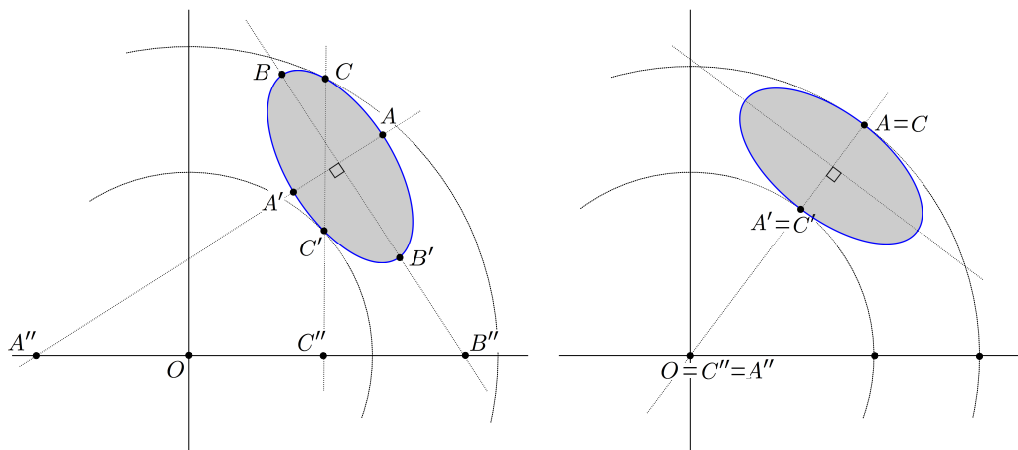


FIGURE 2. Soit \mathcal{E} une ellipse du plan (affine) euclidien incluse dans l'anneau déterminé par deux cercles de centre commun O et de rayon différent. Nous notons A et A' (resp. B et B') les deux points de \mathcal{E} que déterminent son petit (resp. grand) axe. Si nous supposons que \mathcal{E} est tangente en chacun des deux cercles et si C et C' sont les deux points de tangence, alors la droite (CC') est parallèle au petit axe (AA') ssi A et A' sont alignés avec le centre O des deux cercles et dans ce cas $\{C, C'\} = \{A, A'\}$. De même (CC') est parallèle au grand axe (BB') ssi B, B' et O sont alignés et dans ce cas $\{C, C'\} = \{B, B'\}$.

3.5. L'argument heuristique donné au § 3.3 pour justifier le Théorème 3.3 est basé sur les symétries des ellipsoïdes (et donc sur le « *théorème spectral* ») : il se trouve que l'équation $\Phi_y(y) = y$ peut être utilisée pour démontrer l'identité cyclique de Riemann du Théorème A (c.f. § 3.6 infra) : nous allons pour cela réécrire le Théorème 3.3 (et le démontrer rigoureusement) sous une forme équivalente que nous appelons le « *lemme de Gauss spectral* ». Notons que sous l'aspect technique de son énoncé donné ci-dessous, se cache un résultat de la géométrie riemannienne très important et très intuitif – le « *lemme de Gauss géométrique* » – affirmant que les géodésiques issues d'un point sont orthogonales (pour la métrique riemannienne) aux hypersphères centrées en ce point. (Dans l'Appendice A, nous donnons une analyse détaillée de l'équivalence entre le lemme de Gauss géométrique et le lemme de Gauss spectral.)

Théorème 3.4 (Lemme de Gauss spectral). Soit X un point d'une variété riemannienne (M, g) de dimension n et soient \mathbf{X} la carte associée à un système de coordonnées normales en X ; si nous notons $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$, alors pour tout $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$ (petit) :

$$(33) \quad (\forall \mu) \quad \gamma_{\mu\nu}(y)y^\nu = y^\nu \delta_{\mu\nu}$$

Preuve du Théorème 3.4 (Spivak in [Spi99]). Soit $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$, où \mathbf{X} est la carte associée à des coordonnées x normales en X : nous allons montrer que $y^\mu \gamma_{\mu\nu}(y) = y_\nu$ (avec $y_\nu := y^\epsilon \delta_{\epsilon\nu}$). Pour voir cela, considérons que $t \mapsto \xi(t)$ une géodésique (inertielle) issue de X ; dans le système de coordonnées x , les composantes de ξ , i.e. les $\xi^i(t)$ t.q. $\xi(t) = \mathbf{X}(\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$, permettent d'écrire les équations géodésiques soient :

$$(\forall \sigma) \quad \ddot{\xi}^\sigma(t) + \dot{\xi}^\mu(t)\dot{\xi}^\nu(t)\mathbf{C}^\sigma_{\mu\nu}(\xi(t)) \equiv 0$$

Or, le système x étant supposé normal en X , les composantes de ξ sont les applications linéaires $t \mapsto \xi^\mu(t) = ty^\mu$, où $y^\mu = \dot{\xi}^\mu(0)$. Ainsi, pour $t = 1$ et $1 \leq \sigma \leq n$:

$$0 = y^\mu y^\nu \mathbf{C}^\sigma_{\mu\nu}(\xi(tx)) = y^\mu y^\nu \mathbf{C}_{\mu\nu,\sigma}(\xi(tx))$$

L'expression des symboles de Christoffel nous permet d'obtenir l'identité différentielle :

$$(34) \quad 0 = y^\mu y^\nu \left(\frac{1}{2} \gamma_{\sigma\nu,\mu}(y) + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\sigma,\nu}(y) - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu,\sigma}(y) \right) = y^\mu y^\nu \left(\gamma_{\mu\sigma,\nu}(y) - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu,\sigma}(y) \right)$$

Soit $S_\nu(y) := y^\mu \gamma_{\mu\nu}(y)$: dans la suite nous noterons $S_{\nu,\epsilon}(y)$ la dérivée partielle de $S_\nu(y)$ par rapport à y^ϵ . Alors, en dérivant partiellement par rapport à y^σ , il vient

$$S_{\nu,\sigma}(y) = \delta_{\mu\sigma} \gamma_{\mu\nu}(y) + y^\mu \gamma_{\mu\nu,\sigma}(y) \quad \text{i.e.} \quad y^\mu \gamma_{\mu\nu,\sigma}(y) = S_{\nu,\sigma}(y) - \gamma_{\sigma\nu}(y)$$

Nous pouvons alors transformer l'équation (34) comme suit

$$\begin{aligned} 0 = y^\nu y^\mu \gamma_{\mu\sigma,\nu}(y) - \frac{1}{2} y^\mu y^\nu \gamma_{\mu\nu,\sigma}(y) &= y^\nu (S_{\sigma,\nu}(y) - \gamma_{\nu\sigma}(y)) - \frac{1}{2} y^\mu (S_{\nu,\sigma}(y) - \gamma_{\sigma\mu}(y)) \\ (y^\epsilon \gamma_{\sigma\epsilon}(y) = S_\sigma(y)) &= y^\nu S_{\sigma,\nu}(y) - S_\sigma(y) - \frac{1}{2} (y^\mu S_{\nu,\sigma}(y) - S_\sigma(y)) \\ &= y^\nu S_{\sigma,\nu}(y) - \frac{1}{2} (y^\mu S_{\nu,\sigma}(y) + S_\sigma(y)) \\ &= y^\nu S_{\sigma,\nu}(y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^\sigma} (y^\mu S_\mu(y)) \end{aligned}$$

Or $y^\mu S_\mu(y) = y^\mu y_\mu$ et par suite (avec, par un abus licite $\partial(y^\mu y_\mu)/\partial y^\sigma = 2y_\sigma$)

$$0 = y^\nu S_{\sigma,\nu}(y) - y_\sigma = y^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu} (S_\sigma(y) - y_\sigma)$$

Finalement, $S_\sigma(y) - y_\sigma = S_\sigma(0) = 0$ pour tout y dans un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n . □

3.6. Nous donnons maintenant une première preuve de l'identité cyclique de Riemann tirée d'un « calcul touffu »²³ de Spivak (c.f. [Spi99, Chap 4. Prop. 4]).

Preuve du Théorème A. Soit X la carte associée à un système de coordonnées x normal en X et $y = (y^1, \dots, y^n)$ (petit) arbitrairement pris dans \mathbb{R}^n . Pour σ fixé, le lemme de Gauss spectral en (33) entraîne $y^\mu \gamma_{\mu\sigma}(y) = y^\mu \delta_{\mu\sigma}$; soit $1 \leq \nu \leq n$ et dérivons une première fois par rapport à y^ν : nous obtenons $\gamma_{\nu\sigma}(y) + y^\mu \gamma_{\mu\sigma,\nu}(y) = \delta_{\nu\sigma}$, soit encore $y^\mu \gamma_{\mu\sigma,\nu}(y) = \delta_{\nu\sigma} - \gamma_{\nu\sigma}(y)$. Si nous multiplions par y^ν alors, en appliquant (une nouvelle fois) (33), il vient : $y^\nu y^\mu \gamma_{\mu\sigma,\nu}(y) = y^\nu \delta_{\nu\sigma} - y^\nu \gamma_{\nu\sigma}(y) = 0$. Par suite, pour tout t nous avons :

$$(35) \quad t^2 y^\nu y^\mu \gamma_{\mu\sigma,\nu}(ty) = 0$$

en dérivant cette dernière identité par rapport à t il vient :

$$0 = 2ty^\nu y^\mu \gamma_{\mu\sigma,\nu}(ty) + t^2 y^\nu y^\mu y^\tau \gamma_{\mu\sigma,\nu\tau}(ty) = t^2 y^\nu y^\mu y^\tau \gamma_{\mu\sigma,\nu\tau}(ty)$$

où la dernière égalité est obtenue grâce à (35). Finalement, $y^\nu y^\mu y^\tau \gamma_{\mu\sigma,\nu\tau}(ty) = 0$ et pour $t = 0$ il vient $0 = y^\nu y^\mu y^\tau \gamma_{\mu\sigma,\nu\tau}(0)$ (nous avons utilisé la symétrie $\gamma_{\mu\sigma,\nu\tau}(0) = \gamma_{\sigma\mu,\nu\tau}(0)$). En permutant les indices, il vient :

$$(36) \quad 0 = y^\nu y^\mu y^\tau \left(\gamma_{\sigma\mu,\nu\tau}(0) + \gamma_{\sigma\nu,\tau\mu}(0) + \gamma_{\sigma\tau,\mu\nu}(0) \right)$$

23. « hairy calculation ».

ce qui peut être vu comme la nullité d'un produit scalaire dans \mathbb{R}^n : comme $y = (y^1, \dots, y^n)$ est arbitraire dans \mathbb{R}^n , nous en déduisons l'identité cyclique de Riemann²⁴.

□

4. Lemme de Milnor

4.1. Nous revenons ici sur le Lemme de Milnor concernant les positions relatives des sous-espaces vectoriels $\mathcal{Q}_B^\pm(E)$ et $\mathcal{Q}_C^\pm(E)$ du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{Q}^\pm(E)$ des formes quadrilinéaires sur le \mathbb{R} -espace vectoriel E qui satisfont les symétries/antisymétries 1 et 2. (Le Lemme de Milnor proprement dit concerne l'espace $\mathcal{Q}^-(E)$: c.f. [Mil63, Lemma 9.3].)

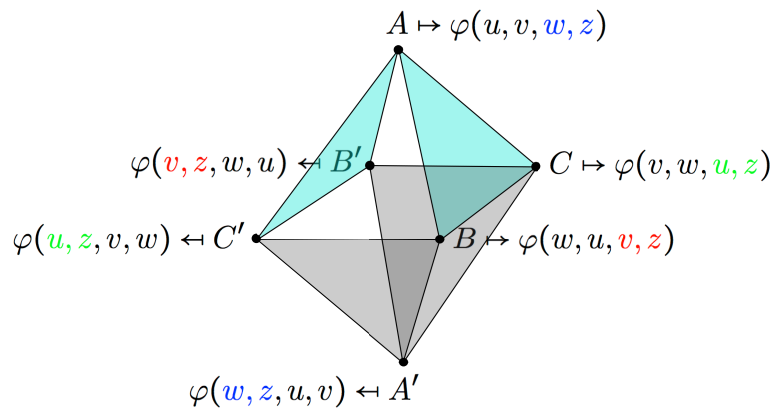


FIGURE 3. Diagramme de Milnor.

Lemme 4.1. Dans $\mathcal{Q}^\epsilon(E)$ (avec $\epsilon = \pm 1$) nous avons

$$(SC) \implies (SB)$$

Preuve (i) – (D’après Milnor). Soit O le point de \mathbb{R}^3 de coordonnées $(0, 0, 0)$; pour tout point A de \mathbb{R}^3 , nous notons A' l'image de A dans la symétrie centrale de centre O (avec la convention que $A'' = A$). Nous considérons alors que A, B, C, A', B', C' sont les sommets d'un octaèdre (régulier) de \mathbb{R}^3 de centre O et que A, B, C sont les trois sommets d'une même face de l'octaèdre. Étant donné $U \in \mathcal{Q}_C^\epsilon(E)$ pour $\epsilon = \pm 1$, chaque sommet – disons H – de l'octaèdre est associé au réel $\rho(H)$ correspondant à la valeur de U sur une permutation (a, b, c, d) du quadruplet (u, v, w, z) et déterminée par les deux conditions :

$$(C1) : (\rho(A), \rho(B), \rho(C)) = (U(u, v, w, z), U(u, w, z, v), U(u, z, v, w))$$

$$(C2) : \rho(H) = U(u, v, w, z) \iff \rho(H') = U(w, z, u, v)$$

24. Le membre droit de (36) représente un produit scalaire dans \mathbb{R}^n , où les coordonnées de cartésiennes sont indexées par les triplets (μ, ν, τ) , pour $1 \leq \mu, \nu, \tau \leq n$. Si nous notons $\gamma_{\sigma\{\mu, \nu, \tau\}}$ la somme de Jacobi associée à $\gamma_{\sigma\mu, \nu, \tau}(0)$ sur les indices μ, ν, τ , alors il découle de (36) et du fait que (y^1, \dots, y^n) est arbitraire dans \mathbb{R}^n , que $\xi^{\mu\nu\tau} \gamma_{\sigma\mu, \nu, \tau}(0) = 0$ pour tout $(\xi^{\mu\nu\tau}) \in \mathbb{R}^n$: cela entraîne que tous les $\gamma_{\sigma\mu, \nu, \tau}(0)$ sont nuls.

(voir Figure 3). D'une part, l'hypothèse (SC) nous donne $\rho(A) + \rho(B) + \rho(C) = 0$; mais d'autre part d'après (S1 $^\epsilon$) et (S2 $^\epsilon$), il vient

$$\begin{aligned} \rho(A) + \rho(B') + \rho(C') &= U(u, v, w, z) + U(z, v, u, w) + U(v, w, u, z,) \\ &= \epsilon^2 U(v, u, z, w) + \epsilon^2 U(v, z, w, u) + U(v, w, u, z,) \\ &= U(v, u, z, w) + U(v, z, w, u) + U(v, w, u, z,) \end{aligned}$$

et par suite l'hypothèse (SC) assure aussi que $\rho(A) + \rho(B') + \rho(C') = 0$ de sorte que

$$(37) \quad 2\rho(A) + \rho(B) + \rho(C) + \rho(B') + \rho(C') = 0$$

De même $\rho(A') + \rho(B) + \rho(C) = \rho(A') + \rho(B') + \rho(C') = 0$, ce qui donne

$$(38) \quad 2\rho(A') + \rho(B) + \rho(C) + \rho(B') + \rho(C') = 0$$

En retranchant (37) et (38) il vient $\rho(A) = \rho(A')$ et donc l'identité (SB) est satisfaite. □

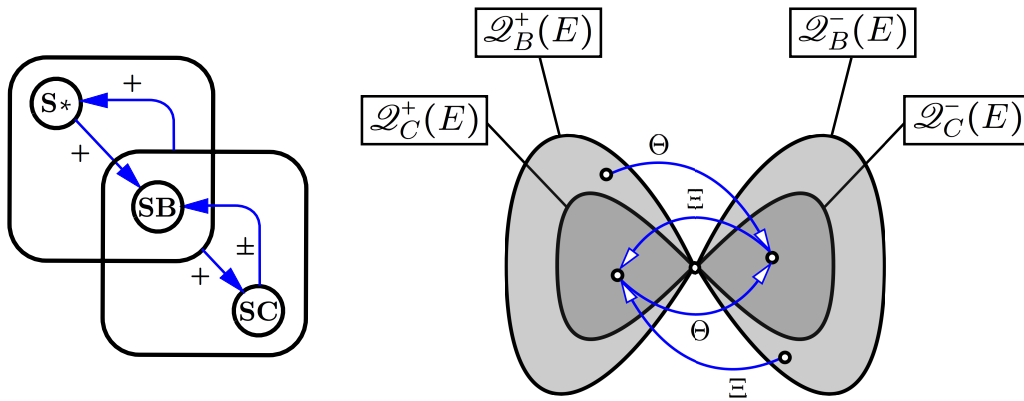


FIGURE 4. (gauche) : Diagrammes d'implications reliant l'identité de Moore (S*) aux identités de bisymétrie (SB) et de cyclicité (SC); les implications concernant (S*) ne sont valables que dans $\mathcal{Q}^+(E)$. L'implication (SC) \implies (SB) signifie l'inclusion $\mathcal{Q}_C^\epsilon(E) \subset \mathcal{Q}_B^\epsilon(E)$ (pour $\epsilon = \pm 1$). (droite) : Représentation des positions relatives des espaces vectoriel $\mathcal{Q}_B^\pm(E)$ et $\mathcal{Q}_C^\pm(E)$. L'application linéaire $\Theta : \mathcal{Q}_B^+(E) \rightarrow \mathcal{Q}_B^-(E)$ est définie de sorte que $V = \Theta(U)$ ssi

$$V(y, u, x, u) = U(y, x, u, v) - U(y, u, v, x)$$

L'images de Θ coincide avec $\mathcal{Q}_C^-(E)$. De même $\Xi : \mathcal{Q}_B^-(E) \rightarrow \mathcal{Q}_B^+(E)$ est définie de sorte que $U = \Theta(V)$ ssi

$$U(y, u, x, u) = \frac{1}{3}V(y, x, u, v) + \frac{1}{3}(y, u, v, x)$$

L'images de Ξ coincide avec $\mathcal{Q}_C^+(E)$. La restriction bilatérale $\Theta : \mathcal{Q}_C^+(E) \rightarrow \mathcal{Q}_C^-(E)$ est un isomorphisme dont l'isomorphisme réciproque est $\Xi : \mathcal{Q}_C^-(E) \rightarrow \mathcal{Q}_C^+(E)$. L'importance toute particulière de l'identité de Moore est due au fait que pour $U \in \mathcal{Q}^+(E)$ on a $U \in \mathcal{Q}_C^+(E)$ ssi $U(y, y, y, x) \equiv 0$.

4.2. Le Lemme 4.1 à des conséquences importantes qui peuvent être établies de manière très simple. Ces conséquences vont nous permettre de mieux comprendre les relations (12) et (13) qui existent entre le tenseur hessien métrique H et le tenseur de Riemann-Christoffel R . D'abord, remarquons si $U \in \mathcal{Q}_B^+(E)$, alors la forme quadrilinéaire V t.q.

$$(39) \quad V(y, v, x, u) = U(y, x, u, v) - U(y, u, v, x) =: \Theta(U)$$

appartient à $\mathcal{Q}_B^-(E)$. Il suffit de vérifier l'antisymétrie 1 de V ainsi que la bisymétrie. Pour l'antisymétrie 1 nous avons (grâce à la bisymétrie et la symétrie 2 de U) :

$$\begin{aligned} V(v, y, x, u) &= U(v, x, y, u) - U(v, u, x, y) \\ &= -(U(y, x, v, u) - U(y, u, v, x)) = -V(y, v, x, u) \end{aligned}$$

Pour la bisymétrie de V , nous écrivons (avec les symétries 1 et 2 et la bisymétrie de U) :

$$\begin{aligned} V(x, u, y, v) &= U(x, y, u, v) - U(x, v, u, y) \\ &= U(y, x, v, u) - U(y, u, v, x) = V(y, v, x, u) \end{aligned}$$

Ainsi Θ définie en (39) réalise une application linéaire de $\mathcal{Q}_B^+(E)$ and $\mathcal{Q}_B^-(E)$. Ici, il se produit un « *petit miracle* » : $V = \Theta(U)$ vérifie aussi la cyclicité (SC). En effet, grâce aux symétries 1 et 2 de U nous avons

$$\begin{aligned} V(y, x, u, v) + V(y, u, v, x) &= (U(y, u, x, v) - U(y, v, x, u)) + (U(y, v, u, x) - U(y, x, u, v)) \\ &= U(y, u, x, v) - U(y, x, u, v) \\ &= -V(y, v, x, u) \end{aligned}$$

d'où nous déduisons que V vérifie bien (SC). En conclusion $\Theta : \mathcal{Q}_B^+(E) \rightarrow \mathcal{Q}_B^-(E)$ est une application linéaire dont l'image $\Theta(\mathcal{Q}_B^+(E))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{Q}_C^-(E)$. Or, d'après le lemme de Milnor (c.f. Lemme 4.1) il se trouve que $\mathcal{Q}_C^\epsilon(E)$ est une sous-espace vectoriel de $\mathcal{Q}_B^\epsilon(E)$, pour $\epsilon = \pm 1$: nous allons montrer que $\Theta(\mathcal{Q}_B^+(E)) = \mathcal{Q}_C^-(E)$ et que la restriction bilatérale $\Theta : \mathcal{Q}_C^+(E) \rightarrow \mathcal{Q}_C^-(E)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel. En effet, si nous supposons que $V = \Theta(U)$ avec $U \in \mathcal{Q}_C^+(E)$, alors

$$\begin{aligned} V(y, x, v, u) + V(y, u, v, x) &= U(y, v, x, u) - U(y, u, x, v) + U(y, v, u, x) - U(y, x, u, v) \\ &= 2U(y, v, x, u) - U(y, u, x, v) + (U(y, u, v, x) + U(y, v, x, u)) \\ &= 3U(y, v, x, u) \end{aligned}$$

Par suite, si pour toute forme quadratique V sur E , nous posons $U = \Xi(V)$ ssi

$$(40) \quad U(y, v, x, u) = \frac{1}{3}V(y, x, v, u) + \frac{1}{3}V(y, u, v, x)$$

alors $V = \Theta(U)$ entraîne $U = \Xi(V)$ dès que $U \in \mathcal{Q}_C^+(E)$. Or, par des calculs analogues à ceux réalisés pour Θ , il est facile de vérifier que Ξ réalise une application linéaire de $\mathcal{Q}_B^-(E)$ dans $\mathcal{Q}_B^+(E)$ dont l'image est $\mathcal{Q}_C^+(E)$. Les restrictions bilatérales $\Theta : \mathcal{Q}_C^+(E) \rightarrow \mathcal{Q}_C^-(E)$ et $\Xi : \mathcal{Q}_C^-(E) \rightarrow \mathcal{Q}_C^+(E)$ de Θ et Ξ définies respectivement en (40) et (39) sont donc bien des isomorphismes qui sont inverses l'un de l'autre (voir Fig. 4). La proposition suivante résume les résultats établis dans ce paragraphe.

Proposition 4.2. Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n (finie) et $\Theta : \mathcal{Q}^+(E) \rightarrow \mathcal{Q}^-(E)$ et $\Xi : \mathcal{Q}^-(E) \rightarrow \mathcal{Q}^+(E)$ les applications linéaires t.q.

$$\begin{aligned} V = \Theta(U) &\iff \forall u, v, w, z \in E, \quad V(u, v, w, z) = U(u, w, v, z) - U(u, z, v, w) \\ U = \Xi(V) &\iff \forall u, v, w, z \in E, \quad U(u, v, w, z) = \frac{1}{3}V(u, w, v, z) + \frac{1}{3}V(u, z, v, w) \end{aligned}$$

Alors $\Theta(\mathcal{Q}_B^+(E)) = \mathcal{Q}_C^-(E)$ et $\Xi(\mathcal{Q}_B^-(E)) = \mathcal{Q}_C^+(E)$; de plus

$$\forall (U, V) \in \mathcal{Q}_C^+(E) \times \mathcal{Q}_C^-(E), \quad V = \Theta(U) \iff U = \Xi(V)$$

En d'autres termes les restrictions bilatérales $\Theta : \mathcal{Q}_C^+(E) \rightarrow \mathcal{Q}_C^-(E)$ et $\Xi : \mathcal{Q}_C^-(E) \rightarrow \mathcal{Q}_C^+(E)$ sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

4.3. Le calcul matriciel, utilisé en algèbre linéaire se généralise au cas multilinéaire et plus généralement au calcul tensoriel sur les variétés : on parle de « calcul en composantes ». Pour fixer les idées, considérons l'espace vectoriel $\mathcal{Q}(E)$ des formes quadrilinéaires sur le \mathbb{R} -espace vectoriel E (supposé de dimension n); le calcul en composantes consiste alors à fixer une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E , ainsi que la base $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ de l'espace dual E^* constituée des formes coordonnées associées au ε_i (i.e. $\varepsilon^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$). Tout $U \in \mathcal{Q}(E)$ est définie par ses n^4 composantes $U_{\mu\nu\sigma\tau}$ de sorte que²⁵ $U = U_{\mu\nu\sigma\tau}\varepsilon^\mu \otimes \varepsilon^\nu \otimes \varepsilon^\sigma \otimes \varepsilon^\tau$. Cette identité traduit le fait que les $\varepsilon^\mu \otimes \varepsilon^\nu \otimes \varepsilon^\sigma \otimes \varepsilon^\tau$ forment une base de l'espace $\mathcal{Q}(E)$ qui est donc un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n^4 : ainsi les symétries possibles de U se traduisent de manière équivalente par des relations sur les composantes (par exemple, la bi-symétrie de U s'écrit $U_{\mu\nu\sigma\tau} = U_{\tau\sigma\mu\nu}$: la traduction en composantes des autres symétries est un exercice simple laissé au soin du lecteur). Nous avons déjà vu²⁶ que Θ défini par (39) envoie $\mathcal{Q}_C^+(E)$ sur $\mathcal{Q}_C^-(E)$ de manière bijective et que l'isomorphisme inverse est l'application $\Xi : \mathcal{Q}_C^-(E) \rightarrow \mathcal{Q}_C^+(E)$ définie en (40). Nous allons retrouver l'expression de Ξ par un calcul en composante qui ne présuppose pas le résultat. Soit $V = \Theta(U)$ pour $U \in \mathcal{Q}_C^+(E)$, ce qui signifie que $V_{\mu\nu\sigma\tau} = U_{\mu\sigma\nu\tau} - U_{\mu\tau\nu\sigma}$. Or, la cyclicité et la symétrie 2 de U assure que $U_{\mu\tau\nu\sigma} = -U_{\mu\nu\sigma\tau} - U_{\mu\sigma\tau\nu}$ et donc $V_{\mu\nu\sigma\tau} = U_{\mu\nu\sigma\tau} + 2U_{\mu\sigma\nu\tau}$. Cela se traduit sous deux formes matricielles équivalentes, soient :

$$(41) \quad \begin{pmatrix} V_{\mu\nu\sigma\tau} \\ V_{\mu\sigma\nu\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\mu\nu\sigma\tau} \\ U_{\mu\sigma\nu\tau} \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} U_{\mu\nu\sigma\tau} \\ U_{\mu\sigma\nu\tau} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\mu\nu\sigma\tau} \\ V_{\mu\sigma\nu\tau} \end{pmatrix}$$

De la deuxième relation matricielle, nous tirons que

$$U_{\mu\nu\sigma\tau} = \frac{1}{3}(2V_{\mu\sigma\nu\tau} - V_{\mu\nu\sigma\tau}) = \frac{1}{3}(2V_{\mu\sigma\nu\tau} + V_{\mu\sigma\tau\nu} + V_{\mu\tau\nu\sigma}) = \frac{1}{3}(V_{\mu\sigma\nu\tau} + V_{\mu\tau\nu\sigma})$$

qui n'est autre qu'une version de (40) en composantes.

25. Nous reviendrons sur le calcul tensoriel; ici nous n'avons pas besoin de toute la théorie : disons que si U (resp. V) est une forme p -linéaire (resp. q -linéaire) sur E alors $U \otimes V$ est la forme $p + q$ -linéaire t.q.

$$U \otimes V(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) = U(u_1, \dots, u_p)V(v_1, \dots, v_q)$$

Il est évident que le produit tensoriel est non commutatif.

26. Le raisonnement écrit dans le cas de \mathbb{R}^n reste valable dans le cas d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , sans difficultés supplémentaires.

4.4. Soit x un système de coordonnées normales en un point X de M ; alors (c.f. Théorème C) les x -composantes du tenseur hessien métrique H pris au point X coïncide avec les symboles de Riemann, ce qui s'écrit $H_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X)$. Par suite, (c.f. Théorème A) la forme quadrilinéaire $H|_X$ appartient à $\mathcal{Q}_C^+(T_X M)$. Or (c.f. Définition B), les x -composantes du tenseur de Riemann-Christoffel R sont définies à partir des x composantes du tenseur hessien métrique H de sorte que $R_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = H_{\mu\sigma\nu\tau}(X) - H_{\mu\tau\nu\sigma}(X)$. Cela entraîne par une première application de la Proposition 4.2 que la forme quadrilinéaire $R|_X$ appartient à $\mathcal{Q}_C^-(T_X M)$ et par une deuxième application de cette même proposition, il vient :

$$(42) \quad H_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = \frac{1}{3}R_{\mu\sigma\nu\tau}(X) + \frac{1}{3}R_{\mu\tau\nu\sigma}(X)$$

Proposition 4.3 (Formule de Riemann). *Si $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ X$, où X est la carte associée à un système de coordonnées normales en X alors, pour y sur un voisinage de 0 (dans \mathbb{R}^n) :*

$$(43) \quad \gamma_{\mu\nu}(y) = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{3}y^\sigma y^\tau R_{\mu\sigma\nu\tau}(X) + o(|y|^2)$$

Preuve. Du fait que $g_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu}$ et que $g_{\mu\nu,\sigma}(X) = 0$ (c.f. Proposition 2.4), le développement de Taylor de $\gamma_{\mu\nu}(y)$ au seconde ordre en y s'écrit

$$(44) \quad \gamma_{\mu\nu}(y) = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}y^\sigma y^\tau g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) + o(|y|^2)$$

Or (c.f. Théorème C) les composantes $H_{\mu\nu\sigma\tau}(X)$ du tenseur hessien métrique coïncident avec les symboles de Riemann $g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X)$: par suite, avec (42), le développement (44) devient

$$\gamma_{\mu\nu}(y) = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}y^\sigma y^\tau \left(\frac{1}{3}R_{\mu\sigma\nu\tau}(X) + \frac{1}{3}R_{\mu\tau\nu\sigma}(X) \right) + o(|y|^2)$$

La formule de Riemann en (43) s'obtient en regroupant les deux somme identiques. □

5. Lemme de Moore

5.1. Le lemme de Milnor affirme que (pour $\epsilon = \pm 1$) $\mathcal{Q}_C^\epsilon(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{Q}_B^\epsilon(E)$. Quand $\epsilon = +1$, nous dirons que $U \in \mathcal{Q}^+(E)$ satisfait l'**identité de Moore**, ssi :

$$(S^*) \quad U(y, y, y, x) = 0$$

(Pour la différence entre (S*) et (S**) voir Proposition 5.2 infra.) La proposition suivante, complète le lemme de Milnor.

Lemme 5.1 (lemme de Moore). *Dans $\mathcal{Q}^+(E)$ nous avons*

$$\begin{array}{lll} (i) & : & (\mathbf{SC}) \ \& \ (\mathbf{SB}) \implies (\mathbf{S}^*) \\ (ii) & : & (\mathbf{S}^*) \implies (\mathbf{SB}) \\ (iii) & : & (\mathbf{S}^*) \implies (\mathbf{SC}) \end{array}$$

Preuve – (D'après Moore [Moo09]). (i) : Si $U \in \mathcal{Q}^+(E)$ vérifie (SC) et (SB), alors

$$0 = U(y, y, y, x) + U(y, y, x, y) + U(y, x, y, y) = 3U(y, y, y, x)$$

et donc U satisfait (S*).

(ii) : Soient $U \in \mathcal{Q}^+(E)$ vérifiant (\mathbf{S}^*) et u et v deux vecteurs arbitrairement fixés de E ; alors d'après (\mathbf{S}^*) nous avons l'identité polynomiale de $\mathbb{R}[X]$

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 := U(u + Xv, u + Xv, u + Xv, u - Xv) \equiv 0$$

Le coefficient a_2 nous intéresse tout particulièrement : partant de la définition de P en fonction de U , u et v , nous pouvons développer l'expression de a_2 puis simplifier grâce aux symétries 1 et 2 de U , de sorte que :

$$\begin{aligned} a_2 &= -U(u, u, v, v) - U(u, v, u, v) + U(u, v, v, u) \\ &\quad + U(v, v, u, u) + U(v, u, v, u) - U(v, u, u, v) = -U(u, u, v, v) + U(v, v, u, u) \end{aligned}$$

Le fait $P \equiv 0$ nous donne en particulier $a_2 = 0$, soit encore

$$(45) \quad U(u, u, v, v) = U(v, v, u, u)$$

La bisymétrie $U(u, v, w, z) = U(w, z, u, v)$ s'obtient à partir de (45) par polarisation. D'une part, pour la forme quadratique $u \mapsto U(u, u, w, w)$ nous avons

$$U(u, v, w, w) = \frac{1}{2} \left(U(u + v, u + v, w, w) - U(u, u, w, w) - U(v, v, w, w) \right)$$

ce qui entraîne que $U(u, v, w, w) = U(w, w, u, v)$; mais d'autre part si nous considérons la forme quadratique $w \mapsto U(u, v, w, w)$

$$U(u, v, w, z) = \frac{1}{2} \left(U(u, v, w + z, w + z) - U(u, v, w, w) - U(u, v, z, z) \right) = U(w, z, u, v)$$

(utilisant la première et la deuxième symétrie).

(iii) : Soit U dans $\mathcal{Q}^+(E)$ vérifiant (\mathbf{S}^*) – et donc (\mathbf{SB}) par d'après (ii) – et soient v_1, v_2, v_3, v_4 quatre vecteurs de E : si nous posons $w(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1v_1 + X_2v_2 + X_3v_3 + X_4v_4$, alors nous savons d'après les hypothèses faites sur U , que $U(w, w, w, w)$ est le polynôme nul (sur \mathbb{R}) d'indéterminées X_1, X_2, X_3, X_4 ; en particulier, le coefficient de $X_1X_2X_3X_4$ de ce polynôme est nul, i.e.

$$(46) \quad \sum_{\sigma} U[\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4)] = 0$$

où σ décrit l'ensemble des permutations de $\{1, 2, 3, 4\}$ et $U[ijkl] := U(v_i, v_j, v_k, v_l)$. Notons $U[i\{jkl\}]$ la somme de Jacobi²⁷ sur les trois derniers indices. Alors, la somme des 24 termes de (46) peut se réécrire sous la forme

$$(47) \quad \left(U[1\{234\}] + U[1\{243\}] \right) + \left(U[2\{134\}] + U[2\{143\}] \right) \\ + \left(U[3\{124\}] + U[3\{142\}] \right) + \left(U[4\{123\}] + U[4\{132\}] \right) = 0$$

Or par la symétrie 2 de U nous avons²⁸ $U[1\{234\}] = U[1\{243\}]$, $U[2\{134\}] = U[2\{143\}]$, $U[3\{124\}] = U[3\{142\}]$ et $U[4\{123\}] = U[4\{132\}]$ ce qui nous permet de réduire (48) à

$$(48) \quad U[1\{234\}] + U[2\{134\}] + U[3\{124\}] + U[4\{123\}] = 0$$

Enfin en utilisant (\mathbf{S}_{\pm}) et (\mathbf{SB}) il vient $U[1\{234\}] = U[2\{134\}] = U[3\{124\}] = U[4\{123\}]$ et par suite (48) donne directement $U[1\{234\}] = 0$.

□

27. Par définition de la somme de Jacobi $U[i\{jkl\}] = U[ijkl] + U[iklj] + U[iljk]$.

28. Par exemple $U[1\{234\}] = U[1234] + U[1342] + U[1423] = U[1243] + U[1324] + U[1432] = U[1\{243\}]$ et de même avec $U[2\{134\}]$, $U[3\{124\}]$ et $U[4\{123\}]$.

Dans l'introduction nous avons utilisé une autre définition de l'identité de Moore (adaptée au Théorème A'), en disant que $U \in \mathcal{Q}^+(E)$ satisfait (S^{**}) ssi $U(x, y, y, y) = 0$. La proposition suivante montre que (S^*) et (S^{**}) sont équivalentes dans $\mathcal{Q}^+(E)$.

Proposition 5.2. *Dans $\mathcal{Q}^+(E)$ nous avons*

$$(S^*) \iff (SC) \iff (S^{**})$$

5.2. Dans ce paragraphe, nous démontrons le Théorème B : l'argument est basé sur le développement au premier ordre des symboles de Christoffel dans le voisinage d'un point X , lorsque les coordonnées considérées sont euclidiennes en ce point.

Lemme 5.3. *Soit $C^\mu_{\sigma\tau}(y) := \mathbf{C}^\mu_{\sigma\tau}(\mathbf{X}(y))$, où \mathbf{X} est la carte d'un système de coordonnées euclidiennes en $X = \mathbf{X}(0)$ et où y est arbitrairement pris dans un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n ; alors*

$$(49) \quad \frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta}(0) = \frac{1}{2} \delta^{\mu\kappa} (h_{\kappa\tau, \sigma\eta} + h_{\kappa\sigma, \eta\tau} - h_{\sigma\tau, \kappa\eta})$$

si, de plus le hessien métrique h en X appartient à $\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^d)$, alors

$$(50) \quad \frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta}(0) = \delta^{\mu\kappa} h_{\kappa\eta, \sigma\tau}$$

Preuve. Par définition des symboles des Christoffels (en fonction des dérivées partielles premières des composantes de la métrique) $C^\mu_{\sigma\mu}(y)$ s'exprime en fonction des $\gamma_{\mu\nu, \sigma}(y)$, où $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$; la dérivation partielles par rapport à y^η donne alors

$$\frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma^{\mu\kappa}}{\partial y^\eta} (\gamma_{\kappa\tau, \sigma} + \gamma_{\sigma\kappa, \tau} - \gamma_{\sigma\tau, \kappa}) + \frac{1}{2} \gamma^{\mu\kappa} (\gamma_{\kappa\tau, \sigma\eta} + \gamma_{\sigma\kappa, \tau\eta} - \gamma_{\sigma\tau, \kappa\eta})$$

Lorsque les coordonnées sont euclidiennes en X , il vient alors pour $y = 0$:

$$\frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta}(0) = \frac{1}{2} \delta^{\mu\kappa} (h_{\kappa\tau, \sigma\eta} + h_{\sigma\kappa, \tau\eta} - h_{\sigma\tau, \kappa\eta})$$

où nous avons utilisé le fait que $h_{\mu\nu\sigma\tau} = \gamma_{\mu\nu, \sigma\tau}(0)$ ($= g_{\mu\nu, \sigma\tau}(X)$). Maintenant si nous supposons en plus que $h \in \mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^n)$, alors :

$$\frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta}(0) = \frac{1}{2} \delta^{\mu\kappa} \left((h_{\kappa\tau, \sigma\eta} + h_{\kappa\sigma, \eta\tau} + h_{\kappa\eta, \tau\sigma}) - (h_{\kappa\eta, \tau\sigma} + h_{\sigma\tau, \kappa\eta}) \right) = \delta^{\mu\kappa} h_{\kappa\eta, \sigma\tau}$$

□

Preuve du Théorème B. $(i) \implies (ii)$: Soit \mathbf{X} la carte d'un système de coordonnées supposée euclidienne en $X = \mathbf{X}(0)$ dont le hessien métrique h (en X) est un élément de $\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^n)$. Pour $y, z \in \mathbb{R}^n$ fixés et $\varepsilon \in \mathbb{R}$, nous notons $r = r(\varepsilon) = \rho_X(\varepsilon y, \varepsilon(y+z))$: si ε est assez petit, il existe une unique géodésique $t \mapsto \xi(t) = \mathbf{X}(\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ de vitesse unité reliant $\mathbf{X}(\varepsilon y)$ à $\mathbf{X}(\varepsilon(y+z))$ par un segment géodésique de longueur r . Cette géodésique est déterminée par sa position initiale $\xi(0) = \mathbf{X}(\varepsilon y)$ et par le vecteur $v = v(\varepsilon) := \dot{\xi}(0)$ t.q.

$$(51) \quad v^\mu v^\nu \gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) = 1$$

de sorte que $\xi(r) = \mathbf{X}(\varepsilon(y+z))$. Le développement de Taylor de $\xi^\mu(t)$ en $t = 0$ s'écrit

$$(52) \quad \xi^\mu(t) = \xi^\mu(0) + t\dot{\xi}^\mu + 1/2 t^2 \ddot{\xi}^\mu(0) + 1/6 t^3 \ddot{\xi}^\mu(0) + t^4 A^\mu(\varepsilon, t)$$

où $A^\mu(\varepsilon, t)$ est bornée pour $(\varepsilon, t) \rightarrow (0, 0)$. Comme $\xi^\mu(r) = \varepsilon y^\mu + \varepsilon z^\mu$ et que $\xi^\mu(0) = \varepsilon y^\mu$, en prenant $t = r(\varepsilon)$ dans (52) il vient (avec $r(\varepsilon) = \varepsilon \mathcal{O}(1)$ et $A^\mu(\varepsilon, r(\varepsilon)) = \mathcal{O}(1)$) :

$$(53) \quad \varepsilon z^\nu = r(\varepsilon) \dot{v}^\mu + 1/2 r^2(\varepsilon) \ddot{\xi}^\mu(0) + 1/6 r^3(\varepsilon) \dddot{\xi}^\mu(0) + \varepsilon^4 \mathcal{O}(1)$$

Rappelons que $\ddot{\xi}^\mu(0)$ et $\dddot{\xi}^\mu(0)$ (au même titre que $\dot{\xi}^\mu(0) = v^\mu$) dépendent de ε : il s'agit de développer ces deux coefficients suivant ε , à partir de l'équation différentielle des géodésiques. Pour $t = 0$, l'équation géodésique donne $\ddot{\xi}^\mu(0) = -v^\sigma v^\tau C^\mu_{\sigma\tau}(\varepsilon y)$ $\ddot{\xi}^\mu(0)$: par suite, comme $C^\mu_{\sigma\tau}(0) = 0$ (les coordonnées sont euclidiennes en X) et que $v^\mu = \mathcal{O}(1)$,

$$\ddot{\xi}^\mu(0) = -v^\sigma v^\tau \left(C^\mu_{\sigma\tau}(0) + \varepsilon y^\eta \frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta}(0) + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1) \right) = -\varepsilon v^\sigma v^\tau y^\eta \frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta}(0) + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1)$$

Enfin, avec l'hypothèse $h \in \mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^n)$, l'équation (50) du Lemme 5.3 assure que

$$(54) \quad \ddot{\xi}^\mu(0) = -\varepsilon v^\sigma v^\tau y^\eta \delta^{\mu\kappa} h_{\sigma\tau\kappa\eta} + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1)$$

Pour $\dddot{\xi}^\mu(0)$, nous évaluons la dérivée de $\ddot{\xi}^\mu(t) = -\dot{\xi}^\sigma(t) \dot{\xi}^\tau(t) C^\mu_{\sigma\tau}(\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ par rapport à t en $t = 0$; or d'après (54), nous savons $\dot{\xi}^\tau(0)$ et $\ddot{\xi}^\sigma(0)$ sont dans $\varepsilon \mathcal{O}(1)$ et donc :

$$\begin{aligned} \dddot{\xi}^\mu(0) &= -\ddot{\xi}^\sigma(0) \dot{\xi}^\tau(0) C^\mu_{\sigma\tau}(\varepsilon y) - \dot{\xi}^\sigma(0) \ddot{\xi}^\tau(0) C^\mu_{\sigma\tau}(\varepsilon y) - \dot{\xi}^\sigma(0) \dot{\xi}^\tau(0) \dot{\xi}^\eta(0) \frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta}(\varepsilon y) \\ &= \varepsilon \mathcal{O}(1) - v^\sigma v^\tau v^\eta \left(\frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta}(0) + \varepsilon \mathcal{O}(1) \right) \end{aligned}$$

soit encore (nouvelle application de l'équation (50) in Lemme 5.3)

$$(55) \quad \dddot{\xi}^\mu(0) = -v^\sigma v^\tau v^\eta \delta^{\mu\kappa} h_{\kappa\eta\sigma\tau} + \varepsilon \mathcal{O}(1)$$

Ainsi, l'équation (53) devient :

$$(56) \quad \varepsilon z^\mu = r v^\mu - \frac{1}{2} \varepsilon r^2 v^\sigma v^\tau y^\eta \delta^{\mu\kappa} h_{\kappa\eta\sigma\tau} - \frac{1}{6} r^3 v^\sigma v^\tau v^\eta \delta^{\mu\kappa} h_{\kappa\eta\sigma\tau} + \varepsilon^4 \mathcal{O}(1)$$

Maintenant, nous pouvons utiliser le fait que $r = \varepsilon \mathcal{O}(1)$ pour écrire

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) &= r^2 v^\mu v^\nu \gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) - \frac{\varepsilon}{2} r^3 \left[\gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) \delta^{\nu\kappa} v^\mu \right] v^\sigma v^\tau y^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2} r^3 \left[\gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) \delta^{\mu\kappa} v^\nu \right] v^\sigma v^\tau y^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} \\ &\quad - \frac{1}{6} r^4 \left[\gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) \delta^{\nu\kappa} v^\mu \right] v^\sigma v^\tau v^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} \\ &\quad - \frac{1}{6} r^4 \left[\gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) \delta^{\mu\kappa} v^\nu \right] v^\sigma v^\tau v^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

soit d'après (51) (et grâce à des symétries sommatoires simples) :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) &= r^2 - \varepsilon r^3 \left[\gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) \delta^{\nu\kappa} v^\mu \right] v^\sigma v^\tau y^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} \\ &\quad - \frac{1}{3} r^4 \left[\gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) \delta^{\nu\kappa} v^\mu \right] v^\sigma v^\tau v^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

soit encore, en utilisant les approximations $\gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1)$ et $r = \varepsilon \mathcal{O}(1)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) &= r^2 - \varepsilon r^3 \left[(\delta_{\mu\nu} + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1)) \delta^{\nu\kappa} v^\mu \right] v^\sigma v^\tau y^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} \\ &\quad - \frac{1}{3} r^4 \left[(\delta_{\mu\nu} + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1)) \delta^{\nu\kappa} v^\mu \right] v^\sigma v^\tau v^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1) \\ &= r^2 - \varepsilon r^3 \left[\delta_{\mu\nu} \delta^{\nu\kappa} v^\mu \right] v^\sigma v^\tau y^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} - \frac{1}{3} r^4 \left[\delta_{\mu\nu} \delta^{\nu\kappa} v^\mu \right] v^\sigma v^\tau v^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1) \\ &= r^2 - \varepsilon r^3 v^\kappa v^\sigma v^\tau y^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} - \frac{1}{3} r^4 v^\kappa v^\sigma v^\tau v^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

Or par hypothèse $h \in \mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^n)$ nous pouvons utiliser les symétries 1 et 2 ainsi que la bi-symétrie de h , de sorte que

$$v^\kappa v^\sigma v^\tau w^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} = v^\sigma v^\tau v^\kappa w^\eta h_{\sigma\tau\kappa\eta} = h(v, v, v, w) = 0$$

En prenant successivement $w = v$ et $w = y$, il vient finalement

$$(57) \quad \varepsilon^2 z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) = r^2 + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1)$$

Nous pouvons maintenant développer $\gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y)$ au second ordre et (57) devient

$$r^2 = \varepsilon^2 z^\mu z^\nu \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{\varepsilon^2}{2} y^\sigma y^\tau \gamma_{\mu\nu,\sigma\tau}(0) \right) + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1) = |\varepsilon z|^2 + \frac{\varepsilon^4}{2} h(z, z, y, y) + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1)$$

(ii) \implies (i) : Soit X la carte d'un système de coordonnées euclidiennes en X et supposons que la métrique $\rho_X(\cdot, \cdot)$ soit reliée à la métrique euclidienne par le fait que pour tout $y, z \in \mathbb{R}^n$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (suffisamment petit) :

$$(58) \quad r(\varepsilon) := \rho_X(\varepsilon y, \varepsilon(y+z))^2 = |\varepsilon z|^2 + \frac{\varepsilon^4}{2} h(z, z, y, y) + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1)$$

où le hessien métrique h est une forme quadriliéaire dans $\mathcal{Q}^+(\mathbb{R}^n)$. Pour démontrer que $h \in \mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^n)$, nous allons utiliser l'approximation (58) combinée à la symétrie de la métrique $\rho_X(\cdot, \cdot)$. Etant données y et z arbitrairement fixés, dans \mathbb{R}^n et $0 \neq \varepsilon \in \mathbb{R}$ dans un voisinage de 0, nous savons d'après (58) que

$$(59) \quad h(z, z, y, y) = \frac{2}{\varepsilon^4} \left(r(\varepsilon)^2 - |\varepsilon z|^2 \right) + \varepsilon \mathcal{O}(1)$$

Si $z = y$, alors $r(\varepsilon) = |\varepsilon z|$ et (59) entraîne que $h(z, z, z, z) = 0$. Mais la symétrie de $\rho_X(\cdot, \cdot)$ entraîne que $r(\varepsilon) = \rho_X(\varepsilon(y+z), \varepsilon(y+z) - \varepsilon z)$; une deuxième application (6) permet d'exprimer $h(-z, -z, y+z, y+z)$ en fonction de $r(\varepsilon)$ et par quadrilinéarité il vient :

$$h(z, z, y, y) + h(z, z, y, z) + h(z, z, z, y) + h(z, z, z, z) = \frac{2}{\varepsilon^4} \left(r(\varepsilon)^2 - |\varepsilon z|^2 \right) + \varepsilon \mathcal{O}(1)$$

Du fait que $h(z, z, z, z) = 0$ et grâce aux symétries 1 et 2 de h il vient

$$(60) \quad h(z, z, y, y) + 2h(z, z, z, y) = \frac{2}{\varepsilon^4} \left(r(\varepsilon)^2 - |\varepsilon z|^2 \right) + \varepsilon \mathcal{O}(1)$$

Par une comparaison de (59) et (60) il vient $h(z, z, z, y) = \varepsilon \mathcal{O}(1)$ i.e. $h(z, z, z, y) = 0$. Par le lemme de Moore, nous en déduisons que $h \in \mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^n)$. □

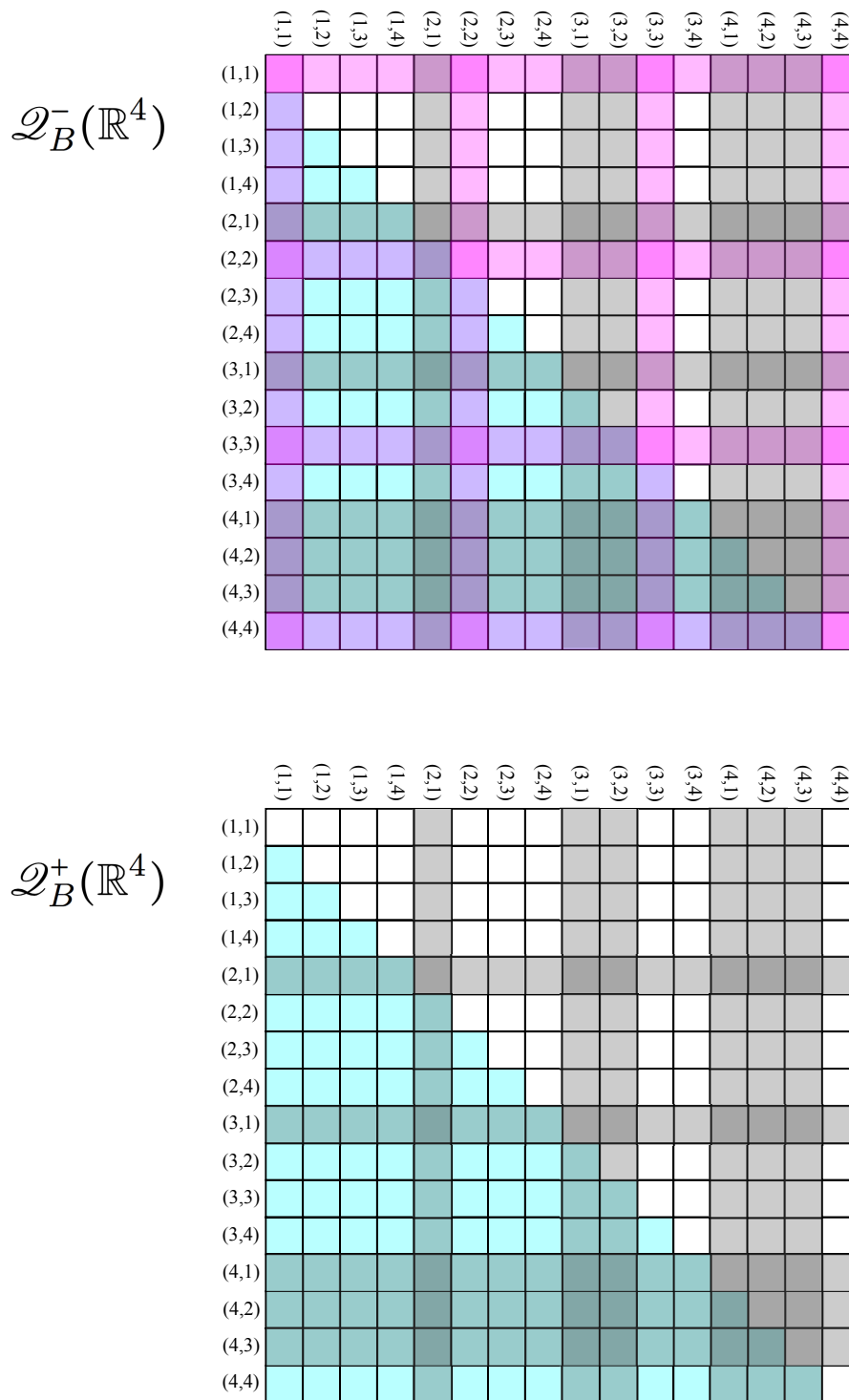


FIGURE 5. Représentation en tableau des couples $((\mu\nu), (\sigma, \tau))$, pour $1 \leq \mu, \nu, \sigma, \tau \leq 4$; les carreaux blancs déterminent un ensemble X de quadruplet (μ, ν, σ, τ) correspondant à un système minimal de composantes $\varphi_{\mu\nu\sigma\tau}$ non-nulles associées à une forme quadrilinéaire dans $\varphi \in \mathcal{Q}_B^\pm(\mathbb{R}^4)$ et permettant de développer φ dans la base des formes quadrilinéaires sur \mathbb{R}^4 formée par les $\varepsilon^\mu \otimes \varepsilon^\nu \otimes \varepsilon^\sigma \otimes \varepsilon^\tau$ et en utilisant les identités

$$\varphi_{\mu\nu\sigma\tau} = \pm\varphi_{\nu\mu\sigma\tau} = \pm\varphi_{\mu\nu\tau\sigma} = \varphi_{\sigma\tau\mu\nu}$$

Ainsi nous retrouvons que

$$\dim(\mathcal{Q}_B^\pm(\mathbb{R}^d)) = \frac{1}{2} \left(\frac{d(d+1)}{2} \right) \left(\frac{d(d+1)}{2} + 1 \right)$$

6. Dimension de certains sous-espaces de $\mathcal{Q}^\pm(\mathbb{R}^d)$

6.1. L'espace $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^d)$ des formes quadrilinéaires sur \mathbb{R}^d ($d \geq 2$) est de dimension d^4 . Si nous notons (comme d'habitude) $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d)$ la base canonique de \mathbb{R}^d , alors pour tout $\varphi \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^d)$ nous avons $\varphi = \varphi_{\sigma\tau\mu\nu} \varepsilon^\sigma \otimes \varepsilon^\tau \otimes \varepsilon^\mu \otimes \varepsilon^\nu$ où les ε^μ sont les formes coordonnées associées aux \mathbf{e}_μ (i.e. $\varepsilon^\mu(\mathbf{e}_\nu) = \delta^\mu_\nu$) et où $\varphi_{\sigma\tau\mu\nu} := \varphi(\mathbf{e}_\sigma, \mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu)$. Les d^4 réels $\varphi_{\mu\nu\sigma\tau}$ (pour $1 \leq \mu, \nu, \sigma, \tau \leq d$) sont les composantes de φ dans la base de $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^d)$ formée par les produits tensoriels $\varepsilon^\sigma \otimes \varepsilon^\tau \otimes \varepsilon^\mu \otimes \varepsilon^\nu$. Nous savons (c.f. Lemme de Milnor) que l'inclusion $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ est toujours valable et nous allons nous intéresser aux cas d'égalité. Si $d = 2, 3$, alors, il est facile de vérifier que l'égalité $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d) = \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ est satisfaite; en effet, pour $\varphi \in \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ et $1 \leq \mu, \sigma, \tau \leq 3$, en prenant $\nu \in \{\mu, \tau\}$ nous avons :

$$(61) \quad \varphi_{\mu\{\nu\sigma\tau\}} = \varphi_{\mu\{\sigma\tau\nu\}} = \varphi_{\mu\{\tau\nu\sigma\}} = \varphi_{\mu\nu\sigma\tau} + \varphi_{\mu\sigma\tau\nu} + \varphi_{\mu\tau\nu\sigma} = 0$$

ce qui entraîne que $\varphi_{\mu\{\nu\sigma\tau\}} = 0$ pour tout $1 \leq \mu, \nu, \sigma, \tau \leq 3$. L'égalité $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d) = \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$, est donc valable lorsque $d = 2, 3$. Un argument dimensionnel (c.f. Corollaire 6.3) montre que l'inclusion $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ est stricte pour $d > 3$; nous pouvons cependant voir cela directement sur un cas particulier. Par exemple, pour $d = 4$, considérons les produits extérieurs $\varepsilon^\mu \wedge \varepsilon^\nu$ représentant les mineurs d'indice (μ, ν) et agissant sur les couples de vecteurs de \mathbb{R}^4 . Alors, il est facile de vérifier que

$$\varphi := (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \otimes (\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4) + (\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4) \otimes (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2)$$

est bien dans $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^4)$. Or $\varphi \notin \mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^4)$, puisque²⁹ $\varphi_{1234} = 1$ et que $\varphi_{1342} = \varphi_{1423} = 0$, ce qui nous donne $\varphi_{1\{234\}} = \varphi_{1234} + \varphi_{1342} + \varphi_{1423} = \varphi_{1234} = 1$.

6.2. Soit $\varphi \in \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^2)$ ($= \mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^2)$): alors pour $u, v, w, z \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi(u, v, w, z) &= u^1 v^2 w^1 z^2 \varphi_{1212} + u^2 v^1 w^1 z^2 \varphi_{2112} + u^1 v^2 w^2 z^1 \varphi_{1221} + u^2 v^1 w^2 z^1 \varphi_{2121} \\ &= (u^1 v^2 w^1 z^2 - u^2 v^1 w^1 z^2 - u^1 v^2 w^2 z^1 + u^2 v^1 w^2 z^1) \varphi_{1212} \\ &= (u^1 v^2 - u^2 v^1)(w^1 z^2 - w^2 z^1) \varphi_{1212} \end{aligned}$$

L'espace vectoriel $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^2)$ est donc de dimension 1 et pour tout $\varphi \in \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^2)$

$$\varphi = (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \otimes (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \varphi_{1212}$$

Si $\varphi \in \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^3)$ ($= \mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^3)$), alors par les anti-symétries 1 et 2 et la bi-symétrie :

$$\begin{aligned} \varphi &= (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \otimes (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \varphi_{1212} + (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3) \otimes (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3) \varphi_{1313} + (\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3) \otimes (\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3) \varphi_{2323} \\ &\quad + \left((\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \otimes (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3) + (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3) \otimes (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \right) \varphi_{1213} \\ &\quad + \left((\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \otimes (\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3) + (\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3) \otimes (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \right) \varphi_{1223} \\ &\quad + \left((\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3) \otimes (\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3) + (\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3) \otimes (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3) \right) \varphi_{1323} \end{aligned}$$

d'où nous tirons que $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^3) = \mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^3)$ est de dimension 6. Dans le cas général $d \geq 2$, soit A le sous-ensemble des quadruplets $(\mu, \nu, \sigma, \tau) \in \{1, \dots, d\}^4$ satisfaisant les deux conditions liées aux antisymétries 1 et 2 soient $1 \leq \mu < \nu \leq d$ et $1 \leq \sigma < \tau \leq d$, plus la troisième condition³⁰ $(\mu, \nu) \leq (\sigma, \tau)$ liée à la bi-symétrie. Pour $k = 1, 2, 3, 4$, nous notons

29. Par exemple $\varphi_{1342} = \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2) = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \cdot \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2) + \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \cdot \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2) = 0$.

30. Nous utilisons l'ordre lexicographique.

A_k le sous-ensemble de A formé des (μ, ν, σ, τ) pour lesquels le cardinal $\#\{\mu, \nu, \sigma, \tau\}$ est égal à k : en particulier, nous avons³¹

$$\#A_1 = 0, \quad \#A_2 = \frac{d(d-1)}{2}, \quad \#A_3 = 3 \frac{d(d-1)(d-2)}{6}, \quad \#A_4 = 3 \frac{d(d-1)(d-2)(d-3)}{24}$$

Alors, pour $\varphi \in \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$, nous obtenons

$$\varphi = \sum_{A_2} (\varepsilon^\mu \wedge \varepsilon^\nu) \otimes (\varepsilon^\mu \wedge \varepsilon^\nu) \varphi_{\mu\nu\mu\nu} + \sum_{A_3 \cup A_4} \left((\varepsilon^\mu \wedge \varepsilon^\nu) \otimes (\varepsilon^\sigma \wedge \varepsilon^\tau) + (\varepsilon^\sigma \wedge \varepsilon^\tau) \otimes (\varepsilon^\mu \wedge \varepsilon^\nu) \right) \varphi_{\mu\nu\sigma\tau}$$

Nous en déduisons que la dimension de $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ coïncide avec $\#A = \#A_2 + \#A_3 + \#A_4$, ce que nous pouvons exprimer sous forme développée en écrivant :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)) &= \frac{d(d-1)}{2} + 3 \frac{d(d-1)(d-2)}{6} + 3 \frac{d(d-1)(d-2)(d-3)}{24} \\ &= \left(\frac{d(d-1)}{4} \right) \left(2 + 2(d-1) + \frac{(d-2)(d-3)}{2} \right) \\ &= \left(\frac{d(d-1)}{4} \right) \left(\frac{d^2 - d + 2}{2} \right) \end{aligned}$$

Nous donnons dans le commentaire de la Figure 5 une heuristique visuelle permettant de retrouver l'expression développée de $\dim(\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d))$: ainsi en notant $S(n) := n + \dots + 1$, pour tout entier $n \geq 1$, il vient aussi :

$$\dim(\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)) = S(S(d-1)) = \frac{1}{2} \left(\frac{d(d-1)}{2} \right) \left(\frac{d(d-1)}{2} + 1 \right)$$

Proposition 6.1. $\dim(\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)) = \frac{1}{2} \left(\frac{d(d-1)}{2} \right) \left(\frac{d(d-1)}{2} + 1 \right)$

6.3. Nous voulons maintenant déterminer la dimension de $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)$ lorsque $d > 2$. En adaptant légèrement le calcul nous ayant mené à (61), nous obtenons que $\varphi_{\mu\{\nu\sigma\tau\}} = 0$ lorsque $(\mu, \nu, \sigma, \tau) \in A_2 \cup A_3$: pour cela, nous utilisons les anti-symétries 1 et 2 ainsi que la bi-symétrie. Par contre, lorsque $(\mu, \nu, \sigma, \tau) \in A_4$, la cyclicité $\varphi_{\mu\{\nu\sigma\tau\}} = 0$ ne peut être obtenue à partir des anti-symétries 1 et 2 et de la bi-symétrie : c'est ce type de relations qui expliquent que $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)$ soit un sous espace propre de $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ dès que $d > 3$. Afin de calculer la dimension exacte de $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)$, nous commençons par regarder le cas où $(\mu, \nu, \sigma, \tau) = (1, 2, 3, 4)$; la propriété de cyclicité entraîne que $\varphi_{1234} + \varphi_{1342} + \varphi_{1423} = 0$, soit encore que $\varphi_{1423} = -\varphi_{1234} + \varphi_{1324}$ (où nous avons ré-ordonné les indices afin qu'il correspondent à des quadruplets dans A_4). Plus généralement, si nous notons³² $(\mu, \nu, \sigma, \tau) < (\mu, \nu', \sigma', \tau') < (\mu, \nu'', \sigma'', \tau'')$ une suite ordonnée³³ des trois quadruplets de A_4 dont les supports respectifs coïncident avec $\{\mu, \nu, \sigma, \tau\}$, alors la cyclicité s'écrit

$$(62) \quad \varphi_{\mu\nu''\sigma''\tau''} = \pm(\varphi_{\mu\nu\sigma\tau} - \varphi_{\mu\nu'\sigma'\tau'})$$

31. Le facteur 3 dans la formule de $\#A_3$ vient du fait qu'à chaque partie $\{\mu, \nu, \sigma\}$ de $\{1, \dots, d\}$ ayant exactement 3 éléments, correspond 3 quadruplets de A_3 : par exemple $\{1, 2, 3\}$ est associée aux quadruplets $(1, 2, 1, 3)$, $(1, 2, 2, 3)$ et $(1, 3, 2, 3)$. De même, le facteur 3 dans la formule de $\#A_4$ vient du fait qu'à chaque partie $\{\mu, \nu, \sigma, \tau\}$ de $\{1, \dots, d\}$ ayant exactement 4 éléments, correspond 3 quadruplets de A_4 : ainsi, $\{1, 2, 3\}$ est associée aux quadruplets $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 3, 2, 4)$ et $(1, 4, 2, 3)$.

32. Sous réserve d'existence, i.e. lorsque $d \geq 4$.

33. Par l'ordre lexicographique.

La dimension de $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)$ s'obtient à partir de la dimension de $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ en retranchant le nombre de relations du type (62) : or ce nombre coïncide avec le nombre de sous-ensembles à 4 éléments contenus dans $\{1, \dots, d\}$, de sorte que

$$\dim(\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)) = \frac{1}{2} \binom{d(d-1)}{2} \binom{d(d-1)+2}{2} - \binom{d(d-1)(d-2)(d-3)}{24} = \frac{d^2(d^2-1)}{12}$$

(On pourra trouver un autre argument donnant ce résultat dans [Wei72, Chap. 6, § 7].)

Proposition 6.2. $\dim(\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)) = \frac{d^2(d^2-1)}{12}$ (En particulier $\dim(\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^2)) = 1$.)

A partir des Propositions 6.1 et 6.2, nous retrouvons le cas d'égalité de $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$.

Corollaire 6.3. $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d) = \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d) \iff d = 2, 3$

De même que pour $\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{Q}_B^+(\mathbb{R}^d)$, nous avons la proposition suivante.

Proposition 6.4. Si $d \geq 2$ alors $\mathcal{Q}_B^+(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace vectoriel strict de $\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^d)$ et de plus

$$\dim(\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^d)) = \frac{d^2(d^2-1)}{12} < \frac{d(d+1)}{4} \binom{d(d+1)}{2} + 1 = \dim(\mathcal{Q}_B^+(\mathbb{R}^d))$$

Insistons sur le fait que contrairement à $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ (c.f. Corollaire 6.3) l'espace $\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^d)$ est toujours un sous-espace vectoriel strict de $\mathcal{Q}_B^+(\mathbb{R}^d)$ (le cas $d = 2$ aura son intérêt lorsque nous regarderons les propriétés du tenseur de Gauss : c.f. § 10.2). Nous savons (c.f. Proposition 4.2) que les espaces $\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)$ sont isomorphes ce qui est cohérent avec le fait que ces deux espaces ont même dimension. Par contre, les espaces $\mathcal{Q}_B^+(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ ne sont jamais isomorphes car $\dim(\mathcal{Q}_B^+(\mathbb{R}^d)) < \dim(\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d))$.

7. Les composantes des tenseurs R et H

7.1. Le Théorème C affirme l'existence d'un $(0, 4)$ -tenseur H – le tenseur Hessian – caractérisé par le fait que ses composantes $H_{\mu\nu\sigma\tau}(X)$ en un point X coïncident avec les symboles de Riemann $g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X)$ lorsque le système de coordonnées est normal au point X . A partir de là, nous avons pu définir le tenseur de Reimann-Christoffel R (c.f. Définition B) et déduire beaucoup de choses sur les deux tenseurs H et R . En résumé, si U, V, W, Z sont quatre champs de vecteurs, alors les symétries du tenseur hessien métrique, sont :

- (H1) : $H(U, V, W, Z) = H(V, U, W, Z) = H(U, V, Z, W)$ (symétrie 1 & 2)
- (H2) : $H(U, U, U, V) = 0$ (identité de Moore)
- (H3) : $H(U, V, W, Z) + H(U, W, Z, V) + H(U, Z, V, W) = 0$ (cyclicité)
- (H4) : $H(U, V, W, Z) = H(W, Z, U, V)$ (bisymétrie)

ces propriétés correspondant aux symétries du tenseur de courbure, soient :

- (R1) : $R(U, V, W, Z) = -R(V, U, W, Z) = -R(U, V, Z, W)$ (antisymétrie 1 & 2)
- (R2) : $R(U, V, W, Z) + R(U, W, Z, V) + R(U, Z, V, W) = 0$ (cyclicité)
- (R3) : $R(U, V, W, Z) = R(W, Z, U, V)$ (bisymétrie)

7.2. Jusqu'à présent nous nous sommes toujours placé dans un systèmes de coordonnées normal en un point. Cependant, les coordonnées locales qu'on peut utiliser – en pratique – dans un voisinage d'un point d'une variété riemannienne, n'ont aucunes raisons d'être normales en ce point : il est donc important de déterminer l'expression des composantes de H et R en tout point et pour tout système de coordonnées. Nous verrons que cela revient en fait à démontrer le Théorème C : c'est une partie difficile et technique qui a été initialement résolue par Riemann dans [Rie92], où apparaît explicitement l'expression en (63) ci-dessous. Cette partie technique correspond aussi directement à un calcul très difficile de Gauss dans sont *Theorema egregium*, lui permettant d'obtenir l'expression de la courbure d'une surface en un point, uniquement par les dérivées première et secondes des coefficients de la première forme fondamentale (indépendamment de la paramétrisation locale de la surface) : nous reviendrons sur ce point au § 11.5. Nous admettons provisoirement le théorème suivant, qui sera démontré dans [Oli17a] de plusieurs manières différentes.

Théorème 7.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n ; alors les x -composantes du tenseur de Riemann-Christoffel (covariant) R , dans des coordonnées x quelconques, sont :*

$$(63) \quad R_{\mu\nu\sigma\tau} = \frac{1}{2}(g_{\mu\sigma,\nu\tau} + g_{\nu\tau,\mu\sigma} - g_{\mu\tau,\nu\sigma} - g_{\nu\sigma,\mu\tau}) + g_{\eta\epsilon}(\mathbf{C}^{\eta}_{\mu\sigma}\mathbf{C}^{\epsilon}_{\nu\tau} - \mathbf{C}^{\eta}_{\mu\tau}\mathbf{C}^{\epsilon}_{\nu\sigma})$$

Le premier point importante du Théorème 7.1 se trouve dans le fait que les expressions du membre droit de (63) constituent bien les composantes d'un $(0, 4)$ -tenseur, en ce sens qu'elles se transforment suivant (7) lors d'un changement de coordonnées. Le fait que ces composantes sont les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel covariant, dépend (dans notre présentation) du Théorème C et de la Définition B, ce que nous pouvons directement vérifier : en effet, si nous supposons que les coordonnées x sont normales en X alors, d'après le Proposition 2.4 nous pouvons simplifier (63) et nous retrouvons que

$$R_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = \frac{1}{2}(g_{\mu\sigma,\nu\tau}(X) + g_{\nu\tau,\mu\sigma}(X) - g_{\mu\tau,\nu\sigma}(X) - g_{\nu\sigma,\mu\tau}(X)) = g_{\mu\sigma,\nu\tau}(X) - g_{\mu\tau,\nu\sigma}(X)$$

(Pour la dernière égalité, nous avons utilisé la bi-symétrie des symboles de Riemann en coordonnées normales et donc le Théorème A combiné au lemme de Milnor). Les composantes du tenseur hessien métrique H se déduisent de celle du tenseur de Riemann-Christoffel données en (63) à partir de la relation $H_{\mu\nu\sigma\tau} = 1/3R_{\mu\sigma\nu\tau} + 1/3R_{\mu\tau\nu\sigma}$.

Corollaire 7.2. *Les x -composantes du tenseur hessien métrique H dans des coordonnées x quelconques, sont :*

$$(64) \quad H_{\mu\nu\sigma\tau} = \frac{1}{3}(g_{\mu\nu,\sigma\tau} + g_{\sigma\tau,\mu\nu}) - \frac{1}{6}(g_{\mu\tau,\sigma\nu} + g_{\sigma\nu,\mu\tau} + g_{\mu\sigma,\tau\nu} + g_{\tau\nu,\mu\sigma}) \\ \frac{1}{3}(2\mathbf{C}^{\eta}_{\mu\nu}\mathbf{C}^{\epsilon}_{\sigma\tau} - \mathbf{C}^{\eta}_{\mu\tau}\mathbf{C}^{\epsilon}_{\sigma\nu} - \mathbf{C}^{\eta}_{\mu\sigma}\mathbf{C}^{\epsilon}_{\tau\nu})g_{\eta\epsilon}$$

Nous terminons ce paragraphe en notant que l'identité cyclique de Riemann permet de retrouver – à partir des composantes – le fait que les $H_{\mu\nu\sigma\tau}(X)$ coïncident avec les symboles de Riemann en X , lorsque les coordonnées sont normales en ce point. En effet, en

utilisant de nouveau la Proposition 2.4, l'expression de $H_{\mu\nu\sigma\tau}(X)$ se simplifie et il vient :

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu\sigma\tau}(X) &= \frac{2}{3}g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) - \frac{1}{3}g_{\mu\sigma,\nu\tau}(X) - \frac{1}{3}g_{\mu\tau,\nu\sigma}(X) \\ &= \frac{2}{3}g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) - \frac{1}{3}g_{\mu\sigma,\nu\tau}(X) + \frac{1}{3}(g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) + g_{\mu\sigma,\tau\nu}(X)) = g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) \end{aligned}$$

8. Courbure et rayon de courbure d'une courbe plane

8.1. Soit (\mathcal{C}) le support d'un chemin (lisse) $\mathbf{r} : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (avec $a < 0 < b$) dont le paramètre est l'abscisse curviligne s . La condition $\langle \dot{\mathbf{r}}(s) | \dot{\mathbf{r}}(s) \rangle \equiv 1$ assure que la dérivée de $\langle \dot{\mathbf{r}}(s) | \dot{\mathbf{r}}(s) \rangle$ par rapport à s s'annule identiquement : ainsi $\langle \ddot{\mathbf{r}}(s) | \dot{\mathbf{r}}(s) \rangle \equiv 0$, ce qui signifie que l'accélération $\ddot{\mathbf{r}}(s)$ est toujours normale à la courbe. Considérons (comme d'habitude) que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ désigne la base canonique de \mathbb{R}^3 et que le plan du mouvement de (\mathcal{C}) soit celui engendré par $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$: alors, la base de Serret-Frenet $(\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s))$ est définie au point de (\mathcal{C}) d'abscisse curviligne s en posant $\mathbf{T}(s) = \dot{\mathbf{r}}(s)$ et $\mathbf{N}(s) = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{T}(s)$. Par définition, la courbure (algébrique) de (\mathcal{C}) en $\mathbf{r}(s)$ est le réel $\kappa(\mathbf{r}(s)) = \kappa(s)$ t.q.

$$(65) \quad \ddot{\mathbf{r}}(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$$

son rayon de courbure (algébrique) valant $1/\kappa(s)$. Notons $\alpha(s)$ une mesure de l'angle orienté $(\mathbf{e}_1, \mathbf{T}(s))$ de sorte que $\mathbf{T}(s) = \cos(\alpha(s))\mathbf{e}_1 + \sin(\alpha(s))\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{N}(s) = -\sin(\alpha(s))\mathbf{e}_1 + \cos(\alpha(s))\mathbf{e}_2$. Il vient alors $\dot{\mathbf{T}}(s) = \dot{\alpha}(s)\mathbf{N}(s)$ et $\dot{\mathbf{N}}(s) = -\dot{\alpha}(s)\mathbf{T}(s)$. Comme $\dot{\mathbf{T}} = \ddot{\mathbf{r}}$, il découle de la définition de la courbure en (65) que $\kappa(s) = \dot{\alpha}(s)$ et que par suite : $\dot{\mathbf{T}} = \kappa\mathbf{N}$ et $\dot{\mathbf{N}} = -\kappa\mathbf{T}$; la dérivée troisième de \mathbf{r} s'obtient alors à partir de (65) ce qui donne :

$$(66) \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\kappa^2\mathbf{T} + \dot{\kappa}\mathbf{N}$$

8.2. Pour une interprétation géométrique intuitive de la courbure et du rayon de courbure, nous pouvons supposer sans pertes de généralités que $\mathbf{r}(0) = (0, 0)$ avec $\dot{\mathbf{r}}(0) = (1, 0)$ et ³⁴ $\kappa(0) > 0$. Pour comprendre la signification de la courbure $\kappa(0)$ (et du rayon de courbure $1/\kappa(0)$), considérons les cercles tangents, soit (\mathcal{C}_a) de centre $(0, a)$ et de rayon a et dont l'équation cartésienne est $x^2 + y^2 - 2ay = 0$. L'idée est de s'intéresser au maximum des $a \geq 0$ pour lequel la courbe (\mathcal{C}) soit – dans un voisinage de $(0, 0)$ – à l'« extérieur » du cercle (\mathcal{C}_a) : si $(\mathbf{x}(s), \mathbf{y}(s))$ sont les coordonnées cartésiennes du point $\mathbf{r}(s)$ de (\mathcal{C}) de paramètre s , alors il s'agit de maximiser $0 \leq a \leq +\infty$ de sorte que

$$\Psi(s) := \mathbf{x}(s)^2 + \mathbf{y}(s)^2 - 2a\mathbf{y}(s) \geq 0$$

pour $|s|$ suffisamment petit. Ici $(\mathbf{T}(0); \mathbf{N}(0)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et il suit de (65) et (66) que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0), \ddot{\mathbf{x}}(0), \ddot{\mathbf{x}}(0)) &= (0, 1, 0, -\kappa(0)^2) \\ (\mathbf{y}(0), \dot{\mathbf{y}}(0), \ddot{\mathbf{y}}(0), \ddot{\mathbf{y}}(0)) &= (0, 0, \kappa(0), \dot{\kappa}(0)) \end{aligned}$$

En écrivant les développements limités de $\mathbf{x}(s)$ et $\mathbf{y}(s)$, nous obtenons

$$\Psi(s) = s^2 - 2a \left(\frac{s^2}{2}\kappa(0) + \frac{s^3}{6}\dot{\kappa}(0) \right) + o(s^3) = s^2(1 - a\kappa(0)) - a\frac{s^3}{3}\dot{\kappa}(0) + o(s^3)$$

34. Le cas $\kappa(0) < 0$ est symétrique, le cas d'une courbure nulle en $\mathbf{r}(0)$ nécessitant une analyse spéciale (cela arrive par exemple lorsque $\mathbf{r}(0)$ est un point d'inflexion de (\mathcal{C}) , ou encore lorsque \mathbf{r} est approximativement plat en 0).

Par suite, $\Psi(s)$ est positif pour $|s|$ suffisamment petit dès que a vérifie $1 \geq a\kappa(0)$: le maximum $1/\kappa(0)$ d'un tel a correspond bien au rayon de courbure de (C) en $r(0)$.

8.3. Prenons le cas particulier de la courbure en un point $(t, \varphi(t))$ du graphe d'une fonction $t \mapsto \varphi(t)$ définie (et lisse) dans un voisinage de 0. L'abscisse curviligne s étant définie à partir du point $(0, \varphi(0))$ en posant

$$s(t) = \int_0^t (1 + \dot{\varphi}^2(x))^{1/2} dx$$

nous pouvons vérifier que la base de Serret-Frenet, vérifie

$$\mathbf{T}(s(t)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{\varphi}^2(t)}} \mathbf{e}_1 + \frac{\dot{\varphi}(t)}{\sqrt{1 + \dot{\varphi}^2(t)}} \mathbf{e}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{N}(s(t)) = -\frac{\dot{\varphi}(t)}{\sqrt{1 + \dot{\varphi}^2(t)}} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{\varphi}^2(t)}} \mathbf{e}_2$$

Alors, d'une part

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{T}}{ds}(s(t)) &= \frac{d\mathbf{T} \circ s}{dt} = -\frac{\dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t)}{(1 + \dot{\varphi}^2(t))^{3/2}} \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\ddot{\varphi}(t)}{(1 + \dot{\varphi}^2(t))^{1/2}} - \frac{\dot{\varphi}(t)^2 \ddot{\varphi}(t)}{(1 + \dot{\varphi}^2(t))^{3/2}} \right) \mathbf{e}_2 \\ &= \frac{\ddot{\varphi}(t)}{(1 + \dot{\varphi}^2(t))} \mathbf{N}(s(t)) \end{aligned}$$

et comme d'autre part $ds = (1 + \dot{\varphi}^2(t))^{1/2} dt$ nous pouvons conclure que

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}(s(t)) = \frac{dt}{ds} \left(\frac{\ddot{\varphi}(t)}{(1 + \dot{\varphi}^2(t))} \right) \mathbf{N}(s(t)) = \frac{\ddot{\varphi}(t)}{(1 + \dot{\varphi}^2(t))^{3/2}} \mathbf{N}(s(t))$$

En d'autres termes, la courbure au point $(t, \varphi(t))$ vaut

$$\kappa(t, \varphi(t)) = \frac{\ddot{\varphi}(t)}{(1 + \dot{\varphi}^2(t))^{3/2}}.$$

Nous utiliserons le résultat particulier suivant :

Proposition 8.1. Soit (C) le graphe dans \mathbb{R}^2 d'une fonction $t \mapsto \varphi(t)$ définie (et lisse) dans un voisinage de 0 ; si $\dot{\varphi}(0) = 0$ alors la courbure de (C) en $(0, \varphi(0))$ est $\kappa = \ddot{\varphi}(0)$.

9. Coordonnées et courbure gaussiennes

9.1. Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 qui possède une structure de variété de dimension 2. Dans la suite nous notons \mathbf{X} la carte associée à un système de coordonnées locales $\mathbf{x} = (x^1, x^2)$ définie dans un voisinage d'un point X . **Le système de coordonnées \mathbf{x} est dit gaussien (on parle aussi de coordonnées de Gauss) en X** , si $\mathbf{x}(X) = 0$ et s'il existe une isométrie Φ de \mathbb{R}^3 avec $\Phi(T_X \Sigma) = \mathbb{R}^2$ et telle que

$$\mathbf{x} = \Phi \circ \pi_X$$

où π_X est la projection orthogonale de \mathbb{R}^3 sur l'espace tangent $T_X \Sigma$. Sans perte de généralités, nous pouvons supposer que $X = (0, 0, 0)$ et que $^{35} T_X \Sigma = \mathbb{R}^2$; dans ce cas, dire que \mathbf{x} est un système de coordonnées gaussien en X signifie qu'il existe une fonction f définie sur un voisinage de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 et t.q. pour tout (x^1, x^2) dans ce voisinage $\mathbf{X}(x^1, x^2) = (x^1, x^2, f(x^1, x^2))$. L'existence d'un système de coordonnées de Gauss est une simple conséquence du fait que Σ est une variété de dimension 2. Rappelons que

35. Rappelons que nous notons $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 (i.e. associées aux coordonnées cartésiennes canonique) et que \mathbb{R}^2 est (par identification) le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 .

$T_X \Sigma = \mathbb{R}^2$ avec $\mathbf{x}(X) = (0, 0)$; si $(\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3)$ sont les composantes cartésiennes de la carte \mathbf{X} , alors nous définissons $\theta_X := \pi_X \circ \mathbf{X} = (\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2)$. Avec $Y = \mathbf{X}(a, b)$, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i} \Big|_Y = \frac{\partial \mathbf{X}^j}{\partial x^i}(a, b) \mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^i}(a, b) \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^i}(a, b) \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^i}(a, b) \mathbf{e}_3$$

(où les \mathbf{e}_i sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3). Comme $X = \mathbf{X}(0, 0)$ et que $T_X \Sigma = \mathbb{R}^2$ (\mathbb{R}^2 étant engendré par \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2) nous en déduisons que

$$\frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^1}(0, 0) = \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^2}(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^1}(0, 0) \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^2}(0, 0) \neq \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^1}(0, 0) \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^2}(0, 0)$$

En particulier, la différentielle de θ_X en $(0, 0)$ est un isomorphisme de \mathbb{R}^2 t.q. $\theta_X(0, 0) = (0, 0)$: par suite ([théorème de l'inversion locale](#)), il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 , pour lequel θ_X réalise un difféomorphisme sur $\mathcal{W} := \theta_X(\mathcal{V})$. Prenons \mathcal{V} suffisamment petit pour être inclus dans le domaine de la carte \mathbf{X} ; alors nous pouvons définir le système de coordonnées locales $z = \theta_X^{-1} \circ \pi_X$ définie sur $\mathcal{U} := \mathbf{X}(\mathcal{V})$, de sorte que $z(Y) = \pi_X(Y)$, pour tout $Y \in \mathcal{U}$. Comme de plus \mathcal{U} est un voisinage de X (dans Σ) et que $z(X) = \theta_X^{-1}(\pi_X(X)) = \theta_X^{-1}(0, 0) = (0, 0)$, nous pouvons conclure que z est un système de coordonnées gaussien en X . Enfin, remarquons que la carte associée à z est l'application $\mathbf{Z} : \mathcal{W} \rightarrow \Sigma$ t.q. $\mathbf{Z}(x^1, x^2) = (x^1, x^2, f(x^1, x^2))$ avec $f = \mathbf{X} \circ \theta_X^{-1}$.

9.2. A une différence près (c.f. Proposition 10.6) les coordonnées de Gauss ont des propriétés analogues aux coordonnées normales de Riemann (c.f. § 2). Pour voir cela, nous considérons que \mathbf{x} est un système de coordonnées gaussien en $X = (0, 0, 0)$; de plus, la carte \mathbf{X} associée à \mathbf{x} est supposée de la forme $(x^1, x^2) \mapsto (x^1, x^2, f(x^1, x^2))$, où f est définie sur un voisinage de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 et vérifie

$$(67) \quad f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$$

Les vecteurs $\partial_1 = \partial/\partial x^1$ et $\partial_2 = \partial/\partial x^2$ s'expriment simplement à l'aide des dérivées partielles usuelles de $f(x^1, x^2)$: si $Y = \mathbf{X}(x^1, x^2)$ est un point voisin de X , alors :

$$\partial_1|_Y = \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} \right) \mathbf{e}_3 \quad \text{et} \quad \partial_2|_Y = \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2} \right) \mathbf{e}_3$$

Nous pouvons en tirer les \mathbf{x} -composantes $g_{\mu\nu} = \langle \partial_\mu | \partial_\nu \rangle$ de la métrique g ; plus précisément, si nous notons $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X} (= \gamma_{\mu\nu}(x^1, x^2))$, alors pour

$$(68) \quad \gamma_{\mu\mu} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right)^2 \quad \text{et} \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial f}{\partial x^2}$$

Nous utiliserons le fait que (à l'instar des coordonnées normales) les coordonnées gaussiennes en un point sont euclidiennes en ce point.

Proposition 9.1. *Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 munie de la métrique riemannienne induite par la structure euclidienne \mathbb{R}^3 ; alors des coordonnées gaussiennes en un point X sont nécessairement euclidiennes en ce point : en d'autres termes $g_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu,\sigma}(X) = 0$.*

Preuve. On se ramène au cas où la carte \mathbf{X} associée au coordonnées gaussiennes \mathbf{x} en $X = (0, 0, 0)$ est de la forme $(x^1, x^2) \mapsto (x^1, x^2, f(x^1, x^2))$, avec f vérifiant (67). Le fait que $g_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu}$ découle directement de (67) et (68). Pour montrer que $g_{\mu\nu,\sigma}(X) = 0$, nous

commençons par calculer la dérivée partielle de $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$ par rapport à x^σ à partir de (68), ce qui donne

$$\gamma_{\mu\nu,\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} + \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\sigma \partial x^\nu}$$

Le fait que $\gamma_{\mu\nu,\sigma}(0, 0) = 0$ vient une nouvelle fois de (67). □

Proposition 9.2. Soit $X = (0, 0, 0) \in \Sigma$ avec $T_X M = \mathbb{R}^2$ et soit \mathbf{x} un système de coordonnées gaussiennes en X ; alors la carte associée à \mathbf{x} est de la forme $\mathbf{X}(x^1, x^2) = (x^1, x^2, f(x^1, x^2))$ pour f vérifiant (67) et les symboles de Riemann en X dans les coordonnées gaussiennes \mathbf{x} s'écrivent

$$(69) \quad g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\nu \partial x^\tau} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\tau} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\nu \partial x^\sigma}$$

Preuve. Notons (comme d'habitude) $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$; alors

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu,\sigma\tau} &= \frac{\partial^2}{\partial x^\sigma \partial x^\tau} \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^\tau \partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} + \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\tau \partial x^\nu} \right) \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^\sigma \partial x^\tau \partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^\tau \partial x^\mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\tau \partial x^\nu} + \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial^3 f}{\partial x^\sigma \partial x^\tau \partial x^\nu} \end{aligned}$$

ce qui donne finalement (69) lorsque $(x^1, x^2) = (0, 0)$. □

Corollaire 9.3. Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 et \mathbf{x} un système de coordonnées gaussiennes en X ; alors les symboles de Riemann en X vérifient les symétries 1 et 2 ainsi que la bisymétrie, en ce sens que

$$(70) \quad g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) = g_{\nu\mu,\sigma\tau}(X) = g_{\mu\nu,\tau\sigma}(X) = g_{\sigma\tau,\mu\nu}(X)$$

9.3. Soit Σ la surface (nappe) de \mathbb{R}^3 constituée des $(x^1, x^2, f(x^1, x^2))$ pour (x^1, x^2) dans un voisinage ouvert \mathcal{V} de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 , avec f satisfaisant (67) (i.e. $X = (0, 0, 0) \in \Sigma$ et $T_X \Sigma = \mathbb{R}^2$). La projection orthogonale de Σ sur \mathbb{R}^2 définit un système de coordonnées gaussiennes en X et pour $(x^1, x^2) \rightarrow (0, 0)$, nous avons $f(x^1, x^2) \approx x^i x^j \partial_{ij} f(0, 0)$. Il n'est pas évident que la courbure³⁶ gaussienne de Σ en X définie comme le déterminant :

$$(71) \quad K = K(X) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}(0, 0) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2}(0, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(0, 0) \right)^2$$

soit « covariante », c'est-à-dire une quantité ne dépendant que de la géométrie locale de Σ en X et non de la paramétrisation de Σ dans un voisinage de X . Commençons avec le changement de variables $(x^1, x^2) = A_\theta(u^1, u^2)$, où A_θ est la rotation d'angle³⁷ θ (pour l'instant arbitraire) et soit $f_\theta : A_\theta^*(\mathcal{V}) \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $f_\theta(u^1, u^2) := f \circ A_\theta(u^1, u^2)$ (de sorte que $f_0 = f$). Alors le hessien $M_\theta = (\partial_{ij} f_\theta(0, 0))$ de f_θ en $(0, 0)$ s'obtient en écrivant

$$\frac{\partial^2 f_\theta}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial x^\mu}{\partial u^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial u^j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \circ A_\theta \right) \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} \partial x^1 / \partial u^1 & \partial x^1 / \partial u^2 \\ \partial x^2 / \partial u^1 & \partial x^2 / \partial u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

36. La demi trace $(\partial_{11} f(0, 0) + \partial_{22} f(0, 0))/2$ est appelée la courbure moyenne de Σ en X : cette notion a été introduite par Sophie Germain à propos des vibrations d'une membrane (cette notion intervient dans l'étude des surfaces minimales) : voir [DD87] pour un panorama historique complets.

37. A_θ est identifiée à sa matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^2 d'où les identification $A_\theta^{-1} = A_\theta^*$.

Finalement en $(u^1, u^2) = (0, 0)$ nous obtenons la relation matricielle $M_\theta = A_\theta^* M_0 A_\theta$. La matrice A_θ étant orthogonale, nous avons $A_\theta^{-1} = A_\theta^*$: le déterminant $\det(M_\theta)$ ne dépend pas du paramètre θ et coïncide donc avec la courbure de Gauss $K = \det(M_0)$ définie en (71). De plus, la matrice M_0 étant symétrique, elle possède une base orthonormée directe de vecteurs propres (**théorème spectral**) : si $\kappa_1 = \kappa_1(X)$ et $\kappa_2 = \kappa_2(X)$ sont les valeurs propres en question, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (déterminée modulo 2π) t.q.

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \kappa_i = \frac{\partial^2 f_\theta}{\partial u^i \partial u^i}(0, 0)$$

On appelle κ_1 et κ_2 les courbures principales de Σ en X : leur produit coïncide avec la courbure de Gauss de Σ en X , en ce sens que

$$(72) \quad K = \kappa_1 \kappa_2$$

Les valeurs propres κ_1 et κ_2 sont appelées les courbures principales de Σ en X : d'après la Proposition 8.1, elles coïncident respectivement avec les courbures en 0 des applications partielles $f_\theta(\cdot, 0)$ et $f_\theta(0, \cdot)$: la courbure gaussienne de Σ en X définie en (71) correspond donc au produit des courbures principales de Σ en $(0, 0)$.

Proposition 9.4. Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 munie de la métrique riemannienne g induite par la structure euclidienne de \mathbb{R}^3 . Si x est un système de coordonnées gaussiennes en un point $X \in \Sigma$ alors : $K(X) = g_{12,12}(X) - g_{11,22}(X)$.

Preuve. Nous pouvons nous ramener au cas où $X = (0, 0, 0)$ et $T_X M = \mathbb{R}^2$; les coordonnées x étant supposées gaussiennes en X , la carte \mathbf{X} associée est déterminée par une application f à valeur réelle et satisfaisant (67). Grâce à la Proposition 9.2 nous avons

$$\begin{aligned} g_{12,12}(X) - g_{11,22}(X) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}(0, 0) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2}(0, 0) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(0, 0) \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(0, 0) \right)^2 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}(0, 0) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2}(0, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(0, 0) \right)^2 \end{aligned}$$

la conclusion venant de la définition en (71) de la courbure gaussienne de Σ en X . □

10. La seconde forme fondamentale

10.1. Soit X un point d'une surface Σ de \mathbb{R}^3 et \mathbf{X} la carte d'un système de coordonnées x défini au voisinage de X , de sorte que $\partial_i | Y = \partial \mathbf{X} / \partial x^i$ dès que $Y = \mathbf{X}(x^1, x^2)$. La courbure de Σ en X peut s'étudier grâce au champ local du vecteur normal unitaire

$$(73) \quad \mathbf{n} := \frac{\partial_1 \times \partial_2}{|\partial_1 \times \partial_2|}$$

(défini pour tout Y dans le domaine de x) en examinant la manière dont $\mathbf{n}(Y)$ varie autour de X . Plus précisément, pour tout vecteur $u \in T_X \Sigma$ on considère $t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \Sigma$ un germe de chemin en X t.q. $\dot{\mathbf{r}}(0) = u$ et on définit $W_X(u)$ comme la dérivée en $t = 0$ de $\mathbf{n} \circ \mathbf{r}(t)$. Il est immédiat que $W_X(u)$ ne dépend pas du germe de chemin \mathbf{r} t.q. $\dot{\mathbf{r}}(0) = u$ et que $u \mapsto W_X(u)$ est une application linéaire de $T_X \Sigma$ dans \mathbb{R}^3 . D'autre part, la norme de $\mathbf{n} \circ \mathbf{r}(t)$ étant identiquement égale à 1, la vecteur dérivé $d/dt(\mathbf{n} \circ \mathbf{r})$ est nécessairement

orthogonal à $\mathbf{n} \circ \mathbf{r}(t)$ ce qui en fait un élément de l'espace tangent $T_{\mathbf{r}(t)}\Sigma$: en particulier (comme $\mathbf{r}(0) = X$) le vecteur $W_X(u)$ appartient à $T_X\Sigma$: ainsi W_X est un endomorphisme de $T_X\Sigma$, appelé **l'endomorphisme de Weingarten**. Si $\mathbf{r}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{r}^1(t), \mathbf{r}^2(t))$ alors :

$$\mathbf{n} \circ \mathbf{r}(t) = \mathbf{n} \circ \mathbf{X}(\mathbf{r}^1(t), \mathbf{r}^2(t)) \approx \mathbf{n} \circ \mathbf{X}(tu^1, tu^2) \approx t \left(u^1 \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^1}(0,0) + u^2 \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^1}(0,0) \right)$$

En résumé, nous obtenons

$$(74) \quad W_X(u) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\mathbf{n} \circ \mathbf{r}) = u^1 \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^1}(0,0) + u^2 \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^1}(0,0) \in T_X\Sigma$$

L'application linéaire $u \mapsto W_X(u)$ de $T_X\Sigma$ dans $T_X\Sigma$ est par définition **l'endomorphisme de Weingarten en X** mentionné dans l'heuristique préliminaire.

Définition 10.1. La seconde forme fondamentale de Σ est le $(0, 2)$ -tenseur F t.q. pour tout champ de vecteurs U, V sur Σ et tout $X \in \Sigma$:

$$F|_X(U, V) = - \langle W_X(U|_X) | V|_X \rangle$$

Proposition 10.2. La seconde forme fondamentale F est un $(0, 2)$ -tenseur **symétrique** ; plus précisément, si \mathbf{X} est la carte associée aux coordonnées \mathbf{x} , alors pour tout $X = \mathbf{X}(x^1, x^2)$

$$(75) \quad F_{\mu\nu}(X) = - \left\langle \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^\mu} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^\nu} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^\nu} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^\mu} \right\rangle$$

Preuve. Nous considérons toujours que $(x^1, x^2) \mapsto \mathbf{X}(x^1, x^2)$ est un paramétrage de Σ dans un voisinage de X et soient $u = u^i \partial_i|_X$ et $v = v^i \partial_i|_X$ deux vecteurs arbitraires de $T_X\Sigma$. Alors d'après l'expression de $W_X(u)$ en (74) :

$$F|_X(u, v) = - \langle W_X(u) | v \rangle = - \left\langle u^1 \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^1} + u^2 \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^1} \Big| v^1 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^2} \right\rangle$$

ce qui donne $F|_X(u, v) = -u^\mu v^\nu F_{\mu\nu}(X)$ où les \mathbf{x} -composantes de F en X sont³⁸

$$(76) \quad F_{\mu\nu}(X) = - \left\langle \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^\mu} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^\nu} \right\rangle$$

Mais, comme $\langle \mathbf{n} \circ \mathbf{X} | \partial \mathbf{X} / \partial x^1 \rangle = \langle \mathbf{n} \circ \mathbf{X} | \partial \mathbf{X} / \partial x^2 \rangle$ sont identiquement nuls dans le domaine de \mathbf{X} , nous avons toujours :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^1} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^2} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left\langle \mathbf{n} \circ \mathbf{X} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^2} \right\rangle - \left\langle \mathbf{n} \circ \mathbf{X} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^1 \partial x^2} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x^2} \left\langle \mathbf{n} \circ \mathbf{X} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^1} \right\rangle - \left\langle \mathbf{n} \circ \mathbf{X} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^2 \partial x^1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^2} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^1} \right\rangle \end{aligned}$$

□

Proposition 10.3. Supposons que $X = (0, 0, 0) \in \Sigma$ avec $T_X M = \mathbb{R}^2$ et soit \mathbf{x} un système de coordonnées gaussiennes en X ; alors la carte associée à \mathbf{x} est de la forme $\mathbf{X}(x^1, x^2) = (x^1, x^2, f(x^1, x^2))$ pour f vérifiant (67) et les \mathbf{x} -composantes de la seconde forme fondamentale en X s'écrivent

$$(77) \quad F_{\mu\nu}(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu}(0, 0)$$

38. Traditionnellement on note aussi $K(X) := F_{11}(X)$, $L(X) := F_{12}(X) = F_{21}(X)$ et $M(X) := F_{22}(X)$.

10.2. La Proposition 10.3 a une conséquence importante : si x sont des coordonnées gaussiennes en un point X de Σ , alors en combinant (69) et (77) il vient :

$$g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) = (F \otimes F)_{\mu\sigma\nu\tau}(X) + (F \otimes F)_{\mu\tau\nu\sigma}(X)$$

Théorème 10.4. Soit (Σ, g) une variété riemannienne de dimension 2 plongée isométriquement dans \mathbb{R}^3 ; alors il existe un $(0, 4)$ -tenseur G – que nous appelons *le tenseur de Gauss* – tel que pour tout quadruplet (U, V, W, Z) de champs de vecteurs sur Σ

$$(78) \quad G(U, V, W, Z) = F(U, W)F(V, Z) + F(U, Z)F(V, W)$$

En particulier G satisfait les symétrie 1 et 2 ainsi que la bi-symétrie en ce sens que

$$G(U, V, W, Z) = G(V, U, W, Z) = G(U, V, Z, W) = G(W, Z, U, V)$$

Corollaire 10.5. Si x est un système de coordonnées gaussiennes en un point X de Σ , alors les composante de G en X coïncident avec les symboles de Riemann : en d'autres termes

$$G_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X)$$

10.3. A partir de l'identité (78) du Théorème 10.4, il est clair que d'une part $G|_X \in \mathcal{Q}_B^+(T_X\Sigma)$, mais que d'autre part $G_{\mu\mu,\mu\mu}(X) = 2F_{\mu\mu}(X)^2$; nous allons voir qu'en général $G_{\mu\mu,\mu\mu}(X) \neq 0$, ce qui dans ce cas signifie que $G|_X \in \mathcal{Q}_B^+(T_X\Sigma) \setminus \mathcal{Q}_C^+(T_X\Sigma)$.

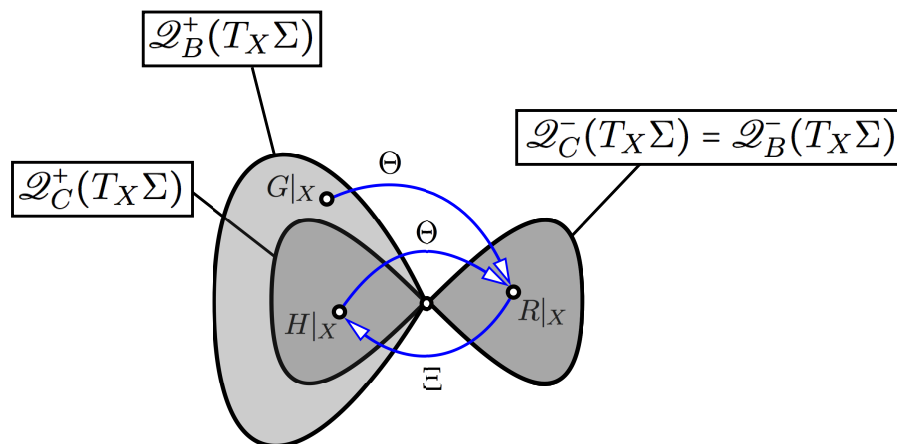


FIGURE 6. Nous considérons ici que Σ est une surface plongée isométriquement dans \mathbb{R}^3 et munie de sa structure euclidienne naturelle ; alors pour tout point X de Σ , l'espace tangent $T_X\Sigma$ est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 de dimension 2 (muni de la structure euclidienne induite par celle de \mathbb{R}^3). Nous savons que les espaces $\mathcal{Q}_C^+(T_X\Sigma)$ et $\mathcal{Q}_C^-(T_X\Sigma)$ sont tous les deux isomorphes ; ici (i.e. dans le cas d'une surface) il sont tous les deux de dimensions 1. L'inclusion $\mathcal{Q}_C^+(T_X\Sigma) \subset \mathcal{Q}_B^+(T_X\Sigma)$ est stricte avec $H|_X \in \mathcal{Q}_C^+(T_X\Sigma)$ et $G|_X \in \mathcal{Q}_B^+(T_X\Sigma) \setminus \mathcal{Q}_C^+(T_X\Sigma)$; par contre, une spécificité de la dimension 2 (et 3) vient de l'identité $\mathcal{Q}_C^-(T_X\Sigma) = \mathcal{Q}_B^-(T_X\Sigma)$. Le fait que $\mathcal{Q}_C^-(T_X\Sigma)$ soit de dimension 1 (et que $R|_X$ soit dans $\mathcal{Q}_C^-(T_X\Sigma)$) a la conséquence importante que $R|_X = -K(X)\Omega|_X \otimes \Omega|_X$, où $\Omega|_X$ est la 2-forme déterminant sur $T_X\Sigma$ et où $K(X)$ est la courbure gaussienne de Σ au point X .

Proposition 10.6. Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 ; pour tout système de coordonnées \mathbf{x} , les \mathbf{x} -composantes du tenseur hessien métrique H et du tenseur de Gauss G sont reliées par l'identité suivante :

$$(79) \quad H_{\mu\nu\sigma\tau} = G_{\mu\nu\sigma\tau} - 1/3G_{\mu\{\nu\sigma\tau\}}$$

De plus, si $\kappa_1(X)$ et $\kappa_2(X)$ sont les courbures principales de Σ en un point X , alors

$$(80) \quad H|_X = G|_X \iff G|_X \in \mathcal{Q}_C^+(T_X\Sigma) \iff \kappa_1(X) = \kappa_2(X) = 0$$

Preuve. Pour démontrer la relation tensorielle (79), il suffit de l'établir en un point X arbitraire de Σ et dans un système donné de coordonnées \mathbf{x} défini dans un voisinage de X . Nous choisissons pour \mathbf{x} un système de coordonnées gaussiennes en X : nous déduisons alors la valeur des \mathbf{x} -composantes $H_{\mu\nu\sigma\tau}(X)$ à partir de la formule générale donnée en (64). En utilisant les propriétés spécifiques des coordonnées gaussiennes (c.f. Proposition 9.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu\sigma\tau}(X) &= \frac{2}{3}g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) - \frac{1}{3}g_{\mu\sigma,\nu\tau}(X) - \frac{1}{3}g_{\mu\tau,\nu\sigma}(X) \\ &= g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) - \frac{1}{3}(g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) + g_{\mu\sigma,\nu\tau}(X) + g_{\mu\tau,\nu\sigma}(X)) \end{aligned}$$

soit encore que $H_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) - 1/3g_{\mu\{\nu,\sigma\tau\}}(X)$; la validité de (79) vient alors du fait que $G_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X)$ lorsque les coordonnées considérées sont gaussiennes en X (c.f. Corollaire 10.5). La première équivalence de (80) découle immédiatement de (79). Pour la deuxième équivalence plaçons nous dans un système \mathbf{x} de coordonnées gaussiennes et réduit au point X (i.e. $\partial_1|_X$ et $\partial_2|_X$ sont les directions des courbures principales) : en particulier, $F_{11}(X)$ et $F_{22}(X)$ coïncident avec les courbures principale de Σ en X , notées respectivement $\kappa_1(X)$ et $\kappa_2(X)$. Ainsi, partant du Théorème 10.4, nous avons

$$(81) \quad G_{\mu\mu\mu\nu}(X) = F_{\mu\mu}(X)F_{\mu\nu}(X) + F_{\mu\nu}(X)F_{\mu\mu}(X) = 2\kappa_\mu(X)F_{\mu\nu}(X)$$

Si $G|_X \in \mathcal{Q}_C^+(T_X\Sigma)$, alors $G_{\mu\mu\mu\mu}(X) = 0$ et pour $\mu = \nu = 1, 2$ nous obtenons d'après (81) que $2\kappa_\mu(X)^2 = 0$, soit encore $\kappa_\mu(X) = 0$. Réciproquement, si $\kappa_1(X) = \kappa_2(X) = 0$, alors (81) entraîne que $G_{\mu\mu\mu\nu}(X) = 0$ et par le Lemme de Moore (Lemme 5.1) $G|_X \in \mathcal{Q}_C^+(T_X\Sigma)$. \square

Corollaire 10.7. Soit (Σ, g) une variété riemannienne de dimension 2 plongée isométriquement dans \mathbb{R}^3 ; alors, pour tout quadruplet (U, V, W, Z) de champs de vecteurs sur Σ

$$R(U, V, W, Z) = G(U, W, V, Z) - G(U, Z, V, W)$$

Preuve. Nous démontrons le corollaire pour les composantes tensorielle relative à un système de coordonné \mathbf{x} supposé quelconque. Nous partons de la Définition B où R est exprimer en fonction du tenseur hessien métrique H , de sorte que par a relation (79) qui existe entre les \mathbf{x} -composantes de H et celle du tenseur de Gauss G , il vient :

$$R_{\mu\nu\sigma\tau} = H_{\mu\sigma\nu\tau} - H_{\mu\tau\nu\sigma} = G_{\mu\sigma\nu\tau} - G_{\mu\tau\nu\sigma} - \frac{1}{3}(G_{\mu\{\sigma\nu\tau\}} - G_{\mu\{\tau\nu\sigma\}})$$

La conclusion vient du fait que

$$G_{\mu\{\sigma\nu\tau\}} - G_{\mu\{\tau\nu\sigma\}} = (G_{\mu\sigma\nu\tau} + G_{\mu\nu\tau\sigma} + G_{\mu\tau\sigma\nu}) - (G_{\mu\tau\nu\sigma} + G_{\mu\nu\sigma\tau} + G_{\mu\sigma\tau\nu}) = 0$$

(où nous avons utilisé la symétrie 2 de G). \square

11. Theorema Egregium

11.1. La définition de la courbure gaussienne $K(X)$ d'une surface Σ de \mathbb{R}^3 en un point X , dépend d'une famille de paramétrisations spéciales de Σ dans le voisinage de X (i.e. les coordonnées gaussiennes). Une question naturelle est de savoir si $K(X)$ peut-être définie indépendamment d'un système de coordonnées (l'idée de « covariance » est donc déjà implicitement présente chez Gauss). D'une certaine manière le Théorème Egregium de Gauss répond à cette question : le lemme suivant va nous permettre de démontrer une version du « Théorème Remarquable » de Gauss.

Lemme 11.1. *Soit (Σ, g) une variété riemannienne de dimension 2 plongée isométriquement dans \mathbb{R}^3 ; alors, dans un système de coordonnées gaussiennes en X , la courbure de Gauss de Σ en X est reliée au tenseur de Riemann, en ce sens que*

$$(82) \quad K(X) = -R_{1212}(X)$$

Preuve. Nous savons (c.f. Théorème 10.4) que le tenseur de courbure R est relié au tenseur de Gauss G , de sorte que $R_{1212} = G_{1122} - G_{1212}$ dans tout système de coordonnées x . Or, nous savons que $G_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = g_{\mu\nu\sigma\tau}(X)$ dès que les coordonnées x sont gaussiennes en X et dans ce cas il vient (c.f. Proposition 9.4) $R_{1212}(X) = g_{11,22}(X) - g_{12,12}(X) = -K(X)$. \square

11.2. Il est possible de déduire du Lemme 11.1 la version tensorielle de (82) grâce aux symétries du tenseur de Riemann. Nous aurons besoin pour cela d'une expression classique de l'aire des parallélogrammes du plan euclidien. Ce dernier résultat est un cas particulier de l'identité de Lagrange (c.f. Appendice B pour plus de détails).

Théorème 11.2. *Si u et v sont deux vecteurs du plan euclidien, alors :*

$$(83) \quad \det(u, v)^2 = \begin{vmatrix} \langle u|u \rangle & \langle u|v \rangle \\ \langle v|u \rangle & \langle v|v \rangle \end{vmatrix}$$

Afin d'établir la version tensorielle de (82), soient x et \hat{x} deux systèmes de coordonnées quelconques dont les domaines s'intersectent. Si nous notons respectivement $R_{\mu\nu\sigma\tau}$ et $\hat{R}_{\mu\nu\sigma\tau}$ les composantes du tenseur de Riemann dans les coordonnées x et \hat{x} alors la formule (7) du changement de coordonnées donnée au § 1.8 nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned} \hat{R}_{1212} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^2} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^\tau}{\partial \hat{x}^2} R_{\mu\nu\sigma\tau} \\ &= \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^2} \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^2} R_{1212} + \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^2} \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^2} R_{2121} \\ &\quad + \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^2} \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^2} R_{2112} + \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^2} \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^2} R_{1221} \end{aligned}$$

et compte tenu des symétries des composantes $R_{\mu\nu\sigma\tau}$, il vient :

$$(84) \quad \hat{R}_{1212} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^2} - \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^2} \right)^2 R_{1212} = \begin{vmatrix} \partial x^1 / \partial \hat{x}^1 & \partial x^1 / \partial \hat{x}^2 \\ \partial x^2 / \partial \hat{x}^1 & \partial x^2 / \partial \hat{x}^2 \end{vmatrix}^2 R_{1212}$$

Ici, nous reconnaissons la matrice $(\partial x^i / \partial \hat{x}^j(X))$ représentant le changement de base entre les deux bases holonomes $(\partial / \partial x^1, \partial / \partial x^2)$ et $(\partial / \partial \hat{x}^1, \partial / \partial \hat{x}^2)$ de $T_X \Sigma$, de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}^\mu} = \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^2}$$

Si les coordonnées x sont gaussiennes en X alors la base $(\partial / \partial x^1|_X, \partial / \partial x^2|_X)$ est une base orthonormée de $T_X \Sigma$; par suite, $\partial x^\mu / \partial \hat{x}^\nu = \langle \partial / \partial \hat{x}^\mu | \partial / \partial x^\nu \rangle$ et donc (Théorème 11.2) :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \partial x^1 / \partial \hat{x}^1 & \partial x^1 / \partial \hat{x}^2 \\ \partial x^2 / \partial \hat{x}^1 & \partial x^2 / \partial \hat{x}^2 \end{vmatrix}^2 &= \begin{vmatrix} \langle \partial / \partial \hat{x}^1 | \partial / \partial x^1 \rangle & \langle \partial / \partial \hat{x}^1 | \partial / \partial x^2 \rangle \\ \langle \partial / \partial \hat{x}^2 | \partial / \partial x^1 \rangle & \langle \partial / \partial \hat{x}^2 | \partial / \partial x^2 \rangle \end{vmatrix}^2 \\ &= \begin{vmatrix} \langle \partial / \partial \hat{x}^1 | \partial / \partial \hat{x}^1 \rangle & \langle \partial / \partial \hat{x}^1 | \partial / \partial \hat{x}^2 \rangle \\ \langle \partial / \partial \hat{x}^2 | \partial / \partial \hat{x}^1 \rangle & \langle \partial / \partial \hat{x}^2 | \partial / \partial \hat{x}^2 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{g}_{11}(X) & \hat{g}_{12}(X) \\ \hat{g}_{21}(X) & \hat{g}_{22}(X) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

où nous reconnaissons les composantes $\hat{g}_{\mu\nu}(X) := \langle \partial / \partial \hat{x}^\mu | \partial / \partial \hat{x}^\nu \rangle$, du tenseur métrique en X . Partant de l'identité (84), nous obtenons grâce au Lemme 11.1 que

$$(85) \quad \hat{R}_{1212}(X) = \begin{vmatrix} \hat{g}_{11}(X) & \hat{g}_{12}(X) \\ \hat{g}_{21}(X) & \hat{g}_{22}(X) \end{vmatrix} K(X)$$

Comme conséquence du Lemme 11.1, nous pouvons énoncer le « *Theorema Egregium* ».

Théorème 11.3. *Soit (Σ, g) une variété riemannienne de dimension 2 plongée isométriquement dans \mathbb{R}^3 ; alors dans tout systèmes de coordonnées, nous avons*

$$(86) \quad K = - \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$$

11.3. Pour tout $X \in \Sigma$ le tenseur métrique $g|_X$ coïncide avec la restriction à $T_X \Sigma$ du produit scalaire de \mathbb{R}^3 , de sorte que pour tout $v, u \in T_X \Sigma$, nous avons $g|_X(v, u) = \langle u | v \rangle$. Dans la suite, nous noterons $\Omega|_X(u, v)$ le déterminant du couple (u, v) de vecteurs de $T_X \Sigma$ pour la structure euclidienne de $T_X \Sigma$ associée à $g|_X$: il est alors facile de vérifier que $X \mapsto \Omega|_X$ définit un $(0, 2)$ -tenseur sur Σ . Nous pouvons aussi dire que Ω est le $(0, 2)$ -tenseur anti-symétrique tel que pour tout X et $u, v \in T_X \Sigma$ non colinéaires :

$$(87) \quad \Omega|_X(u, v) = \frac{1}{|u \times v|} \det(u, v, u \times v)$$

Nous allons démontrer [une deuxième forme du Théorème Egregium](#) :

Théorème 11.4. *Soit (Σ, g) une variété riemannienne de dimension 2 plongée isométriquement dans \mathbb{R}^3 ; alors, la courbure de Gauss $X \mapsto K(X)$ définie en (71) est le champ scalaire tel que*

$$(88) \quad R = -K \Omega \otimes \Omega$$

Preuve. Etant donné x un système de coordonnées quelconque sur Σ , il découle de l'identité de Lagrange (c.f. Théorème 11.2), que les x -composantes de Ω vérifie

$$(89) \quad (\Omega_{\mu\nu})^2 = \begin{vmatrix} \langle \partial_\mu | \partial_\mu \rangle & \langle \partial_\mu | \partial_\nu \rangle \\ \langle \partial_\nu | \partial_\mu \rangle & \langle \partial_\nu | \partial_\nu \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{\mu\mu} & g_{\mu\nu} \\ g_{\nu\mu} & g_{\nu\nu} \end{vmatrix} = g_{\mu\mu}g_{\nu\nu} - g_{\mu\nu}g_{\nu\mu}$$

Les propriétés de symétrie du tenseur de Riemann covariant R définie sur Σ assurent que pour tout $X \in \Sigma$, la forme quadrilinéaire $R|_X$ appartient à l'espace vectoriel $\mathcal{Q}_C^-(T_X \Sigma)$. Or, l'espace tangent $T_X \Sigma$ étant de dimension 2, nous savons (c.f. Proposition 6.2) que

$\mathcal{Q}_C^-(T_X\Sigma)$ est de dimension 1. Nous pouvons même dire un peu plus en utilisant le $(0, 2)$ -tenseur Ω défini en (87); en effet, il est immédiat³⁹ de vérifier que $\Omega|_X \otimes \Omega|_X$ est un élément non nul de $\mathcal{Q}_C^-(T_X\Sigma)$ et par suite, il existe un champ scalaire $X \mapsto \alpha(X)$ t.q.

$$R = -\alpha \Omega \otimes \Omega$$

Si x est un système de coordonnées gaussiennes en un point X donné, alors nous savons (c.f. Lemme 11.1) que la composante $R_{1212}(X)$ du tenseur de Riemann covariant coïncide, au signe près, avec la courbure gaussienne $K(x)$; mais d'autre part, nous savons (c.f. Proposition 9.1) que la base $(\partial_1|_X, \partial_2|_X)$ de $T_X\Sigma$ est orthonormée et par suite :

$$\begin{aligned} K(X) = -R_{1212}(X) &= -R|_X(\partial_1|_X, \partial_2|_X, \partial_1|_X, \partial_2|_X) \\ &= \alpha(X)\Omega|_X(\partial_1|_X, \partial_2|_X)\Omega|_X(\partial_1|_X, \partial_2|_X) = \alpha(X) \end{aligned}$$

□

11.4. Dans une troisième forme du Theorema Egregium (c.f. Théorème 11.6), la courbure s'exprime en fonction de la première et de la deuxième forme fondamentale. Pour voir cela, nous combinons la Proposition 9.4, le Lemme 11.1 avec le Théorème 10.4 pour obtenir le théorème suivant, où les composantes non nulles du tenseur de Riemann (dans un système quelconque de coordonnées) sont reliées à la seconde forme fondamentale.

Théorème 11.5. Soit (Σ, g) une variété riemannienne de dimension 2 plongée isométriquement dans \mathbb{R}^3 ; alors, dans tout système de coordonnées x les composantes du tenseur de Riemann sont reliés aux composantes de la seconde forme fondamentale de sorte que

$$R_{1212} = -(F_{11}F_{22} - F_{12}F_{12}) = - \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}$$

Si nous nous plaçons dans une carte quelconque, nous savons (c.f. Théorème 11.4) que

$$(90) \quad K = -\frac{R_{1212}}{g_{\mu\mu}g_{\nu\nu} - g_{\mu\nu}g_{\mu\nu}} = R_{1212} \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{vmatrix}$$

où nous rappelons que $g^{\mu\nu}$ dénote le mineur d'indice (μ, ν) de la matrice (g_{ij}) des composantes du tenseur métrique. Nous pouvons aussi retrouver (90) à partir du Théorème 11.4; en effet, si U et V sont deux champs de vecteurs sur Σ , alors pour tout point $X \in \Sigma$ pour lequel $U|_X$ et $V|_X$ ne sont pas colinéaires, nous avons

$$(91) \quad K(X) = -\frac{R|_X(U, V, U, V)}{\Omega|_X(U, V)^2}$$

39. Les anti-symétries 1 et 2 sont évidentes et la cyclicité peut se vérifier directement du fait que

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta & \delta \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{vmatrix}$$

et que d'autre part, pour tout x, y :

$$\begin{vmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & x \\ 0 & \delta & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & x & \alpha \\ 0 & y & \beta \end{vmatrix} = 0$$

Si nous nous plaçons dans le domaine d'une carte x quelconque, alors nous pouvons retrouver le Théorème 11.3. En effet en appliquant localement (91) avec $U = \partial_1 = \partial/\partial x^1$ et $V = \partial_2 = \partial/\partial x^2$ (qui ne sont par définition jamais colinéaires) et (91) devient

$$(92) \quad K = -\frac{R(\partial_1, \partial_2, \partial_1, \partial_2)}{\Omega(\partial_1, \partial_2)^2} = -\frac{R_{1212}}{\Omega_{12}\Omega_{12}}$$

Nous retrouvons (90) grâce à l'identité de Lagrange qui assure par (89) que

$$\Omega_{12}\Omega_{12} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{12}$$

Le Théorème 11.5 nous permet ainsi d'énoncer la troisième forme du Theorema Egregium annoncée comme suit.

Théorème 11.6. *Soit (Σ, g) une variété riemannienne de dimension 2 plongée isométriquement dans \mathbb{R}^3 et K le champ scalaire de la courbure gaussienne sur Σ ; alors,*

$$(93) \quad K = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{vmatrix}$$

11.5. Nous terminons par la formulation complète du *Theorema Egregium* telle qu'obtenue par Gauss en ce sens que la courbure d'une surface en un point peut s'exprimer (indépendamment de la paramétrisation) uniquement à partir des coefficients de la première forme fondamentale et de leurs dérivées premières et secondes. Partant de la formule (86) du Théorème 11.3, il nous « suffit » donc de vérifier que R_{1212} peut s'exprimer uniquement en utilisant les quantités $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu,\sigma}$ et $g_{\mu\nu,\sigma\tau}$: ce dernier point est délicat et dépend de calculs difficiles initialement effectués par Gauss et Riemann (nous y reviendrons). Ici nous prenons un raccourci en partant de l'expression des composantes du tenseur de courbure (obtenus par Riemann) et donnés dans le Théorème 7.1, de sorte que :

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \frac{1}{2}(g_{11,22} + g_{22,11} - g_{12,21} - g_{21,12}) \\ &\quad + g^{\epsilon\eta}(C_{11,\epsilon}C_{22,\eta} - C_{12,\epsilon}C_{21,\eta}) \\ &= \frac{1}{2}(g_{11,22} + g_{22,11}) - g_{12,12} \\ &\quad + g^{11}(C_{11,1}C_{22,1} - C_{12,1}C_{21,1}) + g^{12}(C_{11,1}C_{22,2} - C_{12,1}C_{21,2}) \\ &\quad + g^{21}(C_{11,2}C_{22,1} - C_{12,2}C_{21,1}) + g^{22}(C_{11,2}C_{22,2} - C_{12,2}C_{21,2}) \\ &= \frac{1}{2}(g_{11,22} + g_{22,11}) - g_{12,12} \\ &\quad + \frac{g^{22}}{g}(C_{11,1}C_{22,1} - C_{12,1}C_{21,1}) - \frac{g^{21}}{g}(C_{11,1}C_{22,2} - C_{12,1}C_{21,2}) \\ &\quad - \frac{g^{12}}{g}(C_{11,2}C_{22,1} - C_{12,2}C_{21,1}) + \frac{g^{11}}{g}(C_{11,2}C_{22,2} - C_{12,2}C_{21,2}) \end{aligned}$$

où nous notons $\mathbf{g} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$. En exprimant les symboles de Christoffel en fonction des dérivées premières des composantes métriques (et quelques calculs) :

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \frac{1}{2}(g_{11,22} + g_{22,11}) - g_{12,12} \\ &\quad + \frac{g_{22}}{4\mathbf{g}}(g_{11,1}(2g_{12,2} - g_{22,1}) - g_{11,2}g_{11,2}) \\ &\quad - \frac{g_{12}}{4\mathbf{g}}(g_{11,1}g_{22,2} - 2g_{11,2}g_{22,1} + (2g_{12,1} - g_{22,1})(2g_{12,2} - g_{22,1})) \\ &\quad + \frac{g_{11}}{4\mathbf{g}}(g_{22,2}(2g_{12,1} - g_{11,2}) - g_{22,1}g_{22,1}) \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons l'expression de la courbure gaussienne annoncée, soit :

$$\begin{aligned} (94) \quad K &= -\frac{1}{2\mathbf{g}}(g_{11,22} + g_{22,11}) + \frac{1}{\mathbf{g}}g_{12,12} \\ &\quad - \frac{g_{22}}{4\mathbf{g}^2}(g_{11,1}(2g_{12,2} - g_{22,1}) - g_{11,2}g_{11,2}) \\ &\quad + \frac{g_{12}}{4\mathbf{g}^2}(g_{11,1}g_{22,2} - 2g_{11,2}g_{22,1} + (2g_{12,1} - g_{22,1})(2g_{12,2} - g_{22,1})) \\ &\quad - \frac{g_{11}}{4\mathbf{g}^2}(g_{22,2}(2g_{12,1} - g_{11,2}) - g_{22,1}g_{22,1}) \end{aligned}$$

Avec un effort calculatoire (substantiel) il est possible de donner une expression plus « compacte » de la courbure gaussienne K (c.f. [Kli72, Chap. 37 eq. (8)]) : nous en profitons pour introduire les notations utilisées par Gauss, où $(x^1, x^2) = (u, v)$ et $(g_{11}, g_{22}, g_{12}, g_{21}) = (E, F, G, G)$ et $H = (EF - G^2)^{1/2}$ (voir aussi Appendice C), de sorte que

$$(95) \quad K = \frac{1}{2H} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{F}{EH} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{H} \frac{\partial G}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{2}{H} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{H} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{EH} \frac{\partial E}{\partial u} \right) \right)$$

12. Appendice A : Lemme de Gauss de la géométrie riemannienne

12.1. L'heuristique du § 3 basée sur les symétries des ellipsoïdes (et donc sur le « *théorème spectral* ») donne une interprétation géométrique claire du « *lemme de Gauss spectral* » (c.f. Théorème 3.4). Dans cet Appendice, nous allons retrouver ce résultat de plusieurs manières : nous verrons en particulier que c'est une forme équivalente d'un résultat de géométrie riemannienne (établi par Gauss pour les surfaces) et que nous appelons le « *lemme de Gauss géométrique* ».

12.2. Considérons que $t \mapsto \xi(t)$ est une courbe du plan euclidien représenté par \mathbb{R}^2 et supposons que $O = (0, 0)$ ne soit pas dans le support (C) de ξ . Dans des conditions raisonnables, si $|\xi(t)|$ est minimal en t_0 , alors la dérivée de $|\xi(t)|$ (par rapport à t) évaluée en $t = t_0$ est nulle, ce qui entraîne que $\langle \dot{\xi}(t_0) | \xi(t_0) \rangle = 0$. En considérant le plan euclidien comme une variété riemannienne, il est possible d'interpréter ce résultat de la manière suivante : si une géodésique (D) (i.e. une droite) issue de O coupe (C) en un point X de sorte que OX (distance euclidienne de O à X) réalise la distance de O à (C) , alors (D) et (C) se coupent orthogonalement en X . L'analogue de ce dernier résultat en géométrie riemannienne dépend de la forme spectrale du lemme de Gauss (c.f. Théorème 3.4).

Théorème 12.1. Soient ρ_X le rayon d'injectivité de l'exponentielle en un point X d'une variété riemannienne (M, g) de dimension n et soit (C) le support d'un chemin $t \mapsto \xi(t)$ sur M ne

contenant pas X et tel que la distance riemannienne $d_R(X, \xi(t))$ soit strictement inférieure à ρ_X . Si $Y = \xi(t_0)$ est un point t.q. $r := d_R(X, Y)$ réalise la distance (riemannienne) de X à (C) et si $t \mapsto \gamma(t)$ est la géodésique de vitesse unité, issue de X et t.q. $\gamma(r) = Y$ alors, $\langle \dot{\gamma}(r) | \dot{\xi}(t_0) \rangle = 0$.

Preuve. Soient x un système de coordonnées normales en un point X de M et (C) le support d'un chemin $t \mapsto \xi(t)$ supposé inclus dans le domaine de définition de x et ne contenant pas X . Alors, $x(X) = (0, \dots, 0) = 0$ et la carte $\mathbf{X} (\equiv \exp_X)$ associée est une isométrie radiale d'un voisinage de 0 (dans \mathbb{R}^n) sur un voisinage de X (dans M), de sorte que $d_R(X, \xi(t))^2 = \xi^\mu(t)\xi^\nu(t)\delta_{\mu\nu}$, où $(\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ sont les x -composantes de $\xi(t)$ pour tout t . Si $Y = \xi(t_0)$ est un point tel que $r := d_R(X, Y)$ est la distance riemannienne (> 0) de X à (C) , alors la dérivée de $\xi^\mu(t)\xi^\nu(t)\delta_{\mu\nu}$ par rapport à t s'annule en $t = t_0$, ce qui s'écrit :

$$(96) \quad \dot{\xi}^\mu(t_0)\xi^\nu(t_0)\delta_{\mu\nu} = 0$$

Or par le **lemme de Gauss spectral** (c.f. Théorème 3.4), nous déduisons de (96) que

$$(97) \quad \dot{\xi}^\mu(t_0)\xi^\kappa(t_0)g_{\mu\kappa}(Y) = 0$$

Si $t \mapsto \gamma(t)$ est la géodésique issue de X , de vitesse unité et t.q. $\gamma(r) = Y$ alors,

$$\gamma(t) = \mathbf{X} (t\xi^1(t_0)/r, \dots, t\xi^n(t_0)/r)$$

(où nous utilisons la définition de la géodésique γ et la relation entre \exp_X et la carte \mathbf{X}). Par suite, $r\dot{\gamma}(r) = \xi^\mu(t_0)\partial_\mu|_Y$ et nous pouvons conclure avec (97) que $\langle \dot{\gamma}(r) | \dot{\xi}(t_0) \rangle = 0$. \square

Soit X et Y deux points de M t.q. $0 < \rho = d_R(X, Y) < \rho_X$; alors en considérant les germes de chemin $t \mapsto \xi(t)$ en Y t.q. $d_R(X, \xi(t)) = \rho$, nous déduisons le Lemme de Gauss géométrique comme corollaire du Théorème 12.1 (et donc du le Lemme de Gauss spectral).

Théorème 12.2 (Lemme de Gauss Géométrique). Soient ρ_X le rayon d'injectivité de l'exponentielle en un point X d'une variété riemannienne (M, g) de dimension n ; pour tout $0 < \rho < \rho_X$ l'hypersphère géodésique $\Sigma(X, \rho)$ formée des $Y \in M$ tels que $d_R(X, Y) = \rho$ est une sous-variété de M de dimension $n - 1$ qui est orthogonale aux géodésiques issues radialement de X .

12.3. Soit $x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto \phi(x)$ un champ scalaire (encore appelé potentiel) défini sur un ouvert de \mathbb{R}^n (euclidien) : le point x est dit régulier lorsque le **gradient vecteur** de ϕ au point x – noté $\mathbf{grad}|_x(\phi)$ – ne s'annule pas. Si $\phi(x) = a$, alors x appartient à l'**équipotentielle** $\{\phi = a\}$; l'hypothèse de régularité sur x signifie alors que $\{\phi = a\}$ est (localement) une hypersurface de \mathbb{R}^n . Considérons alors que $t \mapsto \xi(t) = (\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ est un germe de chemin en x (i.e. $\xi(0) = x$) dont le support est contenu dans $\{\phi = a\}$ (dans un voisinage de x) : en d'autres termes, il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et tel que $\phi(\xi(t)) = a$ pour tout $t \in I$. Comme $\phi(\xi(t))$ est constant sur I , il vient :

$$(98) \quad 0 = \frac{d}{dt}\phi(\xi(t)) = \dot{\xi}^i(t)\frac{\partial\phi}{\partial x^i}(\xi(t)) = \langle \dot{\xi}(t) | \mathbf{grad}|_{\xi(t)}(\phi) \rangle$$

Nous venons de montrer le fait bien connu affirmant que les lignes de champs d'un potentiel scalaire (courbe intégrale du gradient vecteur associé au potentiel) sont normales aux équipotentielles. Plaçons nous maintenant dans le cas particulier où le champ scalaire ϕ est défini sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n et possède la symétrie polaire, en ce sens

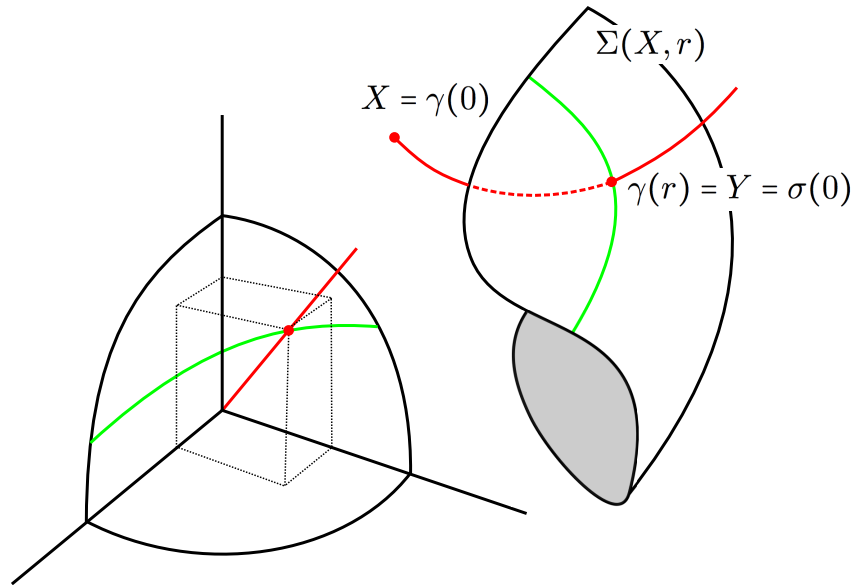


FIGURE 7. Lemme de Gauss géométrique

que $\phi(x) = \varphi(|x|)$, où $r \mapsto \varphi(r)$ est une fonction réelle (lisse) définie dans un voisinage de 0 dans \mathbb{R} et supposée paire : alors en calculant directement les dérivées partielles $\partial\phi/\partial x^i$ par dérivation des fonction composées il vient :

$$(99) \quad \mathbf{grad}|_x(\phi) = \dot{\varphi}(|x|)x/|x|$$

12.4. La version riemannienne des propriétés (98) et (99) du gradient d'un champ scalaire défini sur un ouvert de \mathbb{R}^n permet d'établir le lemme de Gauss géométrique ; nous pourrons aussi démontrer l'équivalence entre le lemme de Gauss géométrique et le lemme de Gauss spectral. Pour voir cela, considérons que φ un champ scalaire défini sur une variété riemannienne (M, g) de dimension n . Dans un premier temps, il est facile de vérifier qu'il existe un tenseur de valence $(0, 1)$ (i.e. une forme différentielle) qu'on appelle le **gradient covariant**⁴⁰ de φ et noté⁴¹ $\nabla\varphi$ et dont les x -composantes coïncident avec $\partial\varphi/\partial x^i$, lorsque x est un système de coordonnées sur M . Par définition, le **gradient vecteur (ou gradient contravariant)** $\mathbf{grad}(\varphi)$ est le champ de vecteur t.q. $\nabla\varphi(V) = \langle \mathbf{grad}(\varphi)|V \rangle$ pour tout champ de vecteur V sur M ; les x -composantes de $\mathbf{grad}(\varphi)$ se déduisent alors des x -composantes de $\nabla\varphi$ par le relèvement de l'indice covariant, en ce sens que

$$\mathbf{grad}(\varphi) = g^{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Proposition 12.3. Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n et φ un champ scalaire sur M . Étant donné X un point tel que $\varphi(X) = r$ et $t \mapsto \xi(t)$ un germe de chemin en X (i.e. $\xi(0) = X$) et tel que $\varphi(\xi(t)) = r$ pour tout t dans un voisinage de 0, alors :

$$\left\langle \dot{\xi}(0) \middle| \mathbf{grad}|_{\xi(0)}(\varphi) \right\rangle = 0$$

40. Attention aux confusions possibles avec les notations d'analyse vectorielle classique!

41. La notation est cohérente avec la dérivation covariante relativement à la connexion de Levi-Civita.

Preuve. Soit \mathbf{X} la carte associée à un système de coordonnées \mathbf{x} et soient $(\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ les \mathbf{x} -composantes de ξ , de sorte que $\xi(t) = \mathbf{X}(\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$. Comme $\varphi(\xi(t)) \equiv r$ pour tout t dans un voisinage de 0 la dérivée de $d\varphi(\xi(t))/dt$ s'annule en $t = 0$, ce qui donne :

$$0 = \dot{\xi}^i(0) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(\xi(0)) = g_{ik}(\xi(0)) \dot{\xi}^i(0) g^{ki}(\xi(0)) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(\xi(0)) = \left\langle \dot{\xi}(0) \middle| \mathbf{grad}|_{\xi(0)}(\varphi) \right\rangle$$

□

Nous supposons maintenant que (M, g) est géodésiquement complète : alors deux points quelconques X et Y sont toujours reliés par (au moins) une géodésique : cela permet de définir la distance riemannienne $d_R(X, Y)$ entre X et Y , comme l'infimum des longueurs des chemins reliant X et Y . L'hypothèse de complétude géodésique entraîne que pour tout $X, Y \in M$ il existe (au moins) une géodésique γ de vitesse unité issue de X et t.q. $Y = \gamma(d_R(X, Y))$. Fixons un point de base X et définissons le champ scalaire ρ t.q.

$$\rho(Y) := d_R(X, Y)$$

Théorème 12.4. Soit $r \mapsto \varphi(r)$ une fonction réelle (lisse) définie dans un voisinage de 0 dans \mathbb{R} et supposée paire. Si ρ_X est le rayon d'injectivité de l'exponentielle en un point X d'une variété riemannienne (M, g) de dimension n et si ϕ est un champ scalaire défini sur $\mathcal{U}_X := \{d_R(X, Y) < \rho_X\}$ et t.q. $\phi(Y) = \varphi(d_R(X, Y))$ alors, pour tout système de coordonnée \mathbf{x} normal en X

$$\mathbf{grad}|_Y(\phi) = \dot{\varphi}(d_R(X, Y)) \frac{\mathbf{x}^i(Y)}{d_R(X, Y)} \partial_i|_Y$$

Théorème 12.5. Soit (M, g) une variété riemannienne géodésiquement complète et \mathbf{x} un système de coordonnées normales en un point X de M ; alors, pour tout $Y \in \mathcal{U}_X \setminus \{X\}$

$$(100) \quad \mathbf{grad}|_Y(\rho) = \frac{\mathbf{x}^i(Y)}{\rho(Y)} \partial_i|_Y \iff g^{ij}(Y) \mathbf{x}^k(Y) \delta_{kj} = \mathbf{x}^i(Y)$$

Preuve. Rappelons que $\mathcal{U}_X := \exp_X \{v \in T_X M ; \langle v|v \rangle < r_X\}$ où r_X est le rayon d'injectivité de \exp_X . Soient \mathbf{x} un système de coordonnées normales en X et \mathbf{X} la carte associée (i.e. $\mathbf{X} \approx \exp_X$) : alors ⁴² l'unique géodésique $t \mapsto \gamma(t)$ de vitesse unité issue de $X = \mathbf{X}(0, \dots, 0)$ et reliant X et $Y = \mathbf{X}(y^1, \dots, y^n)$ vérifie

$$\gamma(t) = \exp_X \left(t \frac{y^\mu}{\rho(Y)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\mu} \Big|_X \right) = \mathbf{X} \left(t \frac{y^1}{\rho(Y)}, \dots, t \frac{y^n}{\rho(Y)} \right)$$

Du fait que $\rho(Y) = (y^i y^j \delta_{ij})^{1/2}$, nous avons

$$\mathbf{grad}|_Y(\rho) = \frac{g^{ij}(Y) y^k \delta_{kj}}{\rho(Y)} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i} \Big|_Y$$

l'équivalence entre (100) est alors évidente.

42. En effet, supposons que $Y = \gamma(t_0)$ où $\gamma(t) = \exp(tv)$ avec $v \in T_X M$ t.q. $g|_X(v, v) = 1$. Alors, par définition de la distance riemannienne entre X et Y , la condition $Y \in \mathcal{U}_X$, assure qu'il est nécessaire que

$$d_R(X, Y) = \int_0^{t_0} \sqrt{g|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

Or, par définition des géodésiques inertielles, $\dot{\gamma}(t)$ est transportée parallèlement (pour la connexion de Levi-Civita) le long de γ : le fait que $d_R(X, Y) = t_0$ découle directement du fait que

$$g|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) \equiv g|_X(\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)) = g|_X(v, v) = 1$$

□

Dans le contexte du Théorème 12.5, la distance riemannienne $\rho(Y)$ de X à Y (dans un voisinage de X) entraîne que l'équipotentielle $\Sigma_r = \{\rho = r\}$ coïncide avec l'hypersphère riemannienne $\Sigma(X, r)$ de centre X et de rayon r : d'après la Proposition 12.3, nous savons donc que si $Y \in \Sigma_r$, alors $\text{grad}|_Y(\rho)$ est orthogonal à Σ_r en Y . Par définition la première équation de l'équivalence (100) signifie que $\text{grad}|_Y(\rho)$ coïncide avec la dérivée $\dot{\gamma}(\rho(y))$ de la géodésique de vitesse unité issue de X et passant par Y au temps $\rho(y)$: c'est donc une forme équivalent du Lemme de Gauss.

13. Appendice B : L'identité de Lagrange

L'inégalité de Cauchy-Schwarz – affirmant que pour $u, v \in \mathbb{R}^n$ le produit scalaire $\langle u|v \rangle$ est majoré par $|u| \cdot |v|$ – peut être vue comme un corollaire de l'identité de Lagrange

$$(101) \quad \langle u|u \rangle \langle v|v \rangle - \langle u|v \rangle^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \det_{ij}(u, v)$$

où nous notons \det_{ij} le mineur d'indice (i, j) . Dans le cas du plan euclidien, (101) est équivalente à « l'identité de Diophante » qui nous dit que⁴³ que pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$(102) \quad (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

Si $u = (a, b)$ et $v = (c, d)$ alors (dans \mathbb{R}^2 euclidien) le membre de gauche de (102) correspond à $\langle u|u \rangle \langle v|v \rangle$. Pour retrouver l'identité de Lagrange en dimension 2, nous devons légèrement modifier le membre de droite en écrivant

$$\begin{aligned} (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 &= \left((ac)^2 + (bd)^2 - 2(ac)(bd) \right) + \left((ad)^2 + (bc)^2 + 2(ad)(bc) \right) \\ &= \left((ac)^2 + (bd)^2 + 2(ac)(bd) \right) + \left((ad)^2 + (bc)^2 - 2(ad)(bc) \right) \\ &= \langle u|v \rangle^2 + \det(u, v) \end{aligned}$$

où $\det(\cdot, \cdot)$ est le déterminant sur \mathbb{R}^2 ; finalement (102) devient :

$$(103) \quad \det(u, v)^2 = \begin{vmatrix} \langle u|u \rangle & \langle u|v \rangle \\ \langle v|u \rangle & \langle v|v \rangle \end{vmatrix} = \langle u|u \rangle \langle v|v \rangle - \langle u|v \rangle^2$$

La différence de forme entre l'identité de Diophante (102) et l'identité de Lagrange (103) tient au fait que la première est adaptée à un problème d'arithmétique (le théorème des deux carrés) alors que la deuxième décrit une propriété géométrique (définition du déterminant indépendante des coordonnées⁴⁴).

43. L'identité de Diophante traduit aussi le fait que le module du produit des nombres complexes $a + ib$ et $c + id$ est égal au module du produit de ces deux nombres.

44. (1) : L'identité de Lagrange en dimension 3 traduit la propriétés de multiplicativité des modules dans l'espace des quaternions purs.)

(2) : L'identité de Lagrange est un cas particulier de l'identité de Cauchy-Binet : si A est une matrice $n \times m$ (avec $n \leq m$) et si S est un sous ensemble de $\{1, \dots, m\}$ de cardinal $|S| = s$, alors A_S est la matrice $s \times s$ extraite de A suivant les indices dans S ; alors; si nous notons \det le déterminant agissant sur les matrices carrées, et si A (resp. B) est un matrice $n \times m$ (resp. $m \times n$), alors nous avons

$$\det(AB) = \sum_{S \subset \{1, \dots, m\}; |S|=n} \det(A_S) \det(B_S)$$

Lorsque $m = n$ nous retrouvons que $\det(AB) = \det(A) \det(B)$: il semblerait que la formule de Cauchy-Binet soit la première démonstration de la propriété de multiplicativité du déterminant.

14. Appendice C : Formule de la courbure gaussienne (d'après Wikipédia)

Nous donnons ici une démonstration classique de la formule donnant la courbure de Gauss en un point d'une surface en fonction des première et seconde formes fondamentales : la présentation qui en est faite ici (tirée de Wikipédia) respecte un certain nombre de notations qui remontent à Gauss (par exemple les variables u et v du paramétrage de la surface étaient utilisées par Gauss lui-même). Pour voir cela, considérons une surface Σ (supposée régulière) paramétrée au moyen de deux paramètres u et v , et soit

$$(104) \quad I = Edu^2 + 2Gdudv + Fdv^2$$

la première forme fondamentale et

$$(105) \quad II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

la seconde forme fondamentale. Alors la courbure de Gauss vaut :

$$K = \frac{LN - M^2}{EF - G^2}$$

Plus précisément, soit $(u, v) \rightarrow \theta(u, v)$ un paramétrage de la surface. Une base du plan (vectoriel) tangent $T_P\Sigma$ au point $P = \theta(u, v)$ est donnée par $\partial\theta/\partial u$ et $\partial\theta/\partial v$. Soient $X = a\partial\theta/\partial u + b\partial\theta/\partial v$ et $Y = c\partial\theta/\partial u + d\partial\theta/\partial v$; dans la suite nous utiliserons une représentation matricielle, où les vecteurs X et Y sont identifiés à des matrices 2×1 , de sorte que

$$X \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y \equiv \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

La première forme fondamentale donne l'expression dans la base $(\partial\theta/\partial u, \partial\theta/\partial v)$ du produit scalaire dans $T_P\Sigma$ et (104) se traduit matriciellement en écrivant :

$$I(X, Y) = \langle X|Y \rangle = {}^t X \begin{pmatrix} E & G \\ G & F \end{pmatrix} Y$$

La deuxième forme fondamentale est la forme bilinéaire associée à l'endomorphisme symétrique de Weingarten W , dont les deux valeurs propres sont les courbures principales de la surface au point considéré et (105) se traduit matriciellement en écrivant :

$$II(X, Y) = \langle X|W(Y) \rangle = {}^t X \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} Y$$

Par conséquent, si Y est un vecteur propre de W associé à la valeur propre λ , alors pour tout vecteur X nous avons $\langle X|W(Y) \rangle = \lambda \langle X|Y \rangle$, soit encore $II(X, Y) = \lambda I(X, Y)$; en notation matricielle nous avons :

$${}^t X \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} Y = \lambda {}^t X \begin{pmatrix} E & G \\ G & F \end{pmatrix} Y$$

Cette relation étant vraie pour tout X , il vient :

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} Y = \lambda \begin{pmatrix} E & G \\ G & F \end{pmatrix} Y$$

Le vecteur propre Y étant non nul, cela entraîne que la matrice

$$\begin{pmatrix} L - \lambda E & M - \lambda G \\ M - \lambda G & N - \lambda F \end{pmatrix}$$

est non inversible : l'annulation de son déterminant s'écrit

$$(EF - G^2)\lambda^2 - (EN + FL - 2MG)\lambda + LN - M^2 = 0$$

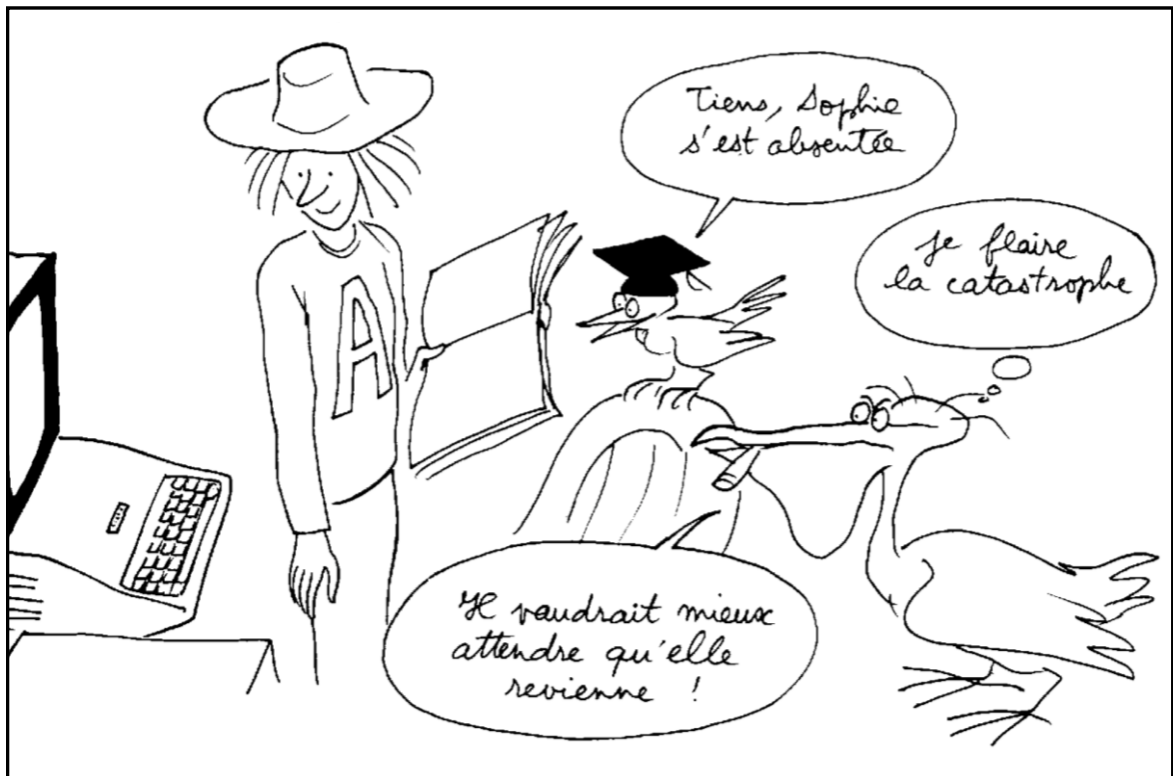
Les racines de cette équation sont les courbures principales : leur produit vaut donc

$$\frac{LN - M^2}{EF - G^2}$$

qui n'est autre que la courbure de Gauss cherchée.

RÉFÉRENCES

- [Arn13] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.
- [BG68] R.L. Bishop and S.I. Goldberg. *Tensor Analysis on Manifolds*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1968.
- [Bou92] J.-P. Bourguignon. Transport parallèle et connexions en géométrie et en physique, in "1830-1930 : a century of geometry". Springer-Verlag, *Lect. Notes in Physics*, 402 :150–164, 1992.
- [DD87] A. Dahan-Dalmédica. Mécanique et théorie des surfaces : les travaux de Sophie Germain. *Historia Mathematica*, 14 :347–365, 1987.
- [Die86] J. Dieudonné. *Abrégé d'histoire des mathématiques : 1700-1900*. Hermann, 1986.
- [Eul60] L. Euler. Recherches sur la courbure des surfaces. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin*, pages 119–143, 1760.
- [Gau28] K. F. Gauss. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Typis Dieterichianis, 1828.
- [Kli72] M. Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Presse – New York, 1972.
- [Mil63] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.
- [Moo09] J. D. Moore. Lectures on differential geometry math 240bc, 2009.
- [Nas54] J. Nash. C1-isometric imbeddings. *Annals of Mathematics*, 60 :383–396, 1954.
- [Nas56] J. Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Annals of Mathematics*, 63 :20–63, 1956.
- [Oli17a] E. Olivier. Le tenseur de courbure II : dérivation covariante, preprint-2017.
- [Oli17b] E. Olivier. Le tenseur de courbure III : calcul extérieur et connexion de Ehresmann. preprint-2017.
- [Rie68] B. Riemann. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. (Habilitationsschrift – 1854), volume XIII. Abhandl. Kgl. Gesell. Wiss. Göttingen, 1868.
- [Rie92] B. Riemann. Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill^{ma} Academia Parisiensi propositae (1861). *Riemann's Gesamm. Math. Werke*, XXII :391–423, 1892.
- [Spi99] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Number vol. 2 in A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Publish or Perish, inc. (Sec. Ed.), 1999.
- [Wei72] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology – Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley, 1972.



VOZZAVEDIBISAR : Informagique : catastrophe (par Jean-Pierre PETIT)

BIAA

Bulletin d'Informatique Approfondie & Applications
Computation - Information
Volumes 2017

106 - 107 - 108



LE MOÏGNE

Couverture : dessin de Michel Avezard (Zevard) interprété par la MMIAGe (1985-1987)

ÉDITORIAL : Yvon Berland et le classement QS

Pierre DUBOIS ¹

Résumé. – Ma chronique du 9 mars 2017 - **Classement QS des universités** - a donné lieu à un commentaire d'Hervé Boismery. Yvon Berland, président d'Aix-Marseille Université, répond à Hervé Boismery dans un courriel qu'il m'a envoyé en mai 2017.

Hervé Boismery. « Un classement de ce type ² n'a évidemment qu'une valeur relative. Néanmoins, apparaissent d'une manière significative les reculs de certaines universités françaises, notamment les Tours de Babel issues des méga-fusions du début de la décennie 2010. Le cas le plus probant est probablement celui d'Aix-Marseille Université, « la plus grande université de France » et peut-être aussi d'Europe (?).

Ainsi, entre 2015 et 2017, dans le classement afférent à la rubrique « Life Sciences and Medicine », cet établissement est passé du rang 183 au rang 224, et cela en seulement deux ans. Dans le domaine de la Médecine, domaine où Marseille bénéficiait jadis d'une renommée mondiale, AMU se situe désormais à un niveau modeste, loin derrière non seulement des universités européennes, mais aussi, ce qui est surprenant, loin derrière des universités de pays émergents. Ainsi, l'Université de Chulanlongkorn de Thaïlande obtient un ranking nettement meilleur qu'Aix-Marseille en matière médicale.

Ce résultat est d'autant plus paradoxal que l'Université d'Aix-Marseille est dirigée par un médecin. Dans la quasi-totalité des champs disciplinaires, le recul d'Aix-Marseille, désormais surclassé par plusieurs universités d'Asie et d'Amérique latine, est flagrant et semble irréversible? Une évolution qui ne peut manquer de susciter des interrogations ».

Yvon Berland à Pierre Dubois. « Monsieur, Je souhaite par le présent mail apporter des éléments de réponses à un commentaire de Monsieur Hervé Boismery sur l'article « Classement QS des universités » publié sur votre blog.

Aix-Marseille Université a progressé cette année dans ce classement (entrée dans le classement pour 4 domaines sur 5, classée **dans 17 disciplines** contre 11 en 2016 et notée dans 42 disciplines contre 39 en 2016 avec **34 notes en progression/2016**). Cependant, ces progressions et entrées dans le classement ne reflètent pas le niveau de notre recherche, car celle-ci est bien au-delà de ces scores. En effet, QS est un classement multidimensionnel, c'est-à-dire que la recherche, au travers de l'analyse des bases de données de publications (Nombre de citations par article et impact de la production scientifique) ne représente que 15 à 25% en fonction du domaine analysé. Les autres critères sont des réponses à des enquêtes mondiales via des experts ou des entreprises communiqués par les universités elles-mêmes. Ces personnes enquêtées doivent identifier 10 institutions nationales et 30 internationales dans leurs domaines. Pour le domaine *Life Science & Medicine* par exemple cela représente 75% de la note finale.

Pour comparer deux universités dans ce classement, il faut donc prendre en considération ces deux types de critères (enquêtes mondiales et Recherche), ainsi que le nombre total de points qui séparent les deux institutions.

Pour le cas cité dans le commentaire de M. Hervé Boismery, 25 places séparent Aix-Marseille Université de l'Université thaïlandaise de Chulalongkorn. Il s'avère que cet écart de places ne représente que 1,5 point pour un total de 100 points.

En analysant la répartition des points sur les deux types de critères (enquêtes mondiales et recherche / publications scientifiques), nous pouvons constater un écart de **53 points**

1. Créateur du blog Histoire d'universités nous autorise à reproduire ce dialogue.

2. Le Classement mondial des universités QS (QS World University Rankings) est un classement annuel des universités publié par Quacquarelli Symonds.

qui nous sépare de l'université de Chulalongkorn, université la plus ancienne et une des plus réputées du pays. Il semble donc plus aisé d'avoir un meilleur classement national lorsque deux fois moins d'institutions nationales sont classées, par rapport à la France où 12 universités sont dans ce classement.

Pour ce qui est de l'analyse des publications : Dans cette catégorie qui mesure la pertinence de notre recherche, l'écart de points en notre faveur est de plus de 44 points, ce qui signifie que la qualité de notre recherche est sans aucun rapport avec l'université de Chulalongkorn.

L'écart de classement n'est donc en rien lié à la valeur de notre recherche dans ce domaine, mais à des réponses subjectives à des enquêtes ?

Pour le domaine de la Médecine, cela est d'autant plus flagrant, car Aix-Marseille Université se classe dans les critères « Recherche », 152^e (citations) et 109^e (h-index) alors que l'université de Chulalongkorn est respectivement 358^e et 357^e.

Il ne faut pas se focaliser sur un seul classement pour tirer des conclusions hâtives, et surtout avant tout, **comprendre les critères de classement pour en mesurer les enjeux**. Il ne faut pas utiliser les classements multidimensionnels comme des classements de l'excellence de la recherche...

Prenons comme exemple le classement de Leiden, classement purement recherche basé sur l'analyse des publications : Pour ne pas être « avantagé » par l'effet taille, analysons le critère « Proportion de publications dans le Top 10% », Aix-Marseille Université est classée 192^e dans le domaine « Biomédical & Health Sciences » avec une proportion de 10,9% de sa production scientifique dans le top 10%, alors que l'université de Chulalongkorn est classée 668^e avec une proportion de 4,8%.

Dans l'Essential Science Indicator dans le domaine « **Clinical Medicine** », Aix-Marseille Université est classée 255^e avec 6 149 publications pour 103 739 citations (16,87 taux de citation/publications) et 156 Top Papers. En parallèle, Chulalongkorn University se classe 821^e avec 2 265 publications pour 21 909 citations (tx de citation/publications de 9,67) et 30 Top Papers.

Ou encore dans le **classement de Shanghai par domaines : en médecine**, Aix-Marseille Université est classée 162^e en 2015 alors que l'université de Chulalongkon n'est pas classée donc en deçà de la 200^e place mondiale.

La renommée mondiale se quantifie-t-elle en interrogeant des contacts demandés par les structures commerciales aux institutions classées ou en analysant l'impact des publications scientifiques ? C'est toute la problématique des classements recherche et des classements multidimensionnels qui s'opposent.

Bien cordialement ».

Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques uniquement déduite de l'expérience

André-Marie AMPERE¹

Résumé. – Nous reproduisons les pages de 1 à 7 du mémoire d'André-Marie Ampère avec l'autorisation de la librairie Albert Blanchard de Paris, spécialisée dans l'édition d'ouvrages scientifiques et la réimpression d'ouvrages de références. Ces pages suivent l'avant-propos de Edmond Bauer, professeur à la Sorbonne, qui en 1958 réédite la grande synthèse d'Ampère avec quelques aspects élogieux et cet écrit "la formule célèbre d'Ampère ne sert plus à rien". Tout ceci reste dans l'actualité de controverses scientifiques. A la lecture de ces quelques pages, il est compréhensible qu'il fut qualifié par Maxwell de "Newton de l'électricité". Il reste que la SEE (Société de l'électricité, de l'électronique et des technologies de l'information et de la communication) rend hommage à André-Marie Ampère par la médaille Ampère, depuis 1977, qui distingue annuellement une personne qui oeuvre dans les domaines de l'électricité, de l'électronique et des technologies de l'information et de la communication. N.D.L.R.

L'époque que les travaux de Newton ont marquée dans l'histoire des sciences n'est pas seulement celle de la plus importante des découvertes que l'homme ait faites sur les causes des grands phénomènes de la nature, c'est aussi l'époque où l'esprit humain s'est ouvert une nouvelle route dans les sciences qui ont pour objet l'étude de ces phénomènes. Jusqu'alors on en avait presque exclusivement cherché les causes dans l'impulsion d'un fluide inconnu qui entraînait les particules matérielles suivant la direction de ses propres particules; et partout où l'on voyait un mouvement révolutif, on imaginait un tourbillon dans le même sens.

Newton nous a appris que cette sorte de mouvement doit, comme tous ceux que nous offre la nature, être ramenée par le calcul à des forces agissant toujours entre deux particules matérielles suivant la droite qui les joint, de manière que l'action exercée par l'une d'elles sur l'autre soit égale et opposée à celle que cette dernière exerce en même temps sur la première, et qu'il ne puisse, par conséquent, lorsqu'on suppose ces deux particules liées invariablement entre elles, résulter aucun mouvement de leur action mutuelle. C'est cette loi confirmée aujourd'hui par toutes les observations, par tous les calculs, qu'il exprima dans le dernier des axiomes qu'il plaça au commencement des *Philosophiæ naturalis principia mathematica*. Mais il ne suffisait pas de s'être élevé à cette haute conception, il fallait trouver suivant quelle loi ces forces varient avec la situation respective des particules entre lesquelles elles s'exercent, ou, ce qui revient au même, en exprimer la valeur par une formule.

Newton fut loin de penser qu'une telle loi pût être inventée en partant des considérations abstraites plus ou moins plausibles. Il établit qu'elle devait être déduite des faits observés, ou plutôt de ces lois empiriques qui, comme celles de Képler, ne sont que les résultats généralisés d'un grand nombre de faits.

1. Né à Lyon en 1775 et décédé à Marseille en 1836 dans l'indifférence.

Observer d'abord les faits, en varier les circonstances autant qu'il est possible, accompagner ce premier travail de mesures précises pour en déduire des lois générales, uniquement fondées sur l'expérience, et déduire de ces lois, indépendamment de toute hypothèse sur la nature des forces qui produisent les phénomènes, la valeur mathématique de ces forces, c'est-à-dire la formule qui les représente, telle est la marche qu'a suivie Newton. Elle a été, en général, adoptée en France, par les savants auxquels la physique doit les immenses progrès qu'elle a faits dans ces derniers temps, et c'est elle qui m'a servi de guide dans toutes mes recherches sur les phénomènes électro-dynamiques. J'ai consulté uniquement l'expérience pour établir les lois de ces phénomènes, et j'en ai déduit la formule qui peut seule représenter les forces auxquelles ils sont dus; je n'ai fait aucune recherche sur la cause même qu'on peut assigner à ces forces, bien convaincu que toute recherche de ce genre doit être précédée de la connaissance purement expérimentale des lois, et de la détermination, uniquement déduite de ces lois, de la valeur des forces élémentaires dont la direction est nécessairement celle de la droite menée par les points matériels entre lesquels elles s'exercent. C'est pour cela que j'ai évité de parler des idées et que je pouvais avoir sur la nature de la cause de celles qui émanent des conducteurs voltaïques, si ce n'est dans les notes qui accompagnent l'*Exposé sommaire des nouvelles expériences électro-magnétiques faites par plusieurs physiciens depuis le mois de mars 1821*, que j'ai lu dans la séance publique de l'Académie des Sciences, le 8 avril 1822, on peut voir ce que j'en ai dit dans ces notes à la page 215 de mon *Recueil d'Observations électro-dynamiques*. Il ne paraît pas que cette marche, la seule qui puisse conduire à des résultats indépendants de toute hypothèse, soit préférée par les physiciens du reste de l'Europe, comme elle l'est par les Français; et le savant illustre qui a vu le premier les pôles d'un aimant transportés par l'action d'un fil conducteur dans des directions perpendiculaires à celles de ce fil, en a conclu que la matière électrique tournait autour de lui, et poussait ces pôles dans le sens de son mouvement, précisément comme Descartes faisait tourner la matière de ses tourbillons dans le sens des révolutions planétaires. Guidé par les principes de la philosophie newtonienne, j'ai ramené le phénomène observé par M. Oerstedt, comme on l'a fait à l'égard de tous ceux du même genre que nous offre la nature, à des forces agissant toujours suivant la droite qui joint les deux particules entre lesquelles elles s'exercent; et si j'ai établi que la même disposition ou le même mouvement de l'électricité qui existe dans le fil conducteur a lieu aussi autour des particules des aimants, ce n'est certainement pas pour les faire agir par impulsion à la manière d'un tourbillon, mais pour calculer, d'après ma formule, les forces qui en résultent entre ces particules et celles d'un conducteur ou d'un autre aimant, suivant les droites qui joignent deux à deux les particules dont on considère l'action mutuelle, et pour montrer que les résultats du calcul sont complètement vérifiés : 1° par les expériences que j'ai faites et celles qu'on doit à M. Pouillet sur la détermination précise des situations où il faut que se trouve un conducteur mobile, pour qu'il reste en équilibre lorsqu'il est soumis à l'action, soit d'un autre conducteur, soit d'un aimant; 2° par l'accord de ces résultats avec les lois que Coulomb et M. Biot ont déduites de leurs expériences, le premier relativement à l'action mutuelle de deux aimants, le second à celle d'un aimant et d'un fil conducteur.

Le principal avantage des formules qui sont ainsi conclues immédiatement de quelques faits généraux donnés par un nombre suffisant d'observations pour que la certitude n'en puisse être contestée, est de rester indépendantes, tant des hypothèses dont leurs auteurs ont pu s'aider dans la recherche de ces formules, que de celles qui peuvent leur être substituées dans la suite. L'expression de l'attraction universelle déduite des lois de Képler ne dépend point des hypothèses que quelques auteurs ont essayé de faire sur une cause mécanique qu'ils voulaient lui assigner. La théorie de la chaleur repose réellement sur des faits généraux donnés immédiatement par l'observation; et l'équation déduite de ces faits se trouvant confirmée par l'accord des résultats qu'on en tire et de ceux que donne l'expérience, doit être également reçue comme exprimant les vrais lois de la propagation de la chaleur, et par ceux qui l'attribuent à un rayonnement de molécules calorifiques, et par ceux qui recourent pour expliquer le même phénomène aux vibrations d'un fluide répandu dans l'espace; seulement il faut que les premiers montrent comment l'équation dont il s'agit résulte de leur manière de voir, et que les seconds la déduisent des formules générales des mouvements vibratoires; non pour rien ajouter à la certitude de cette équation, mais pour que leurs hypothèses respectives puissent subsister. Le physicien qui n'a point pris de parti à cet égard admet cette équation comme la représentation exacte des faits, sans s'inquiéter de la manière dont elle peut résulter de l'une ou de l'autre des explications dont nous parlons; et si de nouveaux phénomènes et de nouveaux calculs viennent à démontrer que les effets de la chaleur ne peuvent être réellement expliqués que dans le système de vibrations, le grand physicien qui a le premier donné cette équation, et qui a créé pour l'appliquer à l'objet de ses recherches de nouveaux moyens d'intégration, n'en serait pas moins l'auteur de la théorie mathématique de la chaleur, comme Newton est celui des mouvements planétaires, quoique cette dernière ne fût pas aussi complètement démontrée par ses travaux qu'elle l'a été depuis par ceux de ses successeurs.

Il en est de même de la formule par laquelle j'ai représenté l'action électro-dynamique. Quelle que soit la cause physique à laquelle on veuille rapporter les phénomènes produits par cette action, la formule que j'ai obtenue restera toujours l'expression des faits. Si l'on parvient à la déduire d'une des considérations par lesquelles on a expliqué tant d'autres phénomènes, telles que les attractions en raison inverse du carré de la distance, celles qui deviennent insensibles à toute distance appréciable des particules entre lesquelles elles s'exercent, les vibrations d'un fluide répandu dans l'espace, etc., on fera un pas de plus dans cette partie de la physique; mais cette recherche, dont je ne me suis point encore occupé, quoique j'en reconnaisse l'importance, ne changera rien aux résultats de mon travail, puisque pour s'accorder avec les faits, il faudra toujours que l'hypothèse adoptée s'accorde avec la formule qui les représente si complètement.

Dès que j'eus reconnu que deux conducteurs voltaïques agissent l'un sur l'autre, tantôt en s'attirant, tantôt en se repoussant, que j'eus distingué et décrit les actions qu'ils exercent dans les différentes situations où ils peuvent se trouver l'un à l'égard de l'autre, et que j'eus constaté l'égalité de l'action qui est exercée par un conducteur rectiligne, et de celle qui l'est par un conducteur sinueux, lorsque celui-ci ne s'éloigne qu'à des distances extrêmement petites de la direction du premier, et se termine, de part et d'autre,

aux mêmes points ; je cherchai à exprimer par une formule la valeur de la force attractive ou répulsive de deux de leurs éléments, ou parties infiniment petites, afin de pouvoir en déduire, par les méthodes connues d'intégration, l'action qui a lieu entre deux portions de conducteurs données de forme et de situation.

L'impossibilité de soumettre directement à l'expérience des portions infiniment petites du circuit voltaïque, oblige nécessairement à partir d'observations faites sur des fils conducteurs de grandeur finie, et il faut satisfaire à ces deux conditions, que les observations soient susceptibles d'une grande précision, et qu'elles soient propres à déterminer la valeur de l'action mutuelle de deux portions infiniment petites de ces fils. C'est ce qu'on peut obtenir de deux manières : l'une consiste à mesurer d'abord avec la plus grande exactitude des valeurs de l'action mutuelle de deux portions d'une grandeur finie, en plaçant successivement, l'une par rapport à l'autre, à différentes distances et dans différentes positions, car il est évident qu'ici l'action ne dépend pas seulement de la distance ; il faut ensuite faire une hypothèse sur la valeur de l'action mutuelle de deux portions infiniment petites, en conclure celle de l'action qui doit en résulter pour les conducteurs de grandeur finie sur lesquels on a opéré, et modifier l'hypothèse jusqu'à ce que les résultats du calcul s'accordent avec ceux de l'observation. C'est ce procédé que je m'étais d'abord proposé de suivre, comme je l'ai expliqué en détail dans un Mémoire lu à l'Académie des Sciences, le 9 octobre 1820² ; et quoiqu'il ne nous conduise à la vérité que par la voie indirecte des hypothèses, il n'en est pas moins précieux, puisqu'il est souvent le seul qui puisse être employé dans les recherches de ce genre. Un des membres de cette Académie, dont les travaux ont embrassé toutes les parties de la physique, l'a parfaitement décrit dans la *Notice sur l'aimantation imprimée aux métaux par l'électricité en mouvement*, qu'il nous a lue le 2 avril 1821, en l'appelant un travail en quelque sorte de divination, qui est la fin de presque toutes les recherches physiques³.

Mais il existe une autre manière d'atteindre plus directement le même but ; c'est celle que j'ai suivie depuis, et qui m'a conduit au résultat que je désirais : elle consiste à constater, par l'expérience, qu'un conducteur mobile reste exactement en équilibre entre des forces égales, ou des moments de rotations égaux, ces forces et ces moments étant produits par des portions de conducteurs fixes dont les formes ou les grandeurs peuvent varier d'une manière quelconque, sous des conditions que l'expérience détermine, sans que l'équilibre soit troublé, et d'en conclure directement par le calcul quelle doit être la valeur de l'action mutuelle de deux portions infiniment petites, pour que l'équilibre soit en effet indépendant de tous les changements de forme ou de grandeur compatibles avec ces conditions.

Ce dernier procédé ne peut être employé que quand la nature de l'action qu'on étudie donne lieu à des cas d'équilibre indépendants de la forme des corps ; il est, par conséquent, beaucoup plus restreint dans ces applications que celui dont j'ai parlé tout à l'heure : mais puisque les conducteurs voltaïques présentent des circonstances où cette sorte d'équilibre a lieu, il est naturel de le préférer à tout autre, comme plus direct, plus simple, et susceptible d'une plus grande exactitude quand les expériences sont faites avec

2. Ce mémoire n'a pas été publié à part, mais les principaux résultats en ont été insérés dans celui que j'ai publié en 1820, dans le tome XV des *Annales de chimie et de physique*.

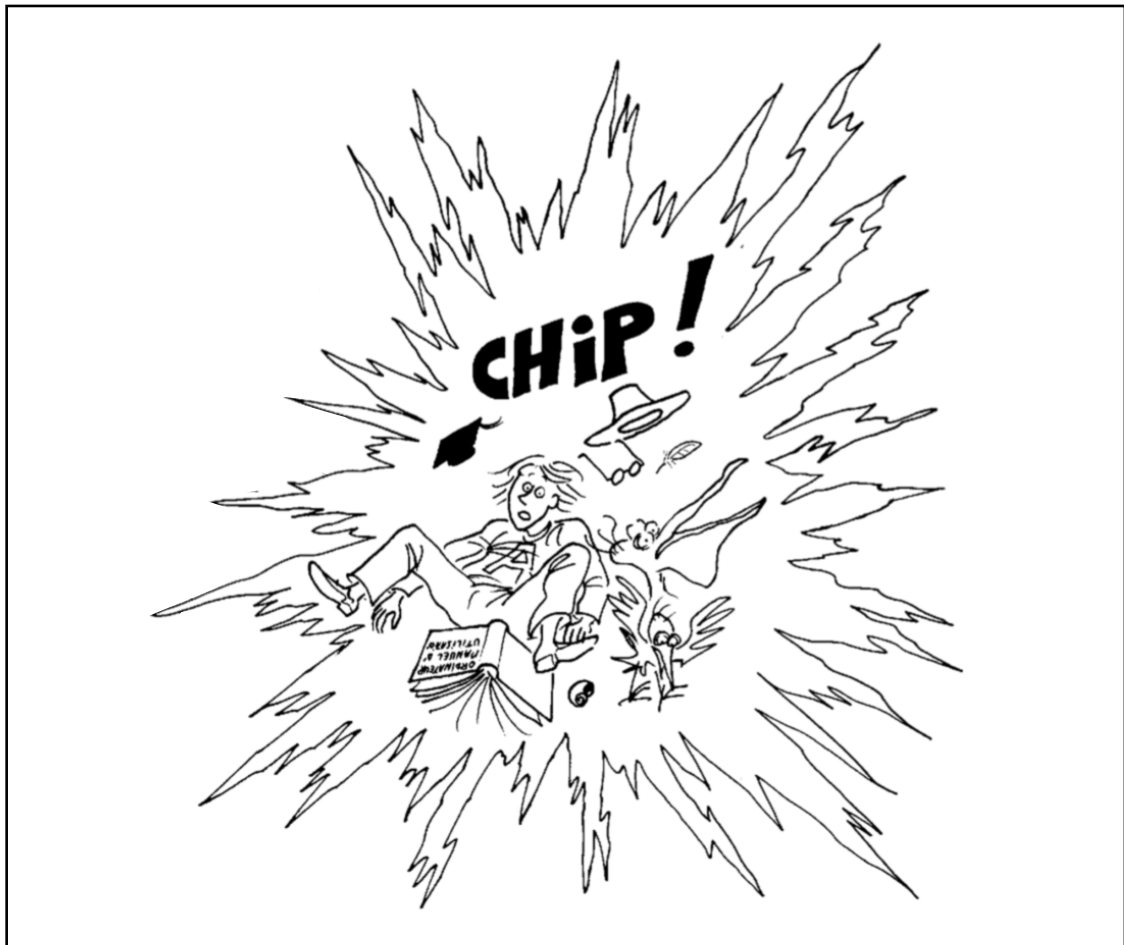
3. Voyez le *Journal des savants*, avril 1821, p. 233.

les précautions convenables. Il y a d'ailleurs, à l'égard de l'action exercée par ces conducteurs, un motif bien plus décisif encore de le suivre dans les recherches relatives à la détermination des forces qui la produisent : c'est l'extrême difficulté des expériences où l'on se proposerait, par exemple, de mesurer ces forces par le nombre des oscillations d'un corps soumis à leurs actions. Cette difficulté vient de ce quand on fait agir un conducteur fixe sur une portion mobile du circuit voltaïque, les parties de l'appareil nécessaire pour la mettre en communication avec la pile, agissent sur cette portion mobile en même temps que le conducteur fixe, et altèrent ainsi les résultats des expériences. Je crois cependant être parvenu à la surmonter dans un appareil propre à mesurer l'action mutuelle de deux conducteurs, l'un fixe et l'autre mobile, par le nombre des oscillations de ce dernier, et en faisant varier la forme du conducteur fixe. Je décrirai cet appareil dans la suite de ce Mémoire.

Il est vrai qu'on ne rencontre pas les mêmes obstacles quand on mesure de la même manière l'action d'un fil conducteur sur un aimant; mais ce moyen ne peut être employé quand il s'agit de la détermination des forces que deux conducteurs voltaïques exercent l'un sur l'autre, détermination qui doit être le premier objet de nos recherches dans l'étude des nouveaux phénomènes. Il est évident, en effet, que si l'action d'un fil conducteur sur un aimant était due à une autre cause que celle qui a eu lieu entre deux conducteurs, les expériences faites sur la première ne pourraient rien apprendre relativement à la seconde; et que si les aimants ne doivent leurs propriétés qu'à des courants électriques, entourant chacune de leurs particules, il faudrait, pour pouvoir en tirer des conséquences certaines relativement à l'action qu'exerce sur ces courants celui du fil conducteur, que l'on sût d'avance s'ils ont la même intensité près de la surface de l'aimant et dans son intérieur, ou suivant quelle loi varie cette intensité; si les plans de ces courants sont partout perpendiculaires à l'axe du barreau aimanté, comme je l'avais d'abord supposé, ou si l'action mutuelle des courants d'un même aimant leur donne une situation d'autant plus inclinée à cet axe qu'ils en sont à une plus grande distance et qu'ils s'écartent davantage de son milieu, comme je l'ai conclu depuis de la différence qu'on remarque entre la situation des pôles d'un aimant, et celles des points qui jouissent des mêmes propriétés dans un fil conducteur roulé en hélice.



FIGURE 1. *Ampère* (1769-1832)



VOUZZAVEDIBISAR : Informagique : CHIP! (par Jean-Pierre PETIT)

BIAA

Bulletin d'Informatique Approfondie & Applications
Computation - Information
Volumes 2017

106 - 107 - 108



LE MOÏGNE

Couverture : dessin de Michel Avezard (Zevard) interprété par la MMIAGe (1985-1987)

ÉDITORIAL : CUPGE : pourquoi j'arrête les colles

Pierre ARNOUX ¹

Résumé. – Université d'Aix-Marseille. Licence scientifique, Cycle Universitaire Préparatoire aux Grandes écoles (CUPGE) cf. [la note finale](#) : compte-rendu du système d'interrogations orales hebdomadaires organisé en 2015-2016 par **Pierre Arnoux**, professeur de mathématiques, 7 pages. Il explique en pages 3 à 5 pourquoi il arrête les colles, pourtant jugées utiles par les étudiants, les colleurs et les enseignants.

Pierre Arnoux et Pierre Dubois nous autorisent à diffuser ce texte paru dans le blog Histoires d'universités en octobre 2017. N.D.L.R.

Quelques leçons à tirer (pages 3 à 5). **Extraits.**

« La lourdeur du dispositif fait perdre beaucoup de temps à tout le monde, pour une rémunération faible (moins de 300 euros pour chaque étudiant colleur) et finit par faire apparaître des incompatibilités imprévues. Si l'on prend en compte le travail administratif, l'université consacre plus d'argent à gérer les colles qu'à les payer. Ceci se fait bien entendu, pour toutes les personnes concernées, au détriment du travail pédagogique.

Dans ces conditions je pense raisonnable de proposer l'arrêt des interrogations orales en licence. Non parce que ce dispositif est inefficace (toutes les indications disponibles montrent qu'il est efficace), mais parce que l'université n'a pas la capacité de faire fonctionner correctement un tel dispositif, et qu'il exige dans les conditions actuelles une énergie disproportionnée pour un résultat dégradé ...

Sur l'enseignement de premier cycle. Ces faits et un certain nombre d'autres m'amènent à conclure que l'université d'Aix-Marseille, à cause de sa taille, de sa gestion extrêmement centralisée et des priorités qu'elle s'est données, n'est pas apte à organiser des enseignements scientifiques de premier cycle, en-dehors de quelques cas particuliers. La priorité de l'université va au respect des procédures administratives qui ont été décidées de façon abstraite, sans tenir compte des conditions matérielles et en particulier pédagogiques. On le voit par exemple dans les règles décidées en CA sur la notation des unités d'enseignement »...

Note finale. – Le CUPGE est en quelque sorte une classe préparatoire à l'université. Il vise à offrir aux étudiants des deux premières années de la licence une formation leur permettant de se préparer pour intégrer une grande école. Les étudiants bénéficient de formations complémentaires au cursus de licence leur permettant de préparer les concours des écoles d'ingénieurs ou des écoles de management. En cas d'échec aux concours, ils peuvent poursuivre en troisième année de licence s'ils ont validé 120 crédits ECTS au cours de leur scolarité.

1. Professeur à l'université d'Aix-Marseille

Le codage du flot géodésique sur la surface modulaire

Pierre ARNOUX^{1,2}

Résumé. – Nous donnons une preuve élémentaire et explicite du fait que le flot géodésique sur la surface modulaire (quotient du plan hyperbolique par l'action de $SL(2, \mathbb{Z})$) peut être codé en utilisant les fractions continues. (*Réédition avec autorisation de l'auteur et de la revue de l'article « P. Arnoux, Le codage du flot géodésique sur la surface modulaire, Enseign. Math. (2) 40, no. 1-2, 29–48, 1994 ».*)

Abstract. – We give an elementary and explicit proof of the coding of the geodesic flow on modular surface by continued fractions.

1. Introduction

Il est connu depuis longtemps, par un travail d'Artin (cf. [Art24]), que le flot géodésique sur la surface modulaire peut être codé en utilisant les fractions continues; les articles récents d'Adler et Flatto et de Series ont fait une étude approfondie de ce codage (cf. [AF91], [Ser85]). Le but de cet article est de retrouver ce résultat de façon explicite et élémentaire en mettant un système de coordonnées adapté sur le fibré unitaire tangent de la surface modulaire.

De façon plus précise, on peut définir algébriquement le flot géodésique sur la surface modulaire comme l'action à droite, sur l'espace quotient $SL(2, \mathbb{Z}) \backslash SL(2, \mathbb{R})$, du groupe des matrices diagonales positives de la forme

$$g_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$$

(nous rappellerons plus bas la démonstration); mais on peut aussi voir $SL(2, \mathbb{Z}) \backslash SL(2, \mathbb{R})$ comme l'espace des réseaux de \mathbb{R}^2 dont le domaine fondamental est de volume 1, et l'action de g_t consiste alors à écraser le réseau le long de l'axe des abscisses, en multipliant les abscisses par $e^{\frac{t}{2}}$ et les ordonnées par $e^{-t/2}$.

Pour la plupart des réseaux (ceux qui ne contiennent pas de vecteurs horizontaux ou verticaux), on peut trouver un domaine fondamental en forme de L, formé de deux rectangles accolés; l'action du flot dilate les bases de ces domaines fondamentaux et écrase leurs hauteurs, on peut alors revenir à un domaine de base plus petite en découpant le grand rectangle et en empilant les morceaux obtenus au-dessus du petit rectangle (cf. Fig. 1). Si l'on part de deux rectangles de bases respectives a et $b < a$, l'opération initiale est la division euclidienne de a par b , le quotient apparaît dans le nombre d'empilements au-dessus de b , puis on reprend l'opération avec b et le reste de la division, de manière identique à l'algorithme d'Euclide; mais ici l'algorithme ne termine jamais dès que les

1. GDAC-I2M UMR 7373 CNRS Université d'Aix-Marseille. Au moment de la publication (d'après le manuscrit du 23 août 1993) : Laboratoire de Mathématiques Discrètes (UPR 9016), 163 avenue de Luminy, Case 930, 13288 Marseille Cedex 9, France)

2. pierre.arnoux@univ-amu.fr

deux nombres sont incommensurables : il s'agit en fait de la version vectorielle de l'algorithme classique des fractions continues, et un calcul simple montre que si les quotients successifs obtenus sont a_1, a_2, \dots , on a :

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

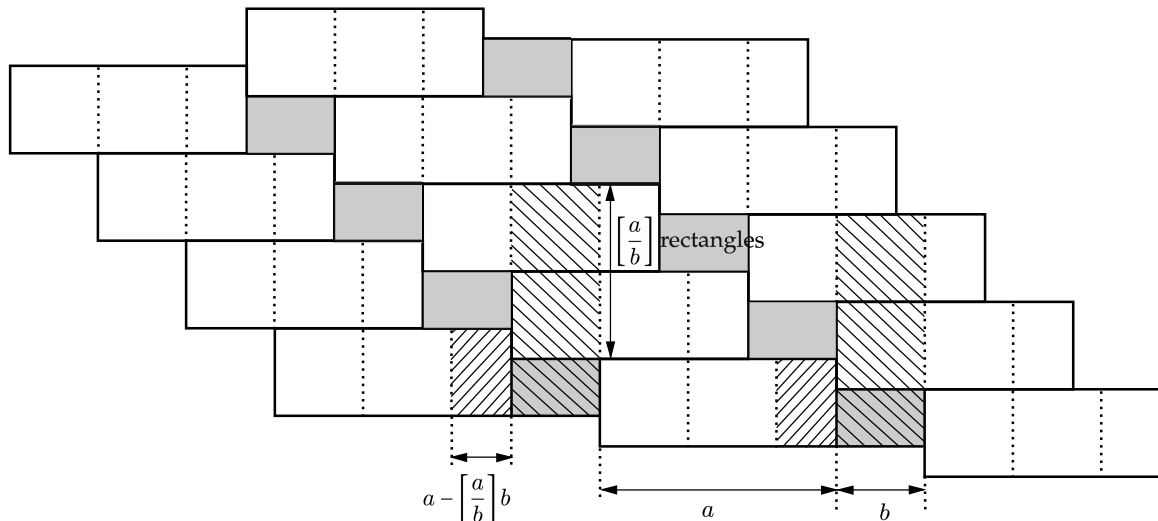


FIGURE 1

Il est clair que rien n'est changé si l'on multiplie a et b par la même constante, on peut donc à chaque étape normaliser à 1 le plus grand des deux nombres, et on passe ainsi de b à la partie fractionnaire de $1/b$, ce qui est la fonction associée à l'algorithme des fractions continues. Puisque le flot g_t dilate les longueurs, on peut utiliser un temps convenable du flot pour réaliser cette normalisation. La suite de cet article est consacrée à rendre rigoureux le raisonnement qui précède, et à en tirer quelques conséquences. Une façon beaucoup plus lourde d'énoncer les résultats qui précèdent consiste à voir l'espace $SL(2, \mathbb{Z}) \backslash SL(2, \mathbb{R})$ comme espace modulaire du tore, et le flot g_t comme flot de Teichmüller sur cet espace; ce point de vue, inutile ici, permet d'étudier le flot de Teichmüller sur l'espace modulaire d'une surface quelconque, en codant par des « rectangles cousus », généralisations de notre domaine fondamental en L. Cette étude a été faite par Veech (cf. [Vee86]), et l'on peut considérer le présent article comme un exposé du cas le plus simple de cette construction (cf. [Vee84, p. 1391], où on étudie aussi le flot horocyclique).

Dans la première section, nous rappelons ce que nous aurons besoin de savoir sur les fractions continues; dans la deuxième section, nous définissons le flot géodésique sur la surface modulaire, et nous en donnons un autre modèle dans la troisième section. Dans la quatrième, nous définissons de manière élémentaire un système de coordonnées global sur le fibré unitaire tangent à la surface modulaire, et dans la cinquième section, nous montrons que le flot géodésique admet une section sur laquelle l'application de premier

retour est un revêtement double de l'extension naturelle de la transformation des fractions continues. Dans la sixième section, nous donnons, comme exemple d'application de cette méthode, une démonstration géométrique d'un théorème de Paul Lévy sur la croissance des dénominateurs des convergents pour presque tout nombre, en utilisant l'ergodicité du flot géodésique. Dans la dernière section, nous montrons comment, en changeant la section choisie pour le flot géodésique, on peut retrouver l'algorithme additif des fractions continues; on pourrait ainsi trouver, avec d'autres sections, une infinité d'algorithmes du même type.

2. La transformation des fractions continues

Il est classique que tout réel $x \in]0, 1[$ s'écrit de façon unique

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

où la suite (a_n) est une suite d'entiers strictement positifs, finie et se terminant par un entier strictement plus grand que 1 si x est rationnel, infinie sinon. On note habituellement cette égalité $x = [0; a_1, \dots, a_n, \dots]$; dans le cas particulier où la suite est périodique, on note $x = [0; \overline{a_1, \dots, a_n}]$. Un calcul immédiat montre que $a_1 = [1/x]$, où $[t]$ est la partie entière de t , et que, si l'on pose $x_1 = \{1/x\}$, où $\{t\} = t - [t]$ est la partie fractionnaire de t , on a $a_2 = [1/x_1]$. Plus généralement, définissons les deux applications

$$\begin{aligned} f :]0, 1[&\rightarrow \mathbb{N}, & x &\mapsto [1/x] \\ T : [0, 1[&\rightarrow [0, 1[, & x &\mapsto \{1/x\} \text{ si } x \neq 0, \quad T(0) = 0 \end{aligned}$$

On vérifie que a_n est défini si $T^{n-1}(x) \neq 0$, et vaut alors $f(T^{n-1}(x))$.

La transformation T est appelée transformation des fractions continues, elle est surjective, mais non injective; on peut dans un tel cas construire une application bijective associée, "l'extension naturelle", par limite inductive, en considérant tous les passés possibles pour un point, c'est-à-dire en considérant les suites $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ telles que $T(x_i) = x_{i+1}$ (voir [Roh64] pour une étude plus poussée des extensions naturelles).

Cette extension naturelle admet ici, à un ensemble de mesure nulle près, un modèle géométrique : une application \overline{T} définie sur un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 , bijective sauf sur un ensemble de mesure nulle, et telle que, si l'on note π la projection sur la première variable, on ait $\pi(\overline{T}(x, y)) = T(x)$, la deuxième variable représentant en quelque sorte le "passé". Cette application a pour ensemble de définition le sous-ensemble Σ du plan défini par les équations $0 \leq x < 1$, et $0 \leq y < 1/(1+x)$ si $x < 1/2$, $0 < y < 1/(1+x)$ sinon, et elle est définie par

$$\begin{aligned} \overline{T} : \Sigma &\rightarrow \Sigma, & (x, y) &\mapsto (\{1/x\}, x - x^2y) \text{ si } x \neq 0 \\ & & (0, y) &\mapsto (0, 0) \end{aligned}$$

Cette application est bijective sauf aux points $(0, y)$ qui ont tous même image et aux points $(x, 0)$ qui n'ont pas d'antécédent si $x \neq 0$; elle envoie les segments verticaux sur des segments verticaux, et elle est discontinue sur les segments $x = 1/n$ pour n entier, mais continue sur les rectangles curvilignes qu'ils délimitent. Un calcul simple montre que le rectangle curviligne défini par $1/(n+1) < x < 1/n$, $0 < y < 1/(1+x)$ est envoyé sur

le rectangle défini par $0 < x < 1$, $1/(n+1+x) < y < 1/(n+x)$, avec une rotation d'un demi-tour, qui envoie le bord droit sur le bord gauche et le bord inférieur sur le bord supérieur. C'est pour cela qu'il faut enlever de Σ les points $(x, 0)$, $x \geq 1/2$, qui seraient envoyés sur le bord supérieur qui n'appartient pas à Σ (voir Fig. 2).

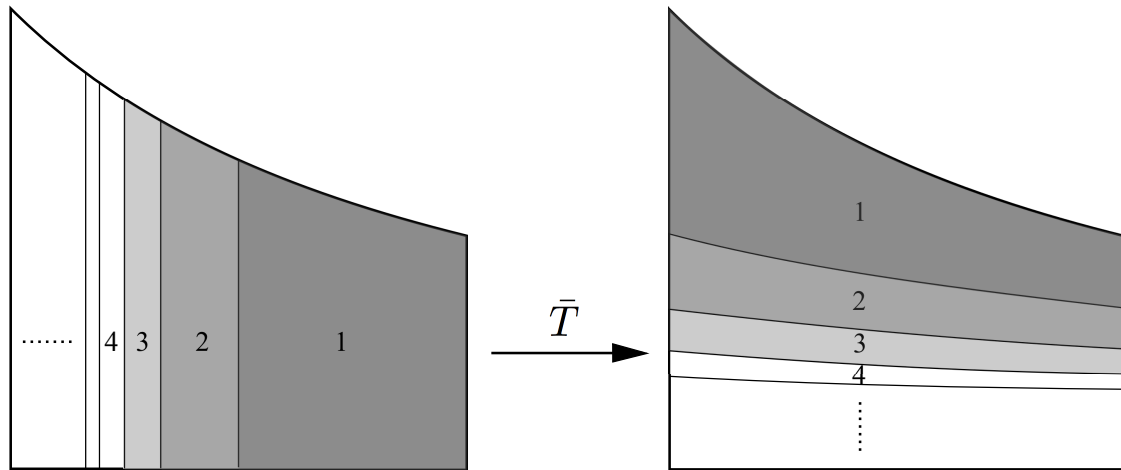


FIGURE 2

C'est l'application \bar{T} que nous trouverons naturellement ci-dessous comme application de premier retour du flot géodésique sur la surface modulaire; elle a de plus l'intérêt de préserver la mesure de Lebesgue, puisque son jacobien est 1 en tout point où elle est continue; la projection sur la première coordonnée donne la mesure de Gauss, de densité $1/(1+x)$, préservée par T (pour plus de détails, voir [AN]).

On peut présenter cette application d'une autre manière : le changement de variable $(x, y) \mapsto (x, y/(1-xy))$ envoie Σ sur le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ privé d'une partie de son bord; on vérifie facilement qu'il conjugue l'application \bar{T} à l'application \bar{T}_1 définie, sur l'intérieur de son domaine, par

$$\bar{T}_1 :]0, 1[\times]0, 1[\rightarrow]0, 1[\times]0, 1[, \quad (x, y) \mapsto \left(\left\{ \frac{1}{x} \right\}, \frac{1}{y + \left[\frac{1}{x} \right]} \right)$$

C'est sous cette forme que l'on trouve en général l'extension naturelle de la transformation des fractions continues (voir par exemple [Nak81], [Ito84]). Cette application est continue sur les rectangles d'équation $1/(n+1) < x < 1/n$, qui sont envoyés respectivement sur les rectangles $1/(n+1) < y < 1/n$; ces rectangles forment une partition de Markov, et il est particulièrement commode d'utiliser \bar{T}_1 pour construire un **système dynamique symbolique**, de la façon suivante : A chaque couple (x, y) de nombres irrationnels de l'intervalle $[0, 1]$, on associe la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par $x = [0; a_1, \dots, a_n, \dots]$ et $y = [0; a_0, a_{-1}, \dots, a_{-n}, \dots]$; Ceci définit une bijection entre l'ensemble I des points du carré de coordonnées irrationnelles et l'ensemble des suites biinfinies à valeurs entières strictement positives. On vérifie immédiatement que I est le complémentaire, dans le carré $]0, 1[\times]0, 1[$, des orbites (pour \bar{T}_1) des points de la forme $(x, 0)$ ou $(0, y)$. Cet ensemble est de mesure pleine, invariant par \bar{T}_1 , et la restriction de \bar{T}_1 à I est une bijection.

De même que l'on a, pour le développement en fraction continue, $a_n = f(T^{n-1}(x))$ avec n entier positif, on a ici $a_n = \bar{f}(\bar{T}_1^{n-1}(x, y))$ pour tout n dans \mathbb{Z} , où l'on définit \bar{f} par $\bar{f}(x, y) = [1/x]$ (numéro du rectangle qui contient le point (x, y)). Cette formule montre que l'application de codage qui à (x, y) associe la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ conjugue \bar{T}_1 au décalage S sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ (S est l'application qui à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ associe la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par $v_n = u_{n+1}$).

3. Le flot géodésique sur la surface modulaire

Du point de vue algébrique, le flot géodésique sur la surface modulaire est l'action à droite sur le quotient $SL(2, \mathbb{Z}) \backslash SL(2, \mathbb{R})$ du groupe des matrices diagonales positives, de forme

$$g_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$$

Pour justifier ce nom de flot géodésique, il faut rappeler un peu de géométrie. On nomme demi-plan de Poincaré l'ensemble $\mathbb{H} = \{x + iy \mid y > 0\}$ des complexes à partie imaginaire strictement positive, muni de la métrique $(dx^2 + dy^2)/y^2$. Le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ agit à gauche sur \mathbb{H} par

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + c}{bz + d}$$

et cette action est isométrique. On vérifie facilement qu'elle est transitive, et que le stabilisateur du point i est le groupe $SO(2, \mathbb{R})$, donc le demi-plan de Poincaré s'identifie à l'espace homogène $SL(2, \mathbb{R})/SO(2, \mathbb{R})$. Le stabilisateur agit transitivement sur le cercle unité du plan tangent à i , donc $SL(2, \mathbb{R})$ agit transitivement sur le fibré unitaire tangent du demi-plan. Le stabilisateur du vecteur tangent vertical en i est $\{Id, -Id\}$ (l'action de la matrice $-Id$ sur \mathbb{H} est triviale), et le fibré unitaire tangent s'identifie au quotient $PSL(2, \mathbb{R})$ de $SL(2, \mathbb{R})$ par son centre $\{\pm Id\}$. Par raison de symétrie, la courbe

$$\gamma(t) = e^t i = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \cdot i$$

est une géodésique, et un calcul facile montre qu'elle est paramétrée par sa longueur (c'est de là que vient le facteur $1/2$ dans la définition de g_t). Puisqu'une isométrie transforme géodésique en géodésique, la courbe $M \cdot \gamma(t)$ est aussi une géodésique, on en déduit que le flot géodésique du demi-plan de Poincaré se représente matriciellement par l'action à droite sur $PSL(2, \mathbb{R})$ du groupe $\{g_t \mid t \in \mathbb{R}\}$.

On vient de voir que les géodésiques de \mathbb{H} sont les images d'une droite verticale par les isométries; le groupe des isométries est engendré par des translations horizontales et des inversions centrées sur l'axe des abscisses, ce qui permet de retrouver un fait classique: les géodésiques du demi-plan de Poincaré sont les demi-droites verticales et les demi-cercles centrés sur l'axe.

La surface modulaire est le quotient du demi-plan par l'action du groupe $PSL(2, \mathbb{Z})$, qui est engendré, en tant que groupe agissant sur \mathbb{H} , par les applications $z \mapsto z+1$, de domaine fondamental $-1/2 \leq z < 1/2$, et $z \mapsto -1/z$, de domaine fondamental (au bord près) $|z| \geq 1$;

on en déduit qu'un domaine fondamental pour l'action du groupe est contenu dans l'intersection de ces deux domaines, et l'on peut montrer qu'au bord près, cette intersection est en fait un domaine fondamental (cf. Fig. 3).

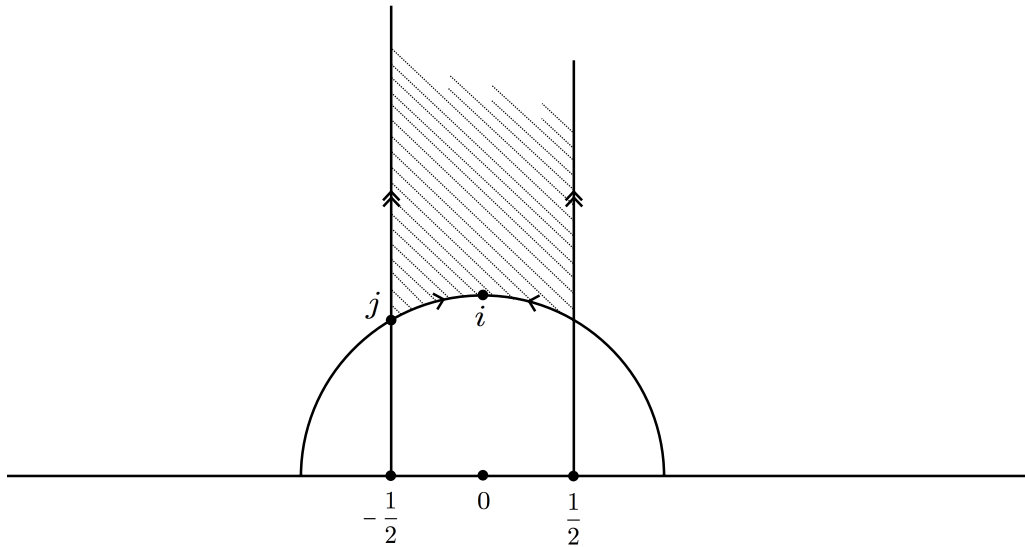


FIGURE 3. Le domaine fondamental pour l'action de $SL(2, \mathbb{Z})$.

Cette surface est isomorphe à une sphère privée d'un point avec 2 singularités. Son fibré unitaire tangent est isomorphe à $PSL(2, \mathbb{Z}) \backslash PSL(2, \mathbb{R}) \equiv SL(2, \mathbb{Z}) \backslash SL(2, \mathbb{R})$, et on retrouve bien pour le flot géodésique la forme annoncée au début de la section.

4. Une autre présentation du flot géodésique

Nous allons donner une autre interprétation de ce flot : on peut considérer une matrice

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

de $SL(2, \mathbb{R})$ comme formée de deux vecteurs lignes $e_1^t = (a, c)$ et $e_2^t = (b, d)$. On lui associe ainsi une base (e_1, e_2) de \mathbb{R}^2 orientée dans le sens positif et dont le « carré unité » $\{xe_1 + ye_2, 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$ est de volume 1. La multiplication à droite de cette matrice par une matrice M correspond, si l'on considère les vecteurs, à l'action standard sur le plan \mathbb{R}^2 de la matrice transposée M^t . Le flot géodésique consiste à « aplatir » la base donnée sur l'axe des abscisses, et l'espace quotient $SL(2, \mathbb{R})/SO(2, \mathbb{R})$ s'interprète comme espace des bases à isométrie près. On peut facilement retrouver le modèle de Poincaré : si nous assimilons \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} , on peut associer à une base (e_1, e_2) un couple (z_1, z_2) de nombres complexes, et définir une application

$$\begin{aligned} \phi & : SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H} \\ (e_1, e_2) & \mapsto z = z_2/z_1. \end{aligned}$$

Il est clair que ϕ est invariante par isométrie, et son image appartient au demi-plan supérieur ; c'est une version explicite de l'identification donnée au paragraphe précédent entre le demi-plan de Poincaré et le quotient $SL(2, \mathbb{R})/SO(2, \mathbb{R})$.

La multiplication à gauche par un élément

$$\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

de $SL(2, \mathbb{Z})$ remplace (e_1, e_2) par $(ae_1 + \beta e_2, \gamma e_1 + \delta e_2)$, qui est une autre base du même réseau $\mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$, et l'on obtient de cette façon toutes les bases directes de ce réseau. Le quotient à gauche $SL(2, \mathbb{Z}) \backslash SL(2, \mathbb{R})$ est donc l'espace des réseaux.

Pour pouvoir décrire explicitement le flot géodésique, il nous faut disposer de coordonnées sur cet espace des réseaux, c'est-à-dire donner une façon de choisir une base pour un réseau donné. La méthode classique est celle de Minkowski, qui consiste à choisir pour e_1 le plus court vecteur du réseau (bien défini au signe près, sauf si le réseau est carré ou hexagonal), et pour e_2 le plus court vecteur du réseau qui soit indépendant de e_1 et forme une base positivement orientée (bien défini, sauf si le réseau est hexagonal). Cette méthode est évidemment équivariante par toute isométrie, et il est facile de vérifier que les bases obtenues se projettent, via l'application ϕ , sur le domaine fondamental de l'action de $SL(2, \mathbb{Z})$ sur \mathbb{H} que nous avons défini dans la section 2. L'action triviale de $-Id$ sur le fibré unitaire tangent correspond au fait que la méthode de Minkowski donne pour chaque réseau deux bases opposées l'une de l'autre; les réseaux pour lesquels cette méthode fournit plus de deux bases (réseaux carrés et hexagonaux) sont projetés sur les deux points singuliers de la surface modulaire.

5. Un système de coordonnées sur l'espace des réseaux

Nous allons définir une autre méthode pour fixer des coordonnées, qui conduit à des calculs plus faciles. Etant donné un réseau dans \mathbb{R}^2 (identifié à \mathbb{C} pour la commodité de notation), on définit pour chaque point x du réseau l'intervalle horizontal ouvert $H_x =]x - 1, x + 1[$. La demi-droite verticale issue de x recoupe au moins un autre intervalle horizontal : en effet, soit le réseau contient un vecteur vertical, et cette demi-droite rencontre un autre point du réseau, soit il n'en contient pas, donc les deux vecteurs d'une base du réseau ont des abscisses rationnellement indépendantes, et il y a des points du réseau arbitrairement proches de la demi-droite.

Soit H_y le premier intervalle rencontré, et supposons que le point de rencontre soit à gauche de y . Ce point de rencontre peut s'écrire $x + ic = y - a$; on appellera V_x l'intervalle vertical $[x, x + ic[$ qu'il définit. On prolonge ensuite vers la droite tous les intervalles horizontaux jusqu'à rencontrer un intervalle vertical, ce qui est toujours possible par un raisonnement du même type que ci-dessus. Par symétrie, pour tout intervalle V_x , il existe un seul H_z dont le prolongement le coupe; on écrira $z + b = x + id$ le point d'intersection. Il est clair que (a, c) et $(-b, d)$ sont des vecteurs du réseau, et on vérifie sans peine qu'ils forment une base (cf. Fig. 4; en fait, cette construction donne un domaine fondamental pour le réseau formé de deux rectangles, l'un de base a et de hauteur d , l'autre de base b et de hauteur c). On vérifie immédiatement que l'on a, par construction, $0 < a < 1 \leq b$ et $0 \leq d < c$.

Si le premier point de rencontre avec H_y est à droite de y , on peut faire la construction symétrique, et on obtient une base $(a, c), (-b, d)$ avec $0 < b < 1 \leq a$ et $0 \leq c < d$.

Cette construction tombe en défaut dans deux cas :

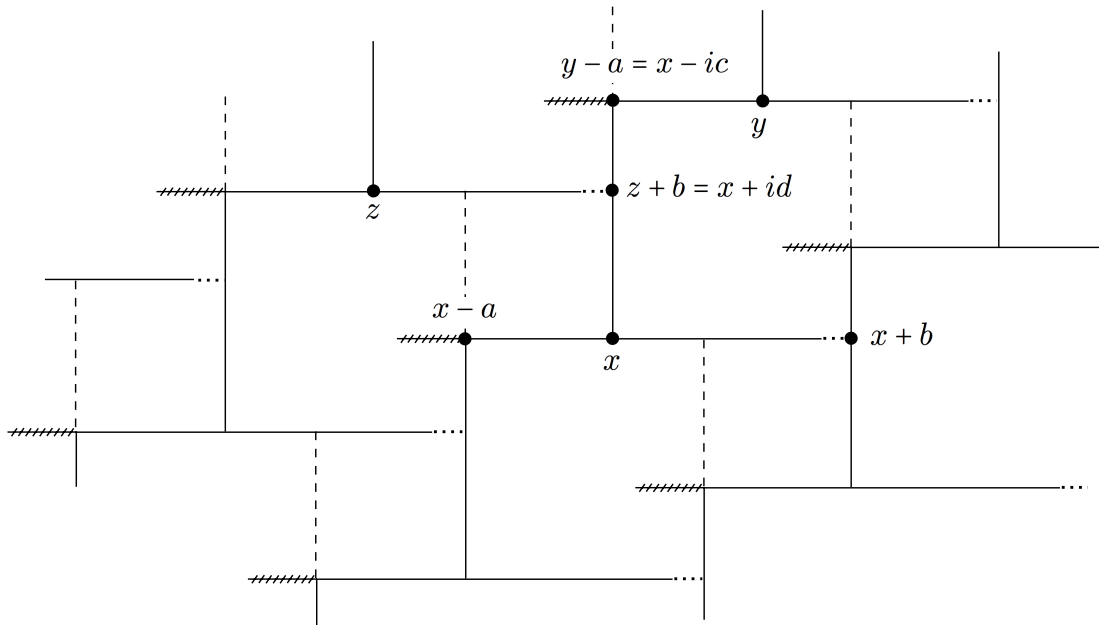


FIGURE 4.

- si le premier point d'intersection est égal à y ; dans ce cas le réseau contient un vecteur vertical, et on peut trouver une base de la forme $(0, c), (-b, d)$ avec $d < c, b \geq 1$ (et aussi une base de la forme $(a, c), (0, d)$ avec $c < d, a \geq 1$);
- si le premier point d'intersection est contenu dans deux intervalles horizontaux, et dans ce cas le réseau contient un vecteur horizontal, et il y a une base de la forme $(a, 0), (-b, d)$, avec $b < a < 1$.

On peut remarquer que le premier cas correspond à des points dont l'orbite positive tend vers l'infini sur la surface modulaire, et le second cas à des points dont l'orbite négative tend vers l'infini; par exemple, une base de la forme $(0, c), (-b, d)$ devient $(0, ce^{-t/2}), (-be^{t/2}, de^{-t/2})$ sous l'action du flot géodésique, et l'application ϕ définie ci-dessus lui fait correspondre le nombre complexe $d/c + ie^t b/c$, qui est contenu dans le domaine fondamental donné ci-dessus dès que $d/c < 1/2$ et tend vers l'infini.

Pour résumer, nous avons montré qu'il existe un domaine fondamental pour l'action à gauche de $SL(2, \mathbb{Z})$ sur $SL(2, \mathbb{R})$ formé de matrices $\begin{pmatrix} a & c \\ -b & d \end{pmatrix}$, où (a, b, c, d) appartient à l'un des 3 ensembles suivants :

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid ad + bc = 1, 0 < b < 1 \leq a, 0 \leq c < d\} \\ \Omega_1 &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid ad + bc = 1, 0 \leq a < 1 \leq b, 0 \leq d < c\} \\ \Omega_2 &= \{(a, b, 0, d) \in \mathbb{R}^4 \mid ad = 1, 0 < b < a < 1\}. \end{aligned}$$

Le choix pour les inégalités strictes ou larges sur les bords de Ω_0 et Ω_1 est assez arbitraire, puisqu'il y a des identifications entre les bords; en particulier le bord $a = 0$ de Ω_0 s'identifie au bord $b = 0$ de Ω_1 , l'identification étant donnée par la formule :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ -a & \frac{1}{a} - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Il peut être utile d'interpréter ces domaines de la façon suivante : tout réseau ne contenant pas de vecteur horizontal possède un unique domaine fondamental formé de deux rectangles alignés, le plus étroit étant de largeur inférieure à 1, le plus large étant plus haut que l'autre, et de largeur supérieure à 1 (cf. Fig. 4). On peut alors prendre comme coordonnées les deux largeurs et la plus petite des hauteurs ; l'autre s'en déduit puisque l'aire du domaine fondamental est 1. On retrouve le fait, évident sur les équations, que les domaines Ω_0 et Ω_1 sont de dimension 3 ; Ω_0 (resp. Ω_1) correspond au cas où c'est le rectangle de droite (resp. de gauche) qui est le plus grand. Quant à Ω_2 , il correspond aux réseaux contenant un vecteur horizontal petit ; le plus petit rectangle est alors de hauteur nulle, et l'on ne peut plus assurer que la largeur du plus grand rectangle soit supérieure à 1.

6. Le codage du flot géodésique

Dans ces coordonnées, le flot géodésique s'écrit simplement, du moins localement :

$$g_t(a, b, c, d) = (e^{t/2}a, e^{t/2}b, e^{-t/2}c, e^{-t/2}d)$$

Mais pour t assez grand, les deux premières coordonnées sont plus grandes que 1 (sauf dans le cas particulier où l'une d'entre elles est initialement nulle), et l'on traverse le bord du domaine fondamental ; il faut alors faire une identification pour poursuivre l'orbite à partir d'une autre face. Pour décrire complètement le flot, il faut étudier cette identification.

Le domaine Ω_0 peut être paramétré par les 3 coordonnées a, b, c , puisque $d = (1 - bc)/a$, et plongé dans \mathbb{R}^3 (cf. Fig. 5) ; il possède alors cinq bords, dont trois, donnés respectivement par les équations $b = 0, c = 0, c = 1/(a + b)$, sont formés de segments d'orbites du flot géodésique. Les deux derniers sont Σ_0 , d'équation $a = 1$, sur lequel le flot est rentrant, et Λ_0 , d'équation $b = 1$, sur lequel le flot est sortant. Le bord Σ_0 peut être paramétré par (b, c) , avec $b \in [0, 1[$ et $c \in [0, 1/(b + 1)[$; on reconnaît le domaine Σ du paragraphe 1. Le bord Λ_0 peut, lui, être paramétré par (a, c) , avec $a > 1$ et $c \in [0, 1/(a + 1)[$.

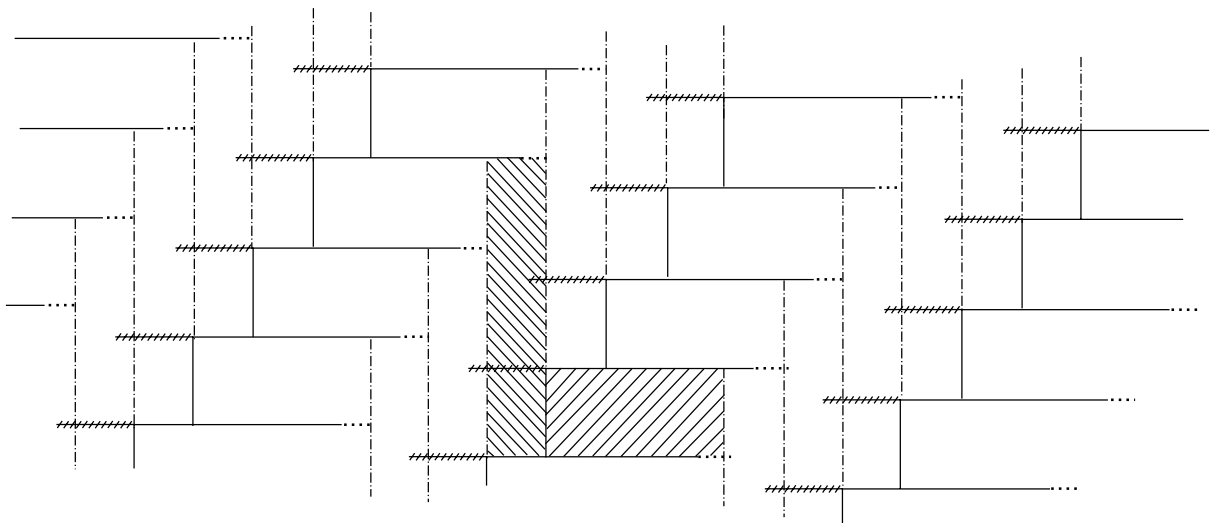


FIGURE 5.

On peut de même paramétrer Ω_1 , cette fois par (a, b, d) , et définir un bord rentrant Σ_1 , paramétré par (a, d) , et un bord sortant Λ_1 , paramétré par (b, d) .

Notons $\tilde{\Sigma} = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$ la réunion des deux bords rentrant; on peut identifier $\tilde{\Sigma}$ à $\Sigma \times \{0, 1\}$, avec coordonnées (x, y, ϵ) où ϵ appartient à $\{0, 1\}$, (x, y, ϵ) correspondant à l'élément (x, y) de Σ_ϵ . Le résultat principal de cet article est le suivant :

Proposition 6.1. *L'application de premier retour \tilde{T} du flot géodésique en $\tilde{\Sigma}$ est un revêtement d'ordre 2 de l'application \bar{T} définie au paragraphe 1, c'est-à-dire qu'elle est donnée par*

$$\tilde{T} : \tilde{\Sigma} = \Sigma \times \{0, 1\} \rightarrow \tilde{\Sigma}, \quad (x, y, \epsilon) \mapsto (\{1/x\}, x - x^2y, 1 - \epsilon)$$

Preuve. La remarque essentielle est que Λ_0 s'identifie naturellement à Σ_1 ; en effet, le point (a, c) de Λ_0 s'identifie au point $(\{a\}, \frac{1-c}{a})$ de Σ_1 , par produit par un élément de $SL(2, \mathbb{Z})$, en tenant compte du fait que dans la formule suivante on a $d = \frac{1-c}{a}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & [a] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ -1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{a\} & c + [a]d \\ -1 & d \end{pmatrix}.$$

Cette identification s'interprète très bien en termes de domaines fondamentaux : on passe d'un domaine fondamental où le plus petit rectangle est de largeur 1 et le plus grand de largeur a à un autre où le plus grand rectangle est de largeur 1 et le plus petit de largeur $\{a\}$ (cf. Fig. 1). De la même façon, Λ_1 s'identifie à Σ_0 .

Il est alors facile de calculer l'application \tilde{T} sur Σ_0 : partant du point (x, y) de Σ_0 , le flot géodésique arrive au temps $-2 \log x$ au point $(1/x, xy)$ de Λ_0 , qui est identifié au point $(\{1/x\}, x - x^2y)$ de Σ_1 . Après un calcul symétrique pour les points de Σ_1 , on retrouve la formule donnée ci-dessus.

□

Remarque. Au lieu de paramétrer Σ_0 par (b, c) , on peut prendre comme coordonnées $(b, c/d)$, c'est-à-dire prendre le rapport des hauteurs et le rapport des largeurs (puisque sur Σ_0 on a $a = 1$, donc $b = b/a$) plutôt que la hauteur et la largeur du plus petit rectangle; ce système de coordonnées fait jouer un rôle symétrique aux largeurs et aux hauteurs, il envoie Σ_0 sur le carré unité, et un calcul simple montre que l'application de premier retour s'écrit alors comme un revêtement de l'application \bar{T}_1 décrite au paragraphe 1.

□

De la mesure invariante pour \tilde{T} on déduit une mesure invariante pour g_t , qui a diverses interprétations : mesure de Haar sur $SL(2, \mathbb{R})$, mesure de Liouville pour le flot géodésique, mesure donnée par la métrique riemannienne naturelle sur la surface modulaire... contrairement aux autres, la mesure induite par la métrique est complètement définie, et pas seulement à une constante multiplicative près, et on peut montrer que la mesure transverse invariante qu'elle définit sur $\tilde{\Sigma}$ est exactement la mesure de Lebesgue; en particulier, le volume de $\tilde{\Sigma}$ pour cette mesure transverse est $2 \log 2$; nous utilisons ces faits dans la prochaine section.

En utilisant l'application définie à la fin de la section 1, on peut facilement donner un codage explicite de l'application \tilde{T} , c'est-à-dire une conjugaison avec un revêtement d'ordre 2 du décalage S sur $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$. L'ensemble I défini à la fin de la section 1 correspond ici à l'intersection de la surface de section avec les géodésiques qui repassent une infinité de fois,

dans le passé et le futur, dans un domaine compact ; le codage est évidemment plus facile dans ce domaine, mais il est aussi possible dans le complémentaire, au moyen de suites finies ; nous n'insisterons pas sur ce sujet, sauf pour remarquer que des complications de ce type sont inévitables quand on essaye de conjuguer une application sur une surface et une application sur un ensemble de Cantor comme $\mathbb{N}^*\mathbb{Z}$.

On a même un résultat plus précis que le codage de l'application de premier retour, puisque tout élément du domaine fondamental s'écrit de façon unique $g_t(x, y, \epsilon)$, avec $(x, y, \epsilon) \in \tilde{\Sigma}$ et $0 \leq t < -2 \log x$; rappelons qu'étant données une bijection T sur un ensemble X et une application f définie sur X à valeurs réelles positives, telle que la série $\sum f(T^n x)$ tende vers l'infini pour tout point x de X , on appelle flot spécial au dessus de X , d'application de premier retour T et de temps de retour f , le flot ϕ_s sur $\{(x, t), x \in X, 0 \leq t < f(x)\}$ défini par $\phi_s(x, t) = (x, t + s)$ si $t + s < f(x)$, et $\phi_s(x, t) = (Tx, 0)$ si $s + t = f(x)$ (ces formules permettent de définir $\phi_s(x, t)$ pour tout s).

Corollaire 6.2. *L'application qui au point $g_t(x, y, \epsilon)$ associe $((a_n)_{n \in \mathbb{Z}}, \epsilon, t)$, où (a_n) est le codage de (x, y) défini dans la section 1, conjugue le flot géodésique à un flot spécial ψ_t au dessus de $\mathbb{N}^*\mathbb{Z} \times \{0, 1\}$, de temps de retour $-2 \log[0; a_1, \dots, a_n, \dots]$ et dont l'application de premier retour est un revêtement d'ordre 2 du décalage.*

Il est intéressant de remarquer que le temps de retour à la section ne dépend que de la coordonnée x (ou de la partie d'indices positifs de la suite (a_n) associée).

Si, au lieu de s'intéresser aux points individuels, on regarde les géodésiques, on obtient un codage par les suites d'entiers positifs :

Corollaire 6.3. *On a une bijection entre les géodésiques de la surface modulaire et les couples (u, ϵ) (u suite finie ou infinie d'entiers positifs, $\epsilon \in \{0, 1\}$) modulo l'équivalence $(u, \epsilon) \equiv (Su, 1 - \epsilon)$. En particulier, une géodésique tend vers l'infini si et seulement si la suite u n'est pas définie au-delà d'un certain rang, elle vient de l'infini si et seulement si elle n'est pas définie avant un certain rang. Une géodésique est périodique si et seulement si la suite (u_n) associée est périodique, et dans ce cas, si p est la plus petite période paire de la suite, la longueur de la géodésique est*

$$\sum_{j=0}^{p-1} -2 \log[0; \overline{u_{j+1}, \dots, u_{j+p}}].$$

Preuve. Seule la dernière assertion demande une démonstration ; mais il suffit de calculer le temps nécessaire pour aller du point $(u, \epsilon, 0)$ à lui-même, en calculant les p temps de retour intermédiaire à la section, d'après la formule donnée au corollaire précédent.

□

7. La constante de Lévy et le volume du fibré tangent à la surface modulaire

Si l'on tronque à l'ordre n le développement en fraction continue d'un nombre

$$x = [0; a_1, \dots, a_n, \dots],$$

on obtient un nombre rationnel p_n/q_n , appelé convergent d'ordre n de x . Ces nombres se calculent facilement par récurrence, et on a les formules :

$$\begin{aligned} p_0 &= 0 & p_1 &= a_0 a_1 + 1 & p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \text{ si } n \geq 2 \\ q_0 &= 1 & q_1 &= a_1 & q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} \text{ si } n \geq 2. \end{aligned}$$

Les convergents sont les meilleures approximations rationnelles de x , ils satisfont $|x - p_n/q_n| < 1/q_n^2$. Pour évaluer la vitesse d'approximation, il est intéressant de connaître la croissance des q_n ; celle-ci est donnée, pour presque tout nombre, par la proposition suivante, due à Lévy (cf. [Lev36]) :

Proposition 7.1. *Pour presque tout nombre, la suite des dénominateurs des convergents satisfait :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log q_n}{n} = \frac{\pi^2}{12 \log 2}$$

Preuve. Nous allons étudier la géodésique issue de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix}$$

Notons $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ ses temps successifs d'intersection avec la surface $\tilde{\Sigma}$; quitte à écartier un ensemble de mesure nulle, nous pouvons supposer qu'il y a une infinité d'intersections. On définit une suite x_n par $x_{-1} = 1, x_0 = x, x_{n+1} = x_{n-1} - a_{n+1}x_n$; on vérifie facilement que $x_n/x_{n-1} = T^n(x)$. On montre par récurrence que le point d'intersection d'ordre $2n$ avec Σ est donné par :

$$\begin{pmatrix} x_{2n-1} & q_{2n-1} \\ -x_{2n} & q_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{\tau_{2n}}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\tau_{2n}}{2}} \end{pmatrix}$$

et une formule analogue pour l'intersection d'ordre $2n + 1$; le point essentiel consiste à voir que l'on passe d'un point au suivant en multipliant à droite par une matrice diagonale correspondant au flot, et à gauche par une matrice entière correspondant à un changement de coordonnées; cette matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{2n} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & a_{2n+1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

suivant la parité. □

On a le lemme suivant :

Lemme 7.2. *Soit $\begin{pmatrix} 1 & c \\ -b & d \end{pmatrix}$ un élément de Σ_0 ; on a toujours $1/2 \leq d \leq 1$.*

Preuve du lemme. On a $d + bc = 1$, b et c sont positifs, donc d est inférieur à 1; comme c est inférieur à d et b inférieur à 1, $2d$ est supérieur à 1, d'où le résultat. □

Suite de la preuve. Appliqué aux points calculés plus haut, ce lemme implique que, pour tout point x , on a : $1/2 \leq q_n e^{\tau_n/2} \leq 1$. Si l'orbite de x recoupe une infinité de fois la surface de section, en prenant le logarithme et en divisant par n , on en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log q_n}{n} - \frac{\tau_n}{2n} = 0$$

Autrement dit, le terme qui apparaît dans le théorème de Lévy est la moitié du temps de retour moyen sur l'orbite. Compte tenu du fait que le temps de premier retour d'un point

$\begin{pmatrix} 1 & c \\ x & d \end{pmatrix}$ ne dépend que de x , et du codage donné au paragraphe précédent, on voit que, si l'on appelle $\tau(x)$ la fonction temps de premier retour, on a :

$$\frac{\tau_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \tau(T^i x)$$

Cette expression est la somme de Birkhoff associée à la fonction temps de retour. Mais on sait que le flot géodésique sur la surface modulaire est ergodique; donc cette fonction tend presque partout vers une constante, qui est la moyenne du temps de premier retour sur la surface $\tilde{\Sigma}$. Cette moyenne est elle-même le quotient, par le volume de la surface, de l'intégrale de ce temps de retour sur $\tilde{\Sigma}$, qui n'est autre que le volume de l'espace tout entier. Cet espace est le fibré tangent à la surface modulaire. Cette surface est d'aire $\pi/3$, puisqu'elle admet dans le plan hyperbolique un domaine fondamental qui est un triangle isocèle d'angle $0, \pi/3, \pi/3$; il suffit pour obtenir l'aire d'appliquer la formule de Gauss pour les triangles hyperboliques. Le fibré tangent a pour fibre $PSO(2, \mathbb{R})$, qui est de longueur π (ne pas oublier que $-Id$ agit de façon triviale, c'est pour cela que la fibre a pour longueur π et non 2π comme on s'y attend); le volume total de l'espace est donc $\pi^2/3$.

On a vu plus haut que l'aire de $\tilde{\Sigma}$ est $2 \log 2$; le temps de retour moyen est donc $\pi^2/(6 \log 2)$, et compte tenu du facteur 2 introduit dans le calcul, on retrouve bien la constante cherchée.

□

8. Un codage du flot géodésique sur un alphabet fini

Un choix différent de la surface de section conduit à retrouver d'autres algorithmes de fractions continues. En particulier, si, dans la procédure donnée au paragraphe 4, on inverse les deux dernières étapes, c'est-à-dire si on prolonge le segment vertical jusqu'à rencontrer une deuxième fois le segment horizontal avant de poursuivre celui-ci (cf. Fig. 6), on obtient un domaine fondamental différent, caractérisé par $0 \leq a \leq 1 \leq b \leq 1 + a$, sans condition sur les deux autres coefficients, sauf $ad + bc = 1$.

On peut alors refaire la même étude qu'au paragraphe 5, en définissant deux domaines Ω'_0 et Ω'_1 , avec des faces rentrantes et sortantes. L'une des faces rentrantes, Σ'_0 , est formée des matrices du type

$$\begin{pmatrix} a & c \\ -1 & d \end{pmatrix}$$

avec $a < 1$ et c, d positifs, et Σ'_1 est définie de façon symétrique. La surface de section sur laquelle on définit l'application de premier retour est $\Sigma'_0 \cup \Sigma'_1$.

On peut paramétrer Σ'_0 par a et c , tous deux compris entre 0 et 1, et $\tilde{\Sigma}'$ par (a, c, ϵ) , avec $\epsilon = 0$ ou 1. Un calcul simple montre que l'application de premier retour en $\tilde{\Sigma}'$ est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{T}'_1 : \tilde{\Sigma}' \rightarrow \tilde{\Sigma}', \quad (a, c, \epsilon) &\mapsto \left(\frac{a}{1-a}, c(1-a), \epsilon \right) \text{ si } a < \frac{1}{2} \\ (a, c, \epsilon) &\mapsto \left(\frac{1-a}{a}, 1-c(1-a), 1-\epsilon \right) \text{ si } a \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

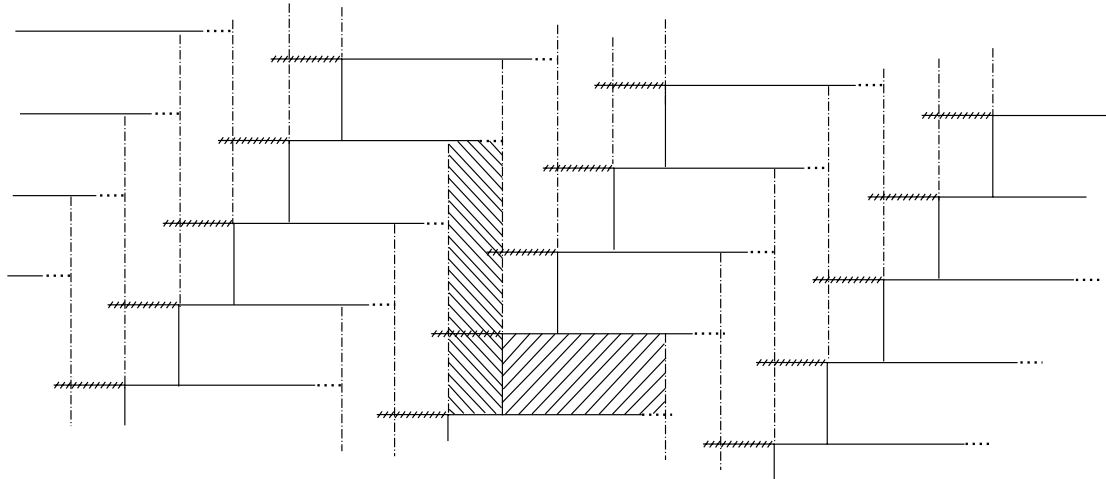


FIGURE 6.

C'est un revêtement d'ordre 2 de l'application représentée ci-dessous (cf. Fig. 7) ; elle a un domaine de définition très simple, mais des formules un peu compliquées (en particulier, elle ne préserve pas la mesure de Lebesgue). En utilisant la partition de Markov naturelle pour cette fonction, on peut coder le flot géodésique par un alphabet à deux lettres.

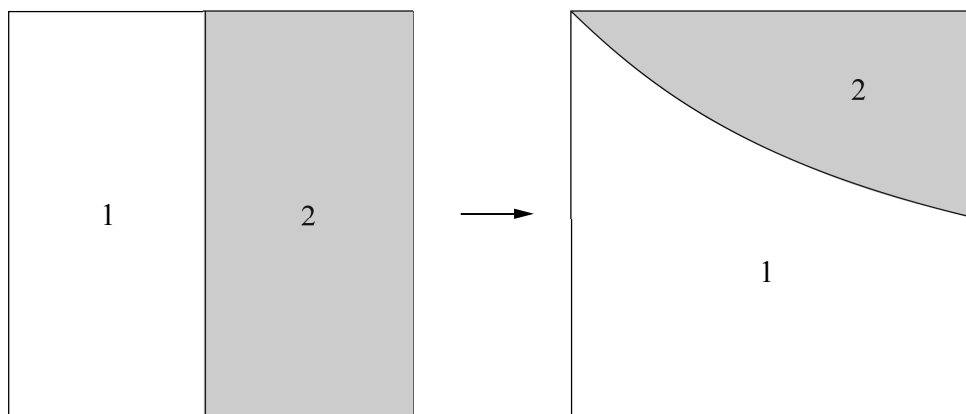


FIGURE 7.

En utilisant comme coordonnées non plus (a, c) mais (a, d) , avec $0 \leq a < 1$ et $0 \leq d < 1/a$, on trouve pour l'application de premier retour la forme suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{T}' : \tilde{\Sigma}' \rightarrow \tilde{\Sigma}', \quad (a, d, \epsilon) \mapsto & \left(\frac{a}{1-a}, d(1-a)^2 + (1-a), \epsilon \right) \text{ si } a < \frac{1}{2} \\ (a, d, \epsilon) \mapsto & \left(\frac{1-a}{a}, a - a^2d, 1 - \epsilon \right) \text{ si } a \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

C'est un revêtement de l'application schématisée dans la figure 8 ; cette application préserve la mesure de Lebesgue, et son domaine est de mesure infinie.

Dans les deux cas, l'application de premier retour se projette sur la première coordonnée en l'application T' de l'intervalle $[0, 1]$ définie par $T'(x) = x/(1-x)$ si $x < 1/2$, $T'(x) = (1 -$

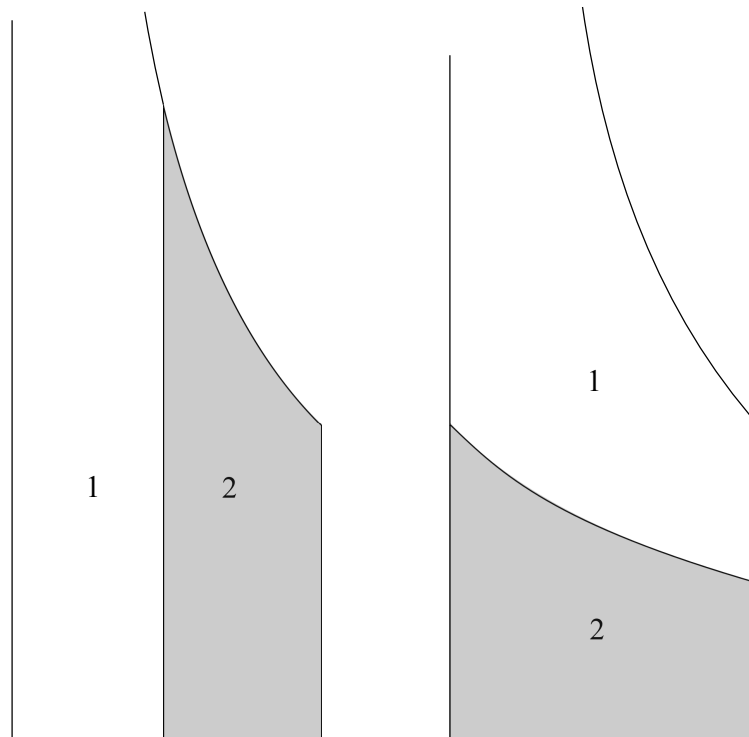


FIGURE 8.

$x)/x$ si $x \geq 1/2$. On peut voir cette application comme la version projective de l'algorithme qui consiste à prendre deux nombres positifs a et b , à soustraire le plus petit du plus grand et à itérer l'opération; on réalise ainsi l'algorithme d'Euclide en ne faisant que des soustractions, donc avec beaucoup d'étapes intermédiaires. Il s'agit d'une version « lente » de l'algorithme des fractions continues : si x est compris entre $1/(n+1)$ et $1/n$, alors $\{1/x\} = T^n(x)$.

RÉFÉRENCES

- [AF91] R. Adler and L. Flatto. Geodesic flows, interval maps and symbolic dynamics. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 25 :229–334, 1991.
- [AN] P. Arnoux and A. Nogueira. Mesures de gauss pour des algorithmes de fractions continues multidimensionnelles (à paraître aux Annales Scientifiques de l'École Normale supérieure).
- [Art24] E. Artin. Ein mechanisches System mit quasiergodischen Bahnen. *Abh. Math. Sem. Univ. v. Hamburg*, 3 :170–175, 1924.
- [Ito84] S. Ito. Number theoretic expansions, algorithms and metrical observations. *Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux*, pages 3.01–3.27, 1984.
- [Lev36] P. Levy. Sur le développement en fraction continue d'un nombre choisi au hasard. *Composition Mathematica*, 3 :286–303, 1936.
- [Nak81] H. Nakada. Metrical theory for a class of continued fraction transformations and their natural extensions. *Tokyo J. Math.*, 4 :399–426, 1981.
- [Roh64] V. A. Rohlin. Exact endomorphisms of Lebesgue spaces. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 39 :1–36, 1964.
- [Ser85] C. Series. The modular surface and continued fractions. *J. London Math. Soc.*, 31 :69–80, 1985.
- [Vee84] W.A. Veech. The metric theory of interval exchange transformations I,II,III. *Amer. J. Math.*, 106 :1331–1422, 1984.
- [Vee86] W.A. Veech. The Teichmüller geodesic flow. *Annals of Math.*, 124 :441–530, 1986.



VOUZZAVEDIBISAR : Informagique : FLOUP (par Jean-Pierre PETIT)



B.I.A.A.

BULLETIN D'INFORMATIQUE APPROFONDIE ET APPLICATIONS

Revue fondée par Edmond Bianco

Publication trimestrielle de l'Université d'Aix-Marseille

ISSN 0291-5413

Le bulletin d'informatique approfondie et applications est une revue pluridisciplinaire destinée à éclairer les connaissances fondamentales informatiques. Les fondements sont un domaine vaste allant de la structure intérieure de l'ordinateur, où se matérialise la machine universelle, à l'algorithme qui devient programme, pour aboutir à la notion de système. Nous contribuons ainsi à ce que les autres disciplines plus anciennes (sciences humaines et de la société, sciences de la matière et de l'énergie, sciences mathématiques, sciences de la nature, sciences de la terre, sciences de l'univers, sciences de la vie, etc.) n'aient pas tendance à considérer l'informatique comme un simple outil définitivement figé. Il importe de continuer à maîtriser les développements fondamentaux de l'informatique pour que nos disciplines puissent en tirer un meilleur parti.

Notre publication est ouverte à l'ensemble de la communauté scientifique. Le périodique est diffusé vers les bibliothèques universitaires de France et vers quelques bibliothèques des cinq continents.

COMITÉ SCIENTIFIQUE

Pr. Patrick Abellard (Université du Sud, Toulon)
Françoise Adreit (Université de Toulouse I)
France Chappaz (Université de Provence)
Georges Chappaz (Université d'Aix-Marseille)
M'hamed Charifi (Consultant autonome)
Jean - Paul Coste (Université de Provence)
Pr. Roger Cusin (Université de la Méditerranée)
Christian Faivre (Université d'Aix-Marseille)
Jean - Claude Fumanal (Université Paul Cézanne)
Alain de Gantès (Université d'Aix-Marseille)
Jean Gonella (Université d'Aix-Marseille)
Pr. Bernard Goossens (Université de Perpignan)
Sami Hilala (Université d'Aix-Marseille)
Patrick Isoardi (Université d'Avignon et Pays de Vaucluse)
Robert Jacquier (Université Paul Cézanne)
Jean - Michel Knippel (Université d'Aix-Marseille)
Jean - Philippe Lehmann (Université d'Avignon et Pays de Vaucluse)
Pr. Agathe Merceron (Technische Fachhochschule, Berlin)
Nadia Mesli (Université d'Aix-Marseille)
Eric Olivier (Université d'Aix-Marseille)
Patrick Sanchez (C.N.R.S., Marseille)
Rolland Stutzmann (I.U.T. de Strasbourg Sud)
Alain Thomas (Université d'Aix-Marseille)
Pr. André Tricot (E.S.P.E., Toulouse)

CORRESPONDANT(E)S

Pr. Mohamed Tayeb Laskri (Université Badji Mokhtar, Afrique)
Sylvie Monjal (Cégep de Sainte Foy, anciennement Académie de Québec, Amériques)
Moussa HadjAli (Université Virtuelle de Syrie, Asie)
José Rouillard (Université des Sciences et Technologies de Lille, Europe)
Kalina Yacef (Université de Sydney, Océanie)