

BULLETIN D'INFORMATIQUE APPROFONDIE ET APPLICATIONS

COMPUTATION - INFORMATION

N° 84 - DECEMBRE 2009

COMITE SCIENTIFIQUE ET DE REDACTION

Patrick Abellard
Françoise Adreit
France Chappaz
Georges Chappaz
M'hamed Charifi
Jean - Paul Coste
Roger Cusin
Jean - Claude Fumanal
Alain de Gantès
Bernard Goossens
Sami Hilala
Patrick Isoardi
Robert Jacquier
Jean - Michel Knippel
Jean - Philippe Lehmann
Agathe Merceron
Nadia Mesli
Patrick Sanchez
Rolland Stutzmann
André Tricot

1 EDITORIAL
Lettre ouverte à Madame le Ministre du 13 mai 2009

par la section 27 (Informatique) du CNU

3 Définitions formelles des réseaux de Petri

par Robert Valette

CORRESPONDANTS

Afrique
Mohamed Tayeb Laskri

Amériques
Sylvie Monjal

Asie
Moussa HadjAli

Europe
José Rouillard

Océanie
Kalina Yacef

35 Exemple des lecteurs et des écrivains
Spécifications

par Robert Valette

41 VOZZAVEDIBISAR
Chamonix. 6 février 1981

par Jean - Pierre Petit

<http://www.univ-provence.fr/biaa>

Publication trimestrielle, gratuite, de l'Université de Provence

Aix - Marseille Université

Dépôt légal : janvier 2009

ISSN 0291 - 5413

BULLETIN D'INFORMATIQUE APPROFONDIE ET APPLICATIONS

COMPUTATION - INFORMATION

N° 84 - DECEMBRE 2009

DIRECTEUR

Jean - Michel Knippel

FONDATEUR

Edmond Bianco

SERVEUR DE PUBLICATION

Christian Blanvillain

SECRETARIAT

Kalassoumi Adjilani

Université de Provence
Equipe Hermès. Case 33
3 place Victor Hugo
F - 13331 Marseille Cedex 3
Téléphone : +33 (0) 491 106 230
Télécopie : +33 (0) 491 509 110

DEPOSITAIRE

Université de Provence
Bibliothèque Universitaire
1 place Victor Hugo
F - 13331 Marseille Cedex 3
Téléphone : +33 (0) 491 108 529
Télécopie : +33 (0) 491 957 557

IMPRIMEUR

Université de Provence
Service Reprographie
3 place Victor Hugo
F - 13331 Marseille Cedex 3
Téléphone : +33 (0) 491 106 048
Télécopie : +33 (0) 491 106 580

1 EDITORIAL

Lettre ouverte à Madame le Ministre du 13 mai 2009

par la section 27 (Informatique) du CNU

3 Définitions formelles des réseaux de Petri

par Robert Valette

35 Exemple des lecteurs et des écrivains Spécifications

par Robert Valette

41 VOZZAVEDIBISAR

Chamonix. 6 février 1981

par Jean - Pierre Petit

<http://www.univ-provence.fr/biaa>

Publication trimestrielle, gratuite, de l'Université de Provence

Aix - Marseille Université

Impression : mai 2010

ISSN 0291 - 5413

EDITORIAL

Lettre ouverte à Madame le Ministre du 13 mai 2009

par la section 27 (Informatique) du CNU

Madame La Ministre,

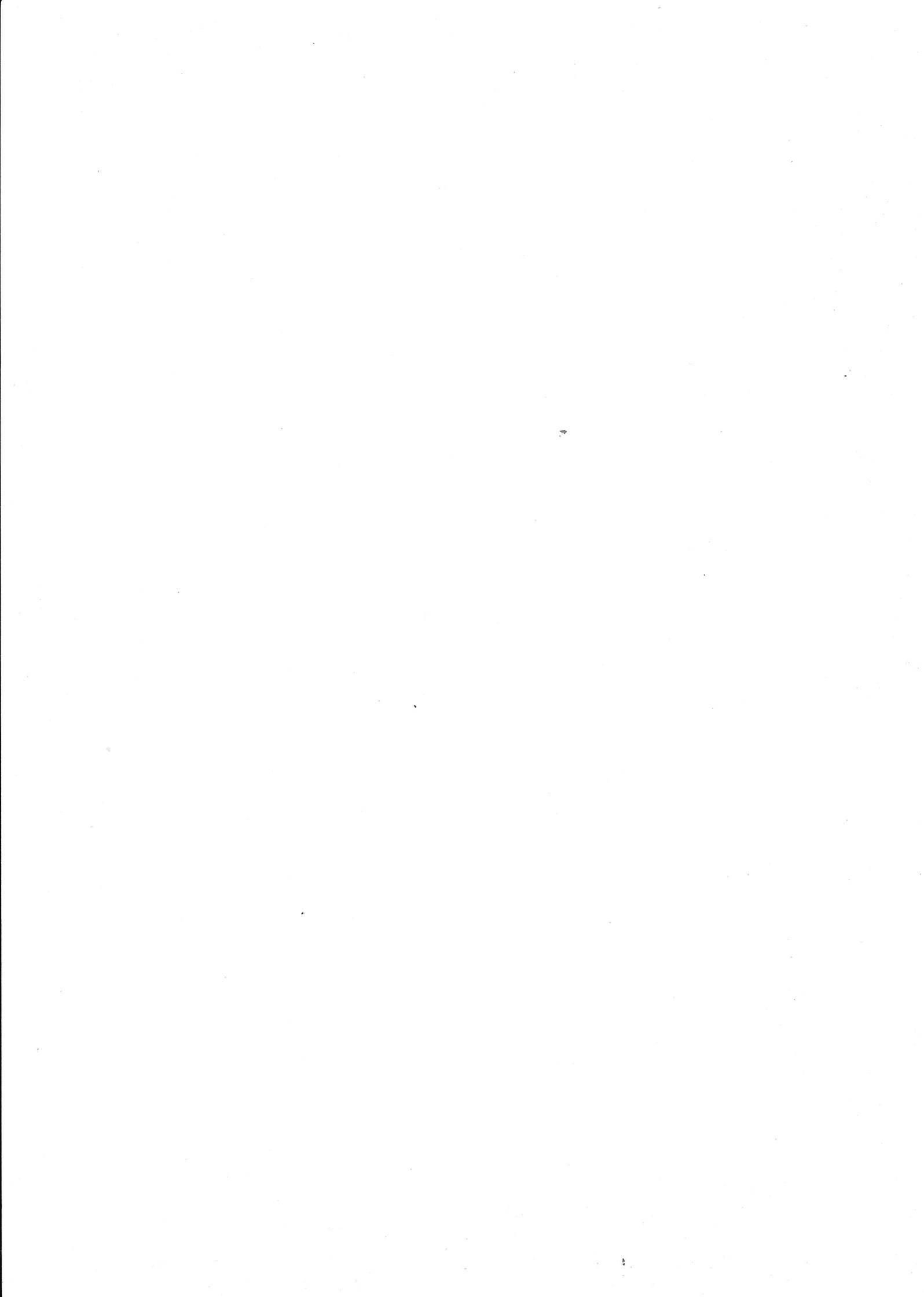
Vous avez indiqué, lors du CTPU du 24 mars, que la période transitoire pour la mise en place du décret modifiant le fonctionnement, la composition et les missions du CNU se déroulerait en deux phases : une partie au renouvellement de mandature (mode de scrutin, suppléants, ...) et une autre, celle concernant l'évaluation des enseignants-chercheurs, dès la publication du décret.

Vous devez savoir, Madame La Ministre, que les membres actuels des sections du CNU n'ont été ni élus ni nommés pour cette mission. Vous avez ainsi décidé de modifier les mandats des représentants des disciplines universitaires dans cette instance reconnue par tous nos collègues sans pour autant donner les moyens de cette modification profonde et lourde de conséquences, impossible à mettre en œuvre sans surcharger l'ensemble des membres de notre section.

Nous ne réfutons pas la nécessaire évaluation de nos activités, mais nous trouvons les objectifs de cette évaluation tellement flous que nous ne pouvons l'accepter en l'état. Nous refusons le calendrier que vous proposez, alors que le décret CNU prévoit lui même pour l'ensemble de nos tâches des suppléants destinés à soulager la charge administrative que nous assumons pour chacun d'entre nous sans réelle contre partie.

Aussi nous tenons à vous informer par ce courrier que si les objectifs de l'évaluation ne sont pas clairement précisés et si les moyens humains et matériels nécessaires pour pouvoir effectuer ces évaluations ne sont pas donnés, nous serons dans l'impossibilité de mener à bien notre tâche d'évaluation et de siéger pour la session d'évaluation.

Veillez recevoir, Madame la Ministre, nos respectueuses salutations.



Chapitre 2

Définitions formelles des réseaux de Petri

Robert Valette

LAAS-CNRS Toulouse,

version de mai 2007

Pré-requis / Contenu : Ce chapitre définit formellement les réseaux de Petri. D'abord sous la forme d'un graphe, puis à l'aide d'un ensemble de matrices et de vecteurs d'entiers, puis sous la forme de règles de ré-écritures. Enfin, la spécification de la dynamique d'un réseau de pétri est détaillée.

Table des matières

1 Introduction	8
2 Définition sous la forme d'un graphe	8
2.1 Structure du réseau de Petri	8
2.2 Comportement dynamique d'un réseau de Petri	10
2.3 Signification en termes de système à événements discrets	12
3 Définition sous la forme d'un système d'addition de vecteurs	12
3.1 Introduction	12
3.2 Structure du réseau de Petri	13
3.3 Comportement dynamique du réseau de Petri	14
3.4 Discussion	16
4 Définition sous la forme de règles de ré-écriture	16
4.1 Introduction	16
4.2 Structure du réseau de Petri	17
4.3 Comportement dynamique du réseau de Petri	18

5 Plus de définitions sur la dynamique d'un réseau de Petri	18
5.1 Conflit et parallélisme	19
5.2 Sémantique d'entrelacement	21
5.2.1 Séquence de franchissements de transitions	21
5.2.2 Ensemble des marquages accessibles	25
5.3 Retour sur les conflits et le parallélisme	26
5.4 Sémantique du parallélisme vrai	27
5.4.1 Notion de pas	27
5.2.2 Ordre partiel	29
6 Conclusion	33

Table des figures

1 Exemple de réseau de Petri	9
2 Réseau de Petri avec boucle élémentaire	10
3 t_1 non sensibilisée	11
4 t_1 sensibilisée	11
5 t_1 franchie	11
6 Situation de conflit 1	20
7 Situation de conflit 2	20
8 Transitions parallèles 1	20
9 Transitions parallèles 2	20
10 Réseau de Petri avec séquence non franchissable	24
11 Réseau de Petri marqué	26
12 Graphe de marquage associé	26
13 Réseau de Petri avec parallélisme	27
14 Ordre partiel du réseau de la figure 13	31
15 Ordre partiel avec coupe	31
16 Ordre partiel 1 du réseau de la figure 1	32
17 Ordre partiel 2 du réseau de la figure 1	32
18 Ordre partiel 2 réduit	32
19 Ordre partiel 3 du réseau de la figure 1	32
20 Ordre partiel 4 du réseau de la figure 1	32
21 Ordre partiel composé	33

Liste des définitions

1 Structure	8
2 Nœuds d'entrée et de sortie	9
3 Transition source	9
4 Transition puits	9
5 Boucle élémentaire	10
6 Marquage	10
7 Réseau marqué	10
8 Transition sensibilisée	11
9 Franchissement (tir) de transition	11
10 Structure	13
11 Matrice d'incidence	13
12 Marquage	14
13 Transition sensibilisée	14
14 Franchissement (tir) de transition	15
15 Monoïde sur les places	16
16 Degré vis-à-vis d'une place	17
17 Représentation des pré et post conditions	17
18 Description d'une transition	17
19 Structure	17
20 Transition sensibilisée	18
21 Franchissement (tir) de transition	18
22 Transitions en conflit structurel	19
23 Transitions en conflit effectif	19
24 Transitions parallèles	19
25 Monoïde des transitions	21
26 Séquence des franchissements	21
27 Vecteur caractéristique	22
28 Equation fondamentale	23

29 Ensemble des marquages accessibles	25
30 Graphe des marquages accessibles	25
31 Pas	28
32 Ordre partiel strict	29
33 Ensemble d'événements d'un scénario	30
34 Linéarisation d'un ordre partiel	30
35 Scénario	30

1 Introduction

Il est possible de définir formellement un réseau de Petri de diverses façons. On peut considérer qu'il s'agit d'un graphe avec deux types de nœuds et un comportement dynamique (une sémantique opérationnelle). Ou bien qu'il s'agit d'un système d'additions de vecteurs d'entiers positifs, ou encore qu'il s'agit d'un système de règles de ré-écriture.

Ces façons de définir un réseau de Petri sont équivalentes¹, mais il est intéressant de toutes les présenter. En effet, elles donnent une vision chaque fois différente des réseaux de Petri, et l'un des intérêts des réseaux de Petri est précisément de pouvoir passer d'une vision à une autre suivant ce que l'on veut faire. La première vision relie bien entendu les réseaux de Petri à la théorie des graphes, la seconde permet de travailler dans le cadre du calcul matriciel et de l'algèbre linéaire, la troisième permet de faire une jonction directe avec le domaine de l'intelligence artificielle, les règles de ré-écriture étant un cas particulier des règles de production qui sont, classiquement, au cœur des systèmes experts.

Dans ce qui suit, \mathcal{N} est l'ensemble des entiers positifs ou nuls que l'on appelle parfois ensemble des entiers naturels. Lorsque nous nous restreignons à l'ensemble des entiers strictement positifs, nous utiliserons la notation \mathcal{N}^+ .

2 Définition sous la forme d'un graphe

Un réseau de Petri est un graphe avec deux types de nœuds et un comportement dynamique (une sémantique opérationnelle). La première façon de définir formellement les réseaux de Petri est donc de s'appuyer sur les graphes.

2.1 Structure du réseau de Petri

Définition 1 (Structure) *Un réseau de Petri est un quadruplet $\mathcal{R} = \langle P, T, F, W \rangle$ où :*

- P est un ensemble fini de places,
- T est un ensemble fini de transitions,
- $F \subset (P \times T) \cup (T \times P)$ est la relation de flot.
- W est une fonction qui associe un poids aux arcs sous la forme d'un entier strictement positif : $W : F \rightarrow \mathcal{N}^+$

Cette définition diffère de celle d'un graphe car il y a deux types de sommets (les *places* et les *transitions*) et car des poids sont associés aux arcs. Les arcs ne peuvent relier que des sommets (appelés *nœuds* dans le contexte des réseaux de Petri) de types différents. Cela veut dire qu'un arc relie soit une place à une transition soit une transition à une place.

Considérons comme exemple le réseau de Petri de la figure 1 (pour savoir ce qu'il représente lire la section sur l'exemple du problème des lecteurs et des écrivains). Traditionnellement, pour simplifier, on ne note sur le graphe que les poids différents de 1. Les poids des arcs sont donc égaux à 1 par défaut. Nous avons les éléments suivants :

- P est l'ensemble $\{p_1, p_2, p_3\}$,

¹Quelques toutes petites différences seront données en remarque.

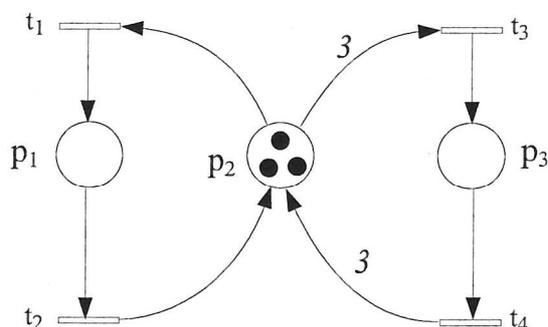


FIG. 1 – Exemple de réseau de Petri

- T est l'ensemble $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$,
- F est l'ensemble des couples (arcs orientés) reliant soit des places à des transitions (éléments de F appartenant à $(P \times T)$), soit des transitions à des places (éléments de F appartenant à $(T \times P)$):

$$F = \{(p_1, t_2), (p_2, t_1), (p_2, t_3), (p_3, t_4)\} \cup \{(t_1, p_1), (t_2, p_2), (t_3, p_3), (t_4, p_2)\}$$
- W est l'application définie par :

$W(p_1, t_2) = 1$	$W(p_2, t_1) = 1$	$W(p_2, t_3) = 3$	$W(p_3, t_4) = 1$
$W(t_1, p_1) = 1$	$W(t_2, p_2) = 1$	$W(t_3, p_3) = 1$	$W(t_4, p_2) = 3$

Définition 2 (Nœuds d'entrée et de sortie) Nous avons les quatre définitions (notations) suivantes :

- L'ensemble $\bullet p$ des transitions d'entrée d'une place $p \in P$ de \mathcal{R} est l'ensemble des transitions t telles que $(t, p) \in F : \bullet p = \{t, (t, p) \in F\}$
- L'ensemble p^\bullet des transitions de sortie d'une place $p \in P$ de \mathcal{R} est l'ensemble des transitions t telles que $(p, t) \in F : p^\bullet = \{t, (p, t) \in F\}$
- L'ensemble $\bullet t$ des places d'entrée d'une transition $t \in T$ de \mathcal{R} est l'ensemble des places p telles que $(p, t) \in F : \bullet t = \{p, (p, t) \in F\}$
- L'ensemble t^\bullet des places de sortie d'une transition $t \in T$ de \mathcal{R} est l'ensemble des places p telles que $(t, p) \in F : t^\bullet = \{p, (t, p) \in F\}$

Nous voyons donc que $\bullet p$ et p^\bullet sont des sous-ensembles de T et que $\bullet t$ et t^\bullet sont des sous-ensembles de P .

Dans le réseau de Petri de la figure 1 nous avons, par exemple :

$$\bullet p_1 = \{t_1\} \quad p_2^\bullet = \{t_1, t_3\} \quad \bullet t_4 = \{p_3\} \quad t_4^\bullet = \{p_2\}$$

Définition 3 (Transition source) Une transition t d'un réseau de Petri est une transition source si et seulement si $\bullet t$ est l'ensemble vide.

Une transition source n'a pas de place d'entrée. Le réseau de Petri présenté dans le cas 3 (réseau *parenthèse*) possède une transition source.

Définition 4 (Transition puits) Une transition t d'un réseau de Petri est une transition puits si et seulement si t^\bullet est l'ensemble vide.

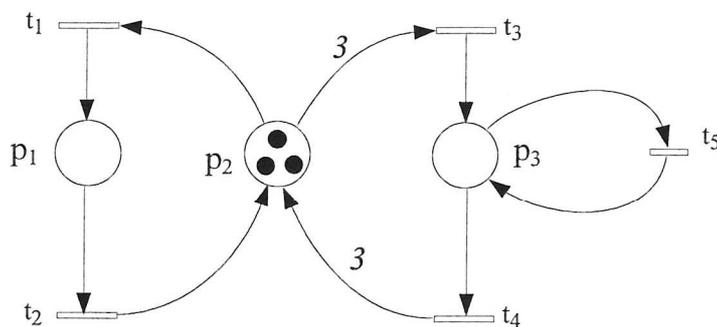


FIG. 2 – Réseau de Petri avec boucle élémentaire

Une transition puits n'a pas de place en sortie. Le réseau de Petri présenté dans le cas 3 (réseau *parenthèse*) possède une transition puits.

Définition 5 (Boucle élémentaire) Une boucle élémentaire est définie par la présence d'une place p et d'une transition t telles que $p \in \bullet t$ et $p \in t \bullet$

Comme cela veut dire que les paires (p, t) et (t, p) sont toutes les deux des éléments de F , alors nécessairement nous avons : $t \in p \bullet$ et $t \in \bullet p$

Le réseau de Petri de la figure 2 comprend une boucle élémentaire entre la place p_3 et la transition t_5 .

Remarquons que comme les arcs relient des nœuds de types différents, la notion traditionnelle de boucle élémentaire dans un graphe (un arc ayant le même sommet comme origine et comme destination) n'a pas de sens.

2.2 Comportement dynamique d'un réseau de Petri

Le comportement dynamique d'un réseau de Petri c'est-à-dire son évolution au cours du temps et de l'occurrence des événements (on dit sa sémantique opérationnelle) est spécifié par les définitions suivantes.

Définition 6 (Marquage) Un marquage M d'un réseau de Petri de structure \mathcal{R} (voir définition 1) est une application : $M : P \longrightarrow \mathcal{N}$

Un marquage définit une distribution (répartition) de jetons dans les places. On utilise \mathcal{N} et non \mathcal{N}^+ pour définir cette distribution. Le nombre 0 correspond à l'absence de jeton, c'est-à-dire à une place vide.

Définition 7 (Réseau marqué) Un réseau de Petri marqué \mathcal{R}_M est un couple $\mathcal{R}_M = \langle \mathcal{R}, M_0 \rangle$ où \mathcal{R} est la structure d'un réseau de Petri et M_0 est le marquage initial.

Si nous revenons à l'exemple de la figure 1 et si nous prenons comme marquage initial la distribution des jetons illustrée par la figure, nous avons :

$M_0(p_1) = 0$	$M_0(p_2) = 3$	$M_0(p_3) = 0$
----------------	----------------	----------------

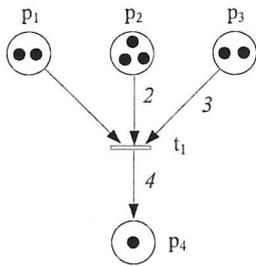


FIG. 3 – t_1 non sensibilisée

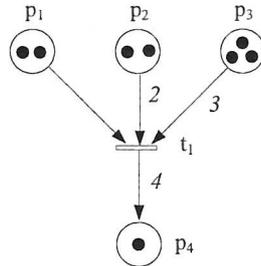


FIG. 4 – t_1 sensibilisée

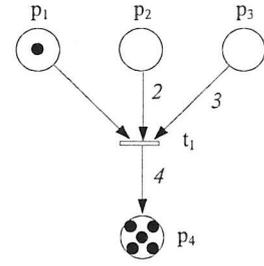


FIG. 5 – t_1 franchie

Définition 8 (Transition sensibilisée) Une transition t d'un réseau de Petri de structure \mathcal{R} est sensibilisée pour un marquage M si et seulement si : $\forall p \in \bullet t \ M(p) \geq W(p, t)$

Cela veut dire que, pour M , les contenus en jetons des places d'entrée d'une transition t doivent être au moins égaux aux poids des arcs liant ces places à t pour que t soit sensibilisée.

Par exemple si nous considérons le réseau de Petri de la figure 1 pour le marquage initial, nous avons la situation suivante :

Transition	Place d'entrées	Marquage	Poids de l'arc	Sensibilisation
t_1	$\{p_2\}$	$M(p_2) = 3$	$W(p_2, t_1) = 1$	oui
t_2	$\{p_1\}$	$M(p_1) = 0$	$W(p_1, t_2) = 1$	non
t_3	$\{p_2\}$	$M(p_2) = 3$	$W(p_2, t_3) = 3$	oui
t_4	$\{p_3\}$	$M(p_3) = 0$	$W(p_3, t_4) = 1$	non

La place p_2 contient 3 jetons. L'arc (p_2, t_1) est de poids 1 donc t_1 est sensibilisée. Comme l'arc (p_2, t_3) est de poids 3, t_3 est également sensibilisée. Par contre comme les places p_1 et p_3 sont vides, les transitions t_2 et t_4 ne sont pas sensibilisées.

Considérons maintenant le réseau de Petri de la figure 3. La transition t_1 n'est pas sensibilisée. En effet, elle a 3 places d'entrée : p_1 (avec un poids égal à 1, valeur par défaut), p_2 (avec un poids égal à 2) et p_3 (avec un poids égal à 3). Les places p_1 et p_2 contiennent assez de jetons, mais il manque un jeton dans p_3 . Par contre, si nous considérons le marquage de la figure 4, la transition t_1 est sensibilisée. Il y a globalement le même nombre de jetons que précédemment, mais ils sont répartis de façon plus adéquate.

Remarque sur les transitions sources : Une transition source est toujours sensibilisée. Comme elle n'a aucune place en entrée, le sous-ensemble $\bullet t$ est l'ensemble vide et la condition de la définition 8 est vérifiée pour tout marquage.

Notations : Si t est sensibilisée par M on le note par :

$$M \xrightarrow{t} \quad \text{ou bien} \quad M(t >) \quad (1)$$

Définition 9 (Franchissement (tir) de transition) Une transition t d'un réseau de Petri de structure \mathcal{R} sensibilisée pour un marquage M peut être franchie (tirée) à partir de ce marquage. Le réseau de Petri passe alors du marquage M au marquage M' tel que :

- $\forall p \in \bullet t$ et $p \notin t^\bullet$ alors $M'(p) = M(p) - W(p, t)$
- $\forall p \in t^\bullet$ et $p \notin \bullet t$ alors $M'(p) = M(p) + W(t, p)$
- $\forall p \in t^\bullet$ et $p \in \bullet t$ alors $M'(p) = M(p) - W(p, t) + W(t, p)$

Informellement, on enlève un nombre de jetons dans les places d'entrée de la transition égal aux poids des arcs reliant ces places à la transition, et on ajoute aux places de sortie un nombre de jetons égal aux poids des arcs reliant la transition à ces places.

Les places qui ne sont ni place d'entrée, ni place de sortie de la transition franchie *ne sont pas concernées* par le franchissement. Leur marquage reste donc inchangé.

Comme on ne peut franchir que des transitions sensibilisées, le marquage des places reste toujours un entier positif ou nul quand le réseau de Petri passe d'un marquage à un autre.

Si nous prenons le cas de la transition t_3 du réseau de Petri de la figure 1, comme elle est sensibilisée par le marquage initial M_0 , on peut la franchir à partir de ce marquage. On va enlever 3 jetons à la place p_2 (place d'entrée de t_3) et ajouter un jeton à la place p_3 (place de sortie). Le marquage M_1 atteint est donc défini par :

$$M_1(p_1) = 0 \quad M_1(p_2) = 0 \quad M_1(p_3) = 1$$

Si nous revenons à l'exemple de la figure 4, le franchissement de la transition t_1 à partir du marquage représenté sur cette figure donne le marquage de la figure 5.

Notations : Si t est franchie à partir du marquage M et produit le marquage M' on le note par :

$$M \xrightarrow{t} M' \quad \text{ou bien} \quad M(t > M') \quad (2)$$

2.3 Signification en termes de système à événements discrets

Soit \mathcal{S} un système à événements discrets représenté par un réseau de Petri marqué. Le marquage initial M_0 de ce réseau représente l'état initial de \mathcal{S} . Le marquage courant M représente l'état courant. Si une transition t est sensibilisée pour M , cela veut dire que \mathcal{S} est réceptif² à l'événement associé aux franchissements de t lorsqu'il est dans l'état correspondant à M . Le franchissement de t correspond au changement d'état de \mathcal{S} provoqué par l'occurrence de l'événement associé à t .

3 Définition sous la forme d'un système d'addition de vecteurs

3.1 Introduction

Il est habituel de définir un graphe sous la forme d'une matrice appelée matrice d'incidence. On peut faire la même chose pour un réseau de Petri. Mais comme c'est un graphe avec deux types de nœuds, et que les arcs lient toujours des nœuds de types différents, deux matrices vont être utilisées, l'une décrivant les arcs liant les places aux transitions (arcs entrant dans les transitions), l'autre décrivant les arcs liant les transitions aux places (arcs sortant des transitions).

Un réseau de Petri a un comportement dynamique : les jetons changent de place lors des événements. Avec la notation présentée ici, les marquages sont des vecteurs d'entiers positifs ou nuls et le comportement dynamique est décrit par un système de soustraction et d'addition de ces vecteurs.

²voir ce qu'est la réceptivité au chapitre précédent

3.2 Structure du réseau de Petri

Définition 10 (Structure) Un réseau de Petri est un quadruplet $\mathcal{R} = \langle P, T, Pre, Post \rangle$ où :

- P est un ensemble fini de places,
- T est un ensemble fini de transitions,
- $Pre : P \times T \longrightarrow \mathcal{N}$ est l'application places précédentes,
- $Post : P \times T \longrightarrow \mathcal{N}$ est l'application places suivantes.

Si la dimension de P est n_p (le réseau de Petri possède n_p place) et si la dimension de T est n_t (n_t transitions), alors Pre et $Post$ sont des matrices de dimension $n_p \times n_t$ d'entiers positifs ou nuls.

Vis-à-vis de la vision graphique, il est clair que l'on retrouve la même information³, simplement la présence de l'arc et le poids sont donnés ensemble. Nous avons l'interprétation suivante :

- Si $Pre(p, t) = 0$ cela veut dire qu'il n'y a pas d'arc reliant la place p à la transition t .
- Si $Pre(p, t) = k$ (avec $k \neq 0$) cela veut dire qu'il y a un arc reliant la place p à la transition t et que cet arc est de poids k .
- Si $Post(p, t) = 0$ cela veut dire qu'il n'y a pas d'arc reliant la transition t à la place p .
- Si $Post(p, t) = k$ (avec $k \neq 0$) cela veut dire qu'il y a un arc reliant la transition t à la place p et que cet arc est de poids k .

Définition 11 (Matrice d'incidence) La matrice $C = Post - Pre$ est appelée la matrice d'incidence du réseau de Petri.

La matrice d'incidence seule ne permet de définir complètement la structure d'un réseau de Petri que lorsqu'il est sans boucle élémentaire (voir la définition 5). En effet, dans ce cas, l'ensemble des éléments négatifs de C donnent les éléments non nuls de la matrice Pre et l'ensemble des éléments positifs ceux de la matrice $Post$. Quand il y a une boucle élémentaire, il y a un élément non nul ayant la même position dans Pre et $Post$ et ces éléments se combinent dans C .

Par exemple, dans le cas du réseau de Petri de la figure 2, nous avons $Pre(p_3, t_5) = 1$, $Post(p_3, t_5) = 1$ et $C(p_3, t_5) = 0$, comme si la transition t_5 n'était pas reliée à la place p_3 .

Remarque (Histoire) Les matrices Pre et $Post$ sont parfois appelées matrice d'incidence avant et matrice d'incidence arrière. On dit que Pre définit la pré-condition, c'est-à-dire les contraintes pour que les transitions soient franchissables. On dit que la matrice $Post$ définit la post-condition, c'est-à-dire ce qui se passe après le franchissement. En fait la vraie raison de ce vocabulaire un peu étrange c'est simplement que, dans sa thèse, Carl Adam Petri supposait que les places avaient une capacité maximale en jeton. Pour pouvoir franchir une transition, il fallait donc suffisamment de jetons dans les places d'entrée et pas trop de jetons dans les places de sortie. En effet, tout comme le franchissement d'une transition t ne peut pas rendre le marquage d'une place d'entrée de t négatif, il ne pouvait pas faire que le marquage d'une place de sortie de t dépasse sa capacité. Le marquage des places de sortie conditionnait donc les franchissements et définissaient bien une "post" condition. Cette approche a très vite été abandonnée car jugée inutilement complexe (elle n'augmente pas le pouvoir descriptif). Le nom réseau de Petri a été donné (par Anatol W.

³Il faut toutefois remarquer qu'il est possible d'avoir un graphe avec un seul nœud, par exemple une seule transition (et aucune place), alors que les dimensions des matrices devant être d'au moins 1, il est ici nécessaire d'avoir au moins une place et au moins une transition.

Holt) au modèle sans capacité (ou plus exactement à capacité infinie) et les réseaux tels qu'ils avaient été définis par Carl Adam Petri ont été nommés *Réseaux à capacité*.

Si l'on considère toujours comme exemple le réseau de Petri de la figure 1, nous avons :

$$\begin{aligned}
 P &= \{p_1, p_2, p_3\} \quad \text{avec } n_p = 3 \\
 T &= \{t_1, t_2, t_3, t_4\} \quad \text{avec } n_t = 4 \\
 Pre &= \begin{array}{cccc|c}
 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\
 \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & & & &
 \end{array} \\
 Post &= \begin{array}{cccc|c}
 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\
 \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & & & &
 \end{array} \tag{3}
 \end{aligned}$$

On a alors la matrice d'incidence suivante : $C = \begin{array}{cccc|c} & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & \\ \begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} & & & & \end{array}$

3.3 Comportement dynamique du réseau de Petri

Le marquage est en fait défini de la même façon que lors de la définition précédente sous forme graphique. On considère simplement qu'il s'agit d'un vecteur d'entiers positifs ou nuls et de dimension n_p .

Définition 12 (Marquage) *Un marquage M d'un réseau de Petri de structure \mathcal{R} est une application :*

$$M : P \longrightarrow \mathcal{N}$$

écrite sous la forme d'un vecteur de dimension n_p , le nombre de places.

La définition 7 est inchangée.

Notons $Pre(\cdot, t)$ (respectivement $Post(\cdot, t)$ et $C(\cdot, t)$) la colonne de la matrice Pre (respectivement des matrices $Post$ et C) associée à la transition t . Ces colonnes sont des vecteurs de dimension n_p , le nombre de places. Ce sont des vecteurs de même dimension que le vecteur marquage.

Définition 13 (Transition sensibilisée) *Une transition t d'un réseau de Petri de structure \mathcal{R} est sensibilisée pour un marquage M si et seulement si : $M \geq Pre(\cdot, t)$*

La comparaison (\geq) se fait dans le sens de la comparaison entre des vecteurs. Cela veut dire qu'elle se fait composante par composante, c'est-à-dire place par place. Elle est donc équivalente à : $\forall p \in P \ M(p) \geq Pre(p, t)$. Il est clair que c'est la même définition que la définition 8, avec d'autres notations. En effet, la condition est toujours remplie pour les places qui ne sont pas des

places d'entrée de t (qui n'appartiennent pas à $\bullet t$) puisque les composantes de M ne peuvent être négatives et que les composantes correspondant à ces places du vecteur $Pre(\cdot, t)$ seront nulles.

Par exemple dans le réseau de Petri de la figure 1, et pour le marquage initial M_0 :

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

les transitions t_1 et t_3 sont sensibilisées car

$$Pre(\cdot, t_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Pre(\cdot, t_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

et donc :

$$M_0 > Pre(\cdot, t_1) \text{ et } M_0 = Pre(\cdot, t_3) \quad (5)$$

Par contre, la transition t_2 n'est pas sensibilisée car le vecteur

$$Pre(\cdot, t_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

n'est pas comparable⁴ avec le vecteur M_0 .

Définition 14 (Franchissement (tir) de transition) Une transition t d'un réseau de Petri de structure \mathcal{R} sensibilisée pour un marquage M peut être franchie (tirée) à partir de ce marquage. Le réseau de Petri passe alors du marquage M au marquage M' tel que :
 $M' = M - Pre(\cdot, t) + Post(\cdot, t)$

Vu la définition de la matrice C nous avons donc : $M' = M + C(\cdot, t)$

De façon évidente, M' sera un vecteur d'entiers positifs ou nuls puisque l'on ne peut franchir que des transitions sensibilisées pour lesquelles $M \geq Pre(\cdot, t)$.

Si nous prenons le cas de la transition t_1 du réseau de Petri de la figure 1, comme elle est sensibilisée par le marquage initial M_0 , on peut la franchir à partir de ce marquage et l'on obtient le marquage M_2 suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Si l'on choisit de franchir t_3 qui est également sensibilisée à partir de M_0 on obtient le marquage M_1 (comme dans la section précédente) :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

⁴Il n'est ni $>$, ni $<$, ni $=$, la relation d'ordre entre les vecteurs étant une relation d'ordre partielle.

3.4 Discussion

Il est relativement clair que les définitions données sous la forme d'un système d'addition de vecteurs⁵ sont plus simples à exprimer et à manipuler que les définitions qui restent plus proches de la notion de graphe. La plus grande partie de la théorie des réseaux de Petri s'exprime d'ailleurs bien sous cette forme. Si la définition graphique est préservée, c'est qu'elle est la seule à mettre en évidence le *principe de localité* qui précise que la sensibilisation d'une transition et son franchissement n'impliquent que les places d'entrée et de sortie de cette transition et sont donc totalement *indépendants* du reste du réseau de Petri (structure et marquage courant). Ce principe trouve toute son importance, par exemple dans le cas d'une mise en œuvre *distribuée* d'un système décrit par un réseau de Petri. Les franchissements de deux transitions n'ayant aucune place commune (en entrée et en sortie) peuvent se faire en *totale indépendance* sur deux processeurs différents. Ces franchissements pourront se faire *en parallèle, sans référence à une horloge commune* et donc de façon *asynchrone*. C'est pour cela que les réseaux de Petri sont souvent qualifiés de *formalisme asynchrone*.

Quand on travaille de façon vectorielle, on manipule à chaque pas le vecteur marquage qui est une information globale et il est donc mathématiquement difficile de franchir deux transitions indépendamment les unes des autres. Nous reviendrons plus tard, lorsque nous parlerons des séquences de franchissements, sur ces considérations.

4 Définition sous la forme d'un système de règles de ré-écriture

4.1 Introduction

Pour certaines applications comme la supervision de systèmes complexes les réseaux de Petri doivent cohabiter avec des systèmes de règles de production, c'est-à-dire des systèmes fondés sur des techniques d'intelligence artificielle. Or les réseaux de Petri peuvent être définis sous la forme de règles de ré-écriture qui sont un cas particulier de systèmes de règles. Voyons donc cette troisième façon de définir les réseaux de Petri et tout d'abord rappelons ce qu'est un système de règles de ré-écriture.

Un langage (en informatique) est un ensemble de mots qui sont des séquences de symboles choisis dans un alphabet. Dans le cas des réseaux de Petri, l'alphabet va être l'ensemble des places P ⁶. Les mots du langage qui nous intéressent peuvent être considérés comme des éléments d'un monoïde commutatif. Cela veut dire que l'ordre des symboles dans le mot n'est pas significatif.

Définition 15 (Monoïde sur les places) Soit P l'ensemble des places d'un réseau de Petri. On note P^\otimes le monoïde commutatif sur P , c'est-à-dire l'ensemble des suites finies d'éléments de P , l'ordre n'étant pas significatif. Notons " \otimes " la loi de composition et "1" l'élément neutre.

Un monoïde est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et d'un élément neutre. Ici on suppose en plus que la loi est commutative.

Si l'on considère le réseau de Petri de la figure 1, l'ensemble des places est $P : \{p_1, p_2, p_3\}$. Des mots comme $p_2 \otimes p_2 \otimes p_2$ ou $p_1 \otimes p_2 \otimes p_2$ sont des éléments du monoïde P^\otimes . Comme nous

⁵Ce vocabulaire vient directement de la formule : $M' = M + C(\cdot, t)$

⁶Nous verrons plus tard (séquences de franchissements de transitions) le cas de mots construits sur l'alphabet T

considérons qu'il est commutatif, les deux mots $p_1 \otimes p_2 \otimes p_2$ et $p_2 \otimes p_2 \otimes p_1$ sont identiques. Comme il s'agit d'un monoïde (associativité), nous avons, par exemple :

$$(p_1 \otimes p_2 \otimes p_2) \otimes (p_2 \otimes p_3) = p_1 \otimes p_2 \otimes p_2 \otimes p_2 \otimes p_3$$

Le monoïde P^\otimes étant commutatif, ce qui est significatif⁷ c'est uniquement le nombre d'occurrences de chaque élément de P dans un mot donné, pas leur ordre.

Définition 16 (Degré vis-à-vis d'une place) Soit $p \in P$ une place et soit $m \in P^\otimes$ un mot du monoïde sur les places, le degré (ou multiplicité) de p dans m noté $\#_m(p)$ est le nombre de fois que le symbole p apparaît dans m .

Par exemple, si $m_1 = p_1 \otimes p_2 \otimes p_2$, nous aurons : $\#_{m_1}(p_1) = 1$, $\#_{m_1}(p_2) = 2$ et $\#_{m_1}(p_3) = 0$.

4.2 Structure du réseau de Petri

Définition 17 (Représentation des pré et post conditions) Soit t une transition d'un réseau de Petri et $Pre(\cdot, t)$ le vecteur décrivant la pré-condition de cette transition ($Post(\cdot, t)$ celui décrivant la post-condition respectivement), le mot pre_t de P^\otimes tel que $\forall p, \#_{pre_t}(p) = Pre(p, t)$ (respectivement $post_t$ tel que $\forall p, \#_{post_t}(p) = Post(p, t)$) est le mot décrivant la pré-condition de t (respectivement sa post-condition).

Il ne faut pas oublier que les mots sont commutatifs c'est-à-dire que l'ordre des lettres n'a pas d'importance. Définir le nombre d'occurrences de chaque lettre est donc suffisant pour définir le mot. Les mots pre_t et $post_t$ sont donc équivalents aux colonnes $Pre(\cdot, t)$ et $Post(\cdot, t)$ des matrices Pre et $Post$.

Définition 18 (Description d'une transition) Une transition est une règle de ré-écriture de mots de P^\otimes de la forme $pre_t \multimap post_t$ où pre_t et $post_t$ sont les mots définis par la définition 17

Définition 19 (Structure) Un réseau de Petri est un triplet $\mathcal{R} = \langle P, T, \otimes \rangle$ où :

- P est un ensemble fini de places,
- \otimes est un opérateur définissant un monoïde commutatif P^\otimes sur P
- T est un ensemble fini de règles de ré-écriture de la forme :
 $t : pre_t \multimap post_t$
 où pre_t et $post_t$ sont des mots de P^\otimes

Revenons à l'exemple du réseau de Petri de la figure 1. Il sera alors défini par :

- $P = \{p_1, p_2, p_3\}$,
- \otimes loi de composition interne associative et commutative,
- T est l'ensemble des règles de ré-écritures

$$\left| \begin{array}{l} t_1 : p_2 \multimap p_1 \\ t_2 : p_1 \multimap p_2 \\ t_3 : (p_2 \otimes p_2 \otimes p_2) \multimap p_3 \\ t_4 : p_3 \multimap (p_2 \otimes p_2 \otimes p_2) \end{array} \right.$$

⁷On peut considérer que les mots sont en fait des multi-ensembles.

Souvent les matrices Pre et $Post$ sont des matrices très creuses (c'est-à-dire contenant un grand nombre de termes nuls - d'éléments égaux à 0). L'avantage de cette nouvelle définition est qu'ils n'apparaissent plus. La notation sous la forme de règles de ré-écriture est donc souvent très compacte et ainsi très pratique.

On peut également remarquer, que du point de vue de la "localité" elle se rapproche de la définition graphique. En effet, la définition d'une transition ne fait référence qu'aux lettres associées aux places d'entrée et de sortie de cette transition, sans aucune référence au reste du réseau de Petri. La notation est donc particulièrement pratique lorsque l'on ne définit qu'un fragment d'un gros réseau de Petri (approche incrémentale).

4.3 Comportement dynamique du réseau de Petri

Le marquage est défini sous la forme d'un mot du monoïde P^\otimes . Le degré (définition 16) de chaque place donne le contenu en jetons de la place. Si nous revenons à l'exemple de la figure 1, le marquage initial est le mot : $m_0 = p_2 \otimes p_2 \otimes p_2$

La notion de réseau de Petri marqué est la même que celle de la définition 7.

Définition 20 (Transition sensibilisée) Une transition $t : pre_t \multimap post_t$ d'un réseau de Petri de structure \mathcal{R} est sensibilisée pour un marquage m si et seulement si le mot m peut s'écrire sous la forme : $m = c \otimes pre_t$

L'expression "peut s'écrire" doit se comprendre "en effectuant des commutations de lettres dans le mot" c'est-à-dire en utilisant la commutativité de P^\otimes . Le mot " c " est le contexte dans lequel la transition est sensibilisée.

Si nous revenons à l'exemple de la figure 1, pour le marquage initial $m_0 = p_2 \otimes p_2 \otimes p_2$, les transitions $t_1 : p_2 \multimap p_1$ et $t_3 : (p_2 \otimes p_2 \otimes p_2) \multimap p_3$ sont sensibilisées. Dans le premier cas, le contexte est $c = p_2 \otimes p_2$, dans le second cas le contexte se réduit à l'élément neutre de l'opérateur " \otimes " c'est-à-dire que $c = 1$. Si nous considérons le marquage $m_2 = p_1 \otimes p_2 \otimes p_2$, pour mettre en évidence que la transition $t_2 : p_1 \multimap p_2$ est sensibilisée, il faut le mettre sous la forme équivalente $m_2 = p_2 \otimes p_2 \otimes p_1$. Le contexte est alors $c = p_2 \otimes p_2$.

Définition 21 (Franchissement (tir) de transition) Une transition $t : pre_t \multimap post_t$ d'un réseau de Petri de structure \mathcal{R} sensibilisée pour un marquage $m = c \otimes pre_t$ peut être franchie (tirée) à partir de ce marquage. Le réseau de Petri passe alors du marquage $m = c \otimes pre_t$ au marquage $m' = c \otimes post_t$

On voit donc qu'un réseau de Petri est bien un système permettant de ré-écrire des mots du monoïde P^\otimes . Quand la transition t est franchie, le mot $c \otimes pre_t$ est ré-écrit sous la forme du mot $c \otimes post_t$. Les mots sont les différents marquages, c'est-à-dire les différents états par lesquels passe le système à événements discrets décrit par le réseau de Petri.

5 Plus de définitions sur la dynamique d'un réseau de Petri

Nous allons maintenant continuer à définir des concepts associés à la sémantique opérationnelle (la dynamique, le comportement) d'un réseau de Petri en nous appuyant principalement, mais pas

uniquement, sur sa définition sous la forme d'un système d'addition de vecteurs.

5.1 Conflit et parallélisme.

Définition 22 (Transitions en conflit structurel) Soit un réseau de Petri de structure \mathcal{R} deux transitions t_i et t_j sont en conflit structurel si et seulement si $\exists p \in P$ telle que $p \in \bullet t_i$ et $p \in \bullet t_j$.

Cela veut dire que t_i et t_j sont en conflit structurel si et seulement si elles ont au moins une place d'entrée p en commun. Dans le réseau de Petri de la figure 1 les transitions t_1 et t_3 sont en conflit structurel car elles ont toutes les deux la place p_2 en entrée.

Définition 23 (Transitions en conflit effectif) Soit un réseau de Petri de structure \mathcal{R} deux transitions t_i et t_j sont en conflit effectif pour un marquage M si et seulement si $M \geq Pre(\cdot, t_i)$, $M \geq Pre(\cdot, t_j)$ et $M \not\geq Pre(\cdot, t_i) + Pre(\cdot, t_j)$.

Cela veut dire qu'il y a assez de jetons pour que l'une des deux transitions t_i ou t_j (exclusivement) soit franchie mais pas les deux à la fois. Dans le réseau de Petri de la figure 1 les transitions t_1 et t_3 sont en conflit effectif pour le marquage initial M_0 :

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Pre(\cdot, t_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Pre(\cdot, t_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Pre(\cdot, t_1) + Pre(\cdot, t_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il y a assez de jetons dans la place p_2 pour le franchissement de t_1 ou bien pour le franchissement de t_3 mais pas pour les deux à la fois. Pour le marquage :

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

les transitions t_1 et t_3 ne sont pas en conflit effectif.

Une condition nécessaire pour que t_i et t_j soient en conflit effectif est qu'elles soient en conflit structurel. En effet sinon les conditions sur le marquage pour que t_i et t_j soient sensibilisées sont indépendantes (principe de localité découlant de la définition 8).

Définition 24 (Transitions parallèles) Soit un réseau de Petri de structure \mathcal{R} deux transitions t_i et t_j sont parallèles si et seulement si $\bullet t_i \cap \bullet t_j = \phi$ où ϕ est l'ensemble vide.

Cela veut dire que t_i et t_j n'ont aucune place d'entrée en commun. Elles ne sont donc pas en conflit structurel. En conclusion, lorsque l'on considère deux transitions, soit elles sont en conflit structurel, soit elles sont parallèles.

Dans le réseau de Petri de la figure 1 les transitions t_1 et t_2 sont parallèles. En effet, ce qui compte c'est que ces deux transitions n'ont pas de place d'entrée commune. Le fait que la place p_1 est place de sortie de t_1 et place d'entrée de t_2 , n'est pas un obstacle. La condition pour que t_1 soit franchissable est qu'il y ait au moins un jeton dans la place p_2 et celle pour t_2 est qu'il y ait au moins un jeton dans la place p_1 . Ces deux conditions sont donc bien indépendantes. Si l'on

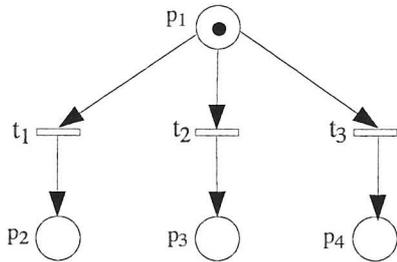


FIG. 6 – Situation de conflit 1

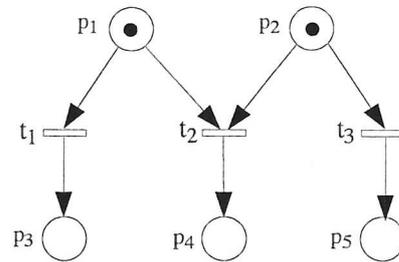


FIG. 7 – Situation de conflit 2

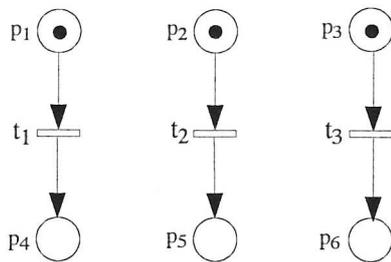


FIG. 8 – Transitions parallèles 1

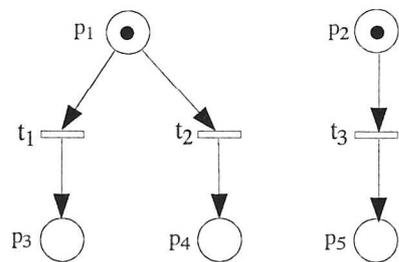


FIG. 9 – Transitions parallèles 2

considère le marquage ⁸ $M_2 = p_1 \otimes p_2 \otimes p_2$ (un jeton dans la place p_1 , deux dans p_2 et aucun dans p_3), les deux transitions sont sensibilisées et peuvent être franchies indépendamment l'une de l'autre.

Les notions de transitions en conflit structurel et de transitions parallèles paraissent simples mais elles sont en réalité complexes car elles définissent des relations non transitives. Nous allons juste mettre en évidence cette complexité par quatre exemples.

Dans le réseau de Petri de la figure 6, les transitions t_1 et t_2 sont en conflit structurel, et en conflit effectif pour le marquage indiqué sur la figure. Il en est de même pour le couple de transitions t_2 et t_3 . Dans ce cas il y a transitivité car les transitions t_1 et t_3 sont également en conflit structurel et effectif pour le marquage indiqué.

Si nous considérons maintenant le réseau de Petri de la figure 7, les transitions t_1 et t_2 sont également en conflit structurel, et en conflit effectif pour le marquage indiqué sur la figure. Il en est de même des transitions t_2 et t_3 . Par contre, dans ce cas les transitions t_1 et t_3 sont parallèles. On est donc dans la situation paradoxale où les franchissements de t_1 et t_3 sont indépendants l'un de l'autre alors que les transitions sont toutes les deux en conflit avec t_2 . Le choix est donc entre le franchissement de t_2 ou bien le franchissement de façon indépendante de t_1 et t_3 .

Dans le fragment de réseau de Petri de la figure 8, les transitions t_1 et t_2 sont parallèles. Il en est de même des transitions t_2 et t_3 . Et il en est également de même des transitions t_1 et t_3 . Donc ces trois transitions peuvent être franchies indépendamment les unes des autres.

⁸Pour ne pas alourdir les notations, nous ne différencions plus les vecteurs des monoïdes correspondants s'il n'y a pas de risque de confusion

Par contre dans le fragment de réseau de Petri de la figure 9, si les transitions t_1 et t_3 d'une part, et t_3 et t_2 d'autre part sont parallèles, par contre les transitions t_1 et t_2 sont en conflit structurel et effectif pour le marquage indiqué. La situation correspond en fait au franchissement indépendamment de t_3 d'une part et, d'autre part, à celui de t_1 ou exclusivement de t_2 , après un choix.

Quand il y a un mélange entre des situations de conflit et de transitions parallèles, on dit qu'il y a une situation de *confusion*.

5.2 Sémantique d'entrelacement

5.2.1 Séquence de franchissements de transitions

Dans cette section nous considérer plusieurs franchissements de transitions, en séquence. Les transitions sont donc toujours franchies les unes après les autres et les franchissements sont ainsi complètement ordonnés dans le temps. On appelle ce mode de description de la dynamique d'un réseau de Petri *sémantique d'entrelacement*.

Définition 25 (Monoïde des transitions) Soit T l'ensemble des transitions d'un réseau de Petri. On note T^i le monoïde sur T formé de l'ensemble des suites finies d'éléments de T reliés par l'opérateur de composition “;”. Soit “ λ ” l'élément neutre de cette loi de composition.

Contrairement au cas du monoïde P^\otimes , le monoïde T^i n'est pas commutatif. Les mots de T^i sont interprétés comme étant des séquences de franchissements de transitions.

Si nous considérons le réseau de Petri de la figure 1, des mots tels que “ $t_3 ; t_4$ ” ou “ $t_1 ; t_1 ; t_2$ ” sont des éléments de T^i .

Notation : Si la transition t est sensibilisée pour le marquage M et si le franchissement de t à partir de M produit le marquage M' ($M' = M + C(\cdot, t)$), on note :

$$M \xrightarrow{t} M' \quad (9)$$

Cette notation ⁹ est étendue aux mots s de T^i .

Définition 26 (Séquence de franchissements) Soit un réseau de Petri de structure \mathcal{R} , soit T l'ensemble de ses transitions, soit s un mot de T^i et t une transition de T . Le mot “ $s ; t$ ” est une séquence de franchissements de transitions \mathcal{R} à partir du marquage M_1 ($M_1 \xrightarrow{s;t} M_2$) si et seulement si :

- s est une séquence de franchissements de transitions à partir de M_1 avec $M_1 \xrightarrow{s} M_3$
- t est sensibilisée pour le marquage M_3 et son franchissement produit le marquage M_2 :

$$M_3 \xrightarrow{t} M_2$$

En s'appuyant sur la définition du franchissement d'une transition t (9 ou 14 ou 21) on a une définition récursive du franchissement d'une séquence puisque t peut être considéré comme un mot de T^i .

⁹Dans les articles les plus anciens (le traitement de texte ne permettait pas d'écrire au dessus d'une flèche), on peut trouver la notation $M (t > M')$

Le point important est que pour qu'une séquence de transition soit franchissable à partir d'un marquage M , il ne suffit pas que la première transition soit sensibilisée par M , il faut que chaque fois le marquage produit soit tel que la transition suivante est sensibilisée.

En considérant toujours le réseau de Petri de la figure 1 et le marquage initial M_0 , on a, par exemple pour le mot " $s = t_1 ; t_1 ; t_2$ " représentant la séquence des franchissements consistant à franchir la transition t_1 deux fois puis la transition t_2 une fois :

$$(M_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}) \xrightarrow{t_1} (M_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}) \xrightarrow{t_1} (M_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) \xrightarrow{t_2} (M_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}) \quad (10)$$

Comme :

$$Pre(\cdot, t_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Pre(\cdot, t_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Nous avons bien $M_0 \geq Pre(\cdot, t_1)$, $M_2 \geq Pre(\cdot, t_1)$ et $M_3 \geq Pre(\cdot, t_2)$. La séquence s est bien une séquence de franchissements.

Le calcul du marquage produit par une séquence de franchissements peut se faire pas à pas. En considérant encore le réseau de Petri de la figure 1, les colonnes de la matrice d'incidence C correspondant aux transitions t_1 et t_2 sont :

$$C(\cdot, t_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C(\cdot, t_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

et nous avons :

$$\begin{aligned} M_2 &= M_0 + C(\cdot, t_1) \\ M_3 &= M_2 + C(\cdot, t_1) = M_0 + 2.C(\cdot, t_1) \\ M_2 &= M_3 + C(\cdot, t_2) = M_0 + 2.C(\cdot, t_1) + C(\cdot, t_2) \end{aligned} \quad (13)$$

Nous allons maintenant voir un moyen d'obtenir directement le marquage final d'une séquence de franchissements sans calculer les marquages intermédiaires (il faut toutefois être sûr que la séquence est franchissable). Pour cela, il suffit de remarquer (voir la dernière expression du calcul 13 par exemple) que l'ordre des franchissements n'a pas d'influence sur le résultat final du calcul du marquage atteint.

Définition 27 (Vecteur caractéristique) Soit un réseau de Petri de structure \mathcal{R} , soit s un mot de T^* . Le vecteur caractéristique \bar{s} de s est un vecteur dont les n_i (nombre de transitions) composantes sont les degrés¹⁰ de s vis-à-vis des transitions : $\bar{s}(t) = \#_s(t)$

Le vecteur caractéristique \bar{s} donne donc les nombres d'occurrences de chaque transitions t dans le mot s . Si ce mot correspond à une séquence effectivement franchissable, le vecteur caractéristique donne le nombre de fois que chaque transition est franchie dans s , indépendamment de l'ordre des franchissements.

¹⁰voir la définition 16

Pour la séquence s ci-dessus ce vecteur est :

$$s = t_1; t_1; t_2 \quad \bar{s} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \end{matrix} \quad (14)$$

Comme le vecteur caractéristique ne dépend pas de l'ordre des franchissements, il peut correspondre à plusieurs séquences. Ainsi les séquences

$$\begin{aligned} s &= t_1; t_1; t_2 \\ s' &= t_1; t_2; t_1 \\ s'' &= t_2; t_1; t_1 \end{aligned} \quad (15)$$

ont toutes les trois le même vecteur caractéristique. Remarquons qu'alors que les mots s et s' correspondent bien à des séquences franchissables à partir du marquage initial M_0 , le mot s'' ne correspond pas à une séquence de franchissements de transitions à partir de M_0 car la transition t_2 n'est pas sensibilisée pour M_0 .

Définition 28 (Equation fondamentale) Soit un réseau de Petri de structure \mathcal{R} , soit s un mot de T^* et \bar{s} son vecteur caractéristique. L'équation :

$$M' = M - Pre.\bar{s} + Post.\bar{s} \quad (16)$$

est appelée équation fondamentale. Si s est une séquence de franchissements de transitions à partir de M , alors M' est le marquage obtenu près le franchissement de s .

L'équation fondamentale peut également s'écrire :

$$M' = M + C.\bar{s} \quad (17)$$

et elle correspond à :

$$M \xrightarrow{s} M' \quad (18)$$

L'équation fondamentale permet de calculer le marquage final en une seule étape, sans passer par le calcul de tous les marquages intermédiaires. En effet, multiplier à droite les matrices Pre , $Post$ ou C par le vecteur \bar{s} revient à faire la somme des colonnes de ces matrices pondérées par les composantes de \bar{s} .

Revenons à l'exemple du réseau de Petri de la figure 1 et de la séquence s (voir l'équation 10). L'équation fondamentale prend la forme suivante :

$$C \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{s} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$C.\bar{s}$

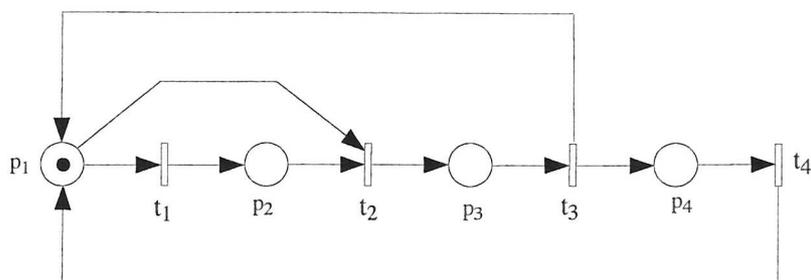


FIG. 10 – Réseau de Petri avec séquence non franchissable

Ce qui nous donne bien :

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Comme l'équation fondamentale est fondée sur le vecteur caractéristique, elle ne prend pas en compte l'ordre des franchissements. Attention, ce n'est pas parce qu'à partir de deux marquages M et M' on trouve un vecteur s tel que l'équation fondamentale est vérifiée, qu'il existe effectivement une séquence de franchissements de transitions partant de M , arrivant à M' et de vecteur caractéristique \bar{s} .

Considérons par exemple le réseau de Petri de la figure 10 et la séquence :

$$s = t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4 \quad (21)$$

Nous avons :

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \bar{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C \cdot \bar{s} = 0 \quad (22)$$

L'équation fondamentale (sous la forme de l'équation 17) est vérifiée pour tout marquage si l'on choisit $M' = M$.

Prenons le cas du marquage M_1 représenté sur la figure :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

La transition t_1 (première transition de la séquence s) est sensibilisée. Cela ne suffit pas à rendre toute la séquence s franchissable à partir de M_1 . En effet, le marquage M_2 atteint après le franchissement de t_1 ne sensibilise pas t_2 , la seconde transition de s .

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Pre(\cdot, t_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Le fait que $M_2 = M_2 + C.\bar{s}$ ne change rien.

Par contre si l'équation caractéristique $M = M' + C.\bar{s}$ est vérifiée pour un couple de marquages M et M' on pourra toujours trouver un nouveau couple de marquage M_1 et M'_1 avec $M_1 \geq M$, $M'_1 \geq M'$ et $M_1 - M = M'_1 - M'$ tel que la séquence s soit effectivement franchissable à partir de M_1 en produisant M'_1 . En effet on peut ajouter les mêmes jetons à M et M' (ce qui préserve le fait que l'équation 16 est vérifiée) et cela jusqu'à ce que toutes les transitions de s soient effectivement franchissables.

C'est ainsi que dans le cas du réseau de Petri de la figure 10, la séquence 21 est franchissable à partir du marquage M_3 .

$$M_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

5.2.2 Ensemble des marquages accessibles

À partir du marquage initial on peut ainsi franchir des séquences de longueur aussi grande que l'on veut. Un ensemble de marquages est ainsi défini : l'ensemble des marquages accessibles à partir du marquage initial.

Définition 29 (Ensemble des marquages accessibles) Soit un réseau de Petri marqué $\langle \mathcal{R}, M_0 \rangle$. L'ensemble des marquages accessibles $\mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$ de ce réseau de Petri à partir de M_0 est l'ensemble : $\{M \text{ tel que } \exists s \ M_0 \xrightarrow{s} M\}$

Attention, l'écriture $M_0 \xrightarrow{s} M$ implique que la séquence s est effectivement franchissable à partir de M_0 .

Lorsque cet ensemble est de dimension finie, on peut en énumérer les éléments.

Si nous revenons au réseau de Petri de la figure 1 redonné figure 11 pour le marquage initial M_0 représenté sur la figure, nous obtenons l'ensemble des marquages accessibles suivants :

Marquage	$M_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$M_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$M_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$	$M_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$M_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
Séquence	λ	t_3	t_1	$t_1; t_1$	$t_1; t_1; t_1$

A partir de ces cinq marquages, le franchissement de n'importe quelle transition sensibilisée redonne l'un de ces marquages accessibles. Donc l'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$ est fini dans ce cas.

Dans le cas où $\mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$ est fini, on peut le représenter sous la forme d'un graphe.

Définition 30 (Graphe des marquages accessibles) Soit un réseau de Petri marqué $\mathcal{R}_M = \langle \mathcal{R}, M_0 \rangle$ dont l'ensemble des marquages accessibles $\mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$ est fini. Le graphe des marquages accessibles $\mathcal{GA}(\mathcal{R}; M_0)$ de ce réseau de Petri à partir de M_0 est le graphe dont les

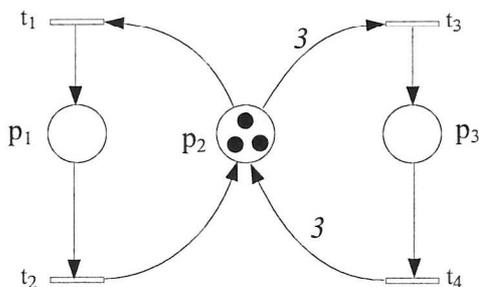


FIG. 11 – Réseau de Petri marqué

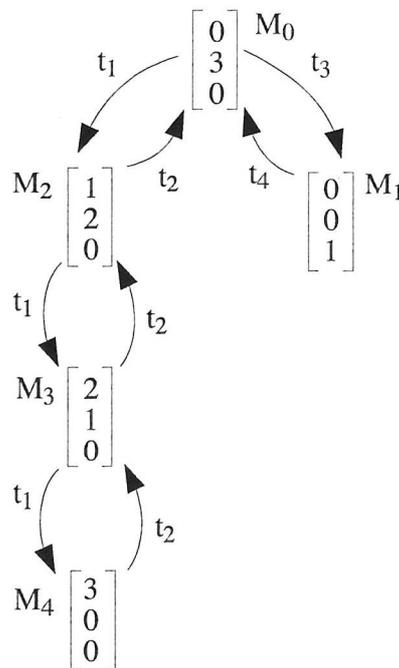


FIG. 12 – Graphe de marquage associé

sommets sont les éléments de $\mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$. Un arc relie deux marquages M_i et M_j si et seulement si il existe une transition $t \in T$ telle que $M_i \xrightarrow{t} M_j$

Le graphe des marquages accessibles du réseau de Petri marqué de la figure 11 est donné par la figure 12.

5.3 Retour sur les conflits et le parallélisme

Il est clair que le graphe des marquages accessibles n'est autre qu'un automate fini dont les états sont les marquages accessibles et les événements sont les transitions. On peut se demander pourquoi tant d'effort pour représenter un système à événements discret sous la forme d'un réseau de Petri si c'est pour finir par retrouver un automate fini équivalent à ce réseau de Petri.

Il y a une première raison, c'est que cette construction n'est possible que si l'ensemble des marquages accessibles est fini. Mais la raison principale est que s'il y a bien équivalence vis-à-vis de l'ensemble des états et des changements d'états possibles, ce n'est pas le cas pour les notions de transitions en conflit et de transitions parallèles. Ces informations sont indispensables pour savoir si l'on peut répartir le système modélisé sur plusieurs calculateurs ou non. En effet, seules des transitions parallèles peuvent être exécutées sur des calculateurs différents de façon simple puisque leurs conditions pour être sensibilisées sont indépendantes. Ces informations sont présentes dans le réseau de Petri mais absentes du graphe des marquages accessibles. C'est pourquoi il peut être très intéressant de travailler avec les deux représentations.

Si nous revenons à notre exemple, les deux franchissements en conflit de t_1 et de t_3 à partir de

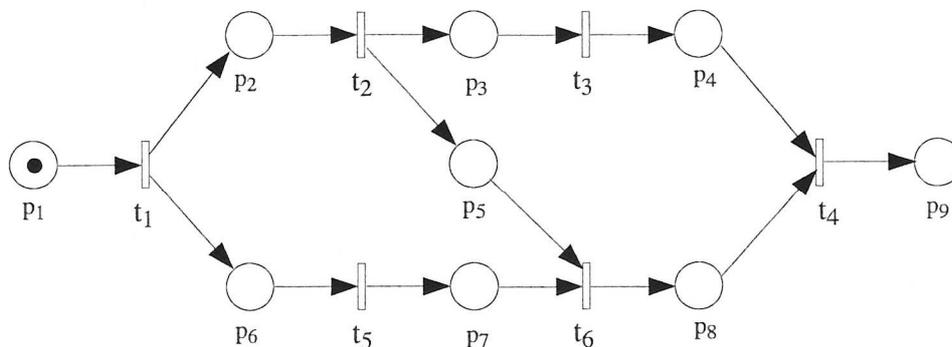


FIG. 13 – Réseau de Petri avec parallélisme

M_0 apparaissent de la même façon que ceux de t_1 et t_2 à partir de M_2 . Pourtant ces derniers sont indépendants puisque les transitions correspondantes sont parallèles.

5.4 Sémantique du parallélisme vrai

L'approche que nous venons de voir permet d'énumérer tous les marquages accessibles (lorsque le nombre de ceux-ci n'est pas infini) et de construire un automate fini équivalent au réseau de Petri du point de vue des états et des séquences de franchissements possibles (les mots de T^*). Cela est systématique et permet l'étude de nombreuses propriétés du système représenté par le réseau de Petri. Toutefois, comme nous venons de le remarquer, elle ne permet pas de conserver les informations sur les possibilités d'évolutions simultanées (parallélisme).

L'approche que nous allons juste esquisser ici le permet, mais au prix d'un abandon de l'exploration systématique des marquages accessibles. Elle consiste à représenter le comportement du système entre deux états, donnés a priori, pour un ensemble d'événements lui aussi donné.

Nous venons de voir que la notion de séquence et la représentation de la dynamique sous la forme du graphe des marquages accessibles ne permettait pas la mise en évidence des événements pouvant se produire indépendamment les uns des autres et des événements exclusifs (conflit) rendant nécessaire un arbitrage entre deux comportements possibles. Nous allons introduire ici une autre vision du comportement d'un réseau de Petri. Tout d'abord nous allons mettre en évidence un problème sur un exemple.

5.4.1 Notion de pas

Dans cette section nous utiliserons la notation s'appuyant sur le monoïde des places P^\otimes (définition 15) pour les marquages et les transitions (définition 18).

Considérons le réseau de Petri de la figure 13 pour le marquage initial indiqué, c'est-à-dire $M_0 = p_1$. La transition $t_1 : p_1 \rightarrow (p_2 \otimes p_6)$ est sensibilisée et son franchissement produit le marquage $M_1 = p_2 \otimes p_6$. Pour ce marquage, les transitions $t_2 : p_2 \rightarrow (p_3 \otimes p_5)$ et $t_5 : p_6 \rightarrow p_7$ sont sensibilisées. Ces transitions sont *parallèles* (définition 24) et peuvent donc être franchies indépendamment l'une de l'autre. De plus l'équation fondamentale (définition 28) ne faisant intervenir que le vecteur caractéristique (définition 27) le marquage final atteint ne dépend pas de

l'ordre de franchissement de ces transitions. Cela veut dire que l'on a deux séquences $s_1 = t_1 ; t_2 ; t_5$ et $s_2 = t_1 ; t_5 ; t_2$ qui sont toutes les deux franchissables à partir de M_0 et qui toutes les deux mènent au marquage $M_2 = p_3 \otimes p_5 \otimes p_7$.

Pour rendre explicite le fait que dans le monoïde sur T , non commutatif, deux noms de transitions peuvent commuter (elles sont parallèles), un nouvel opérateur est introduit : “||”. Ainsi les deux séquences s_1 et s_2 peuvent être regroupées dans une seule expression $\sigma_{12} = t_1 ; (t_2 || t_5)$. L'expression σ_{12} est équivalente au sous ensemble de T formé des deux mots s_1 et s_2 . Mais elle est en fait plus que cela. Elle indique que les transitions t_2 et t_5 sont parallèles et que leurs franchissements sont indépendants et donc non ordonnés. Elle permet de sortir de la *sémantique d'entrelacement* (le comportement du réseau de Petri n'est vu que comme un ensemble de séquences de franchissements de transitions *complètement ordonnés* à une *sémantique du parallélisme vrai* qui spécifie clairement quand des franchissements de transitions peuvent avoir lieu *en parallèle*.

L'expression $\sigma_{12} = t_1 ; (t_2 || t_5)$ décrit le comportement du réseau de Petri en disant que l'on peut, à partir du marquage initial, franchir deux pas, le premier est formé par la seule transition t_1 . Le second est formé par le couple $(t_2 || t_5)$. On passe *en un seul pas* du marquage $M_1 = p_2 \otimes p_6$ au marquage $M_2 = p_3 \otimes p_5 \otimes p_7$. Les marquages intermédiaires $p_2 \otimes p_7$ (t_5 franchie mais pas t_2) et $p_3 \otimes p_5 \otimes p_6$ (t_2 franchie mais pas t_5) *ne sont pas explorés*.

On peut étendre l'opérateur “||” au cas où il existe un ensemble de n transitions qui sont toutes parallèles deux à deux (associativité) car en effet toutes les commutations sont possibles. Par exemple, dans le cas de la figure 8, on peut écrire $(t_1 || t_2 || t_3)$. Par contre dans le cas de la figure 9, il faudra écrire soit $(t_1 || t_3)$ soit $(t_2 || t_3)$.

Définition 31 (Pas) Soit un réseau de Petri \mathcal{R} et soit M un marquage de ce réseau. Soit π un sous ensemble de T . On dit que l'on a un pas π possible si et seulement si :

- $\forall t \in \pi, t$ est sensibilisée pour M ,
- $\forall t_i \in \pi$ et $\forall t_j \in \pi$ alors t_i et t_j sont parallèles

Toute séquence construite en ordonnant les éléments de π est franchissable à partir de M . Le marquage final est toujours le même. Soit M' ce marquage. *Franchir un pas*, c'est passer de M à M' en appliquant l'équation fondamentale (définition 28) sans calculer les marquages intermédiaires.

Nous voyons que grâce à la notion de pas, il est possible, à condition de ne pas se préoccuper des marquages intermédiaires, de décrire entre deux transitions la dynamique d'un réseau de Petri en mettant en évidence les franchissements de transitions indépendants. Dans le cas général on obtient des expressions algébriques utilisant librement les deux opérateurs :

- mise en séquence : “;”
- mise en parallèle : “||”

Ces deux opérateurs sont-ils suffisants pour décrire tous les comportements ? La réponse est non et le réseau de la figure 13 entre les marquages $M_0 = p_1$ et $M_f = p_9$ est un contre-exemple. On peut en effet donner trois expressions avec les opérateurs *série* et *parallèle* :

$$\sigma_1 = t_1 ; (t_2 || t_5) ; (t_3 || t_6) ; t_4 \quad \text{et} \quad p_1 \xrightarrow{\sigma_1} p_9 \quad (26)$$

$$\sigma_2 = t_1 ; ((t_2 ; t_3) || t_5) ; t_6 ; t_4 \quad \text{et} \quad p_1 \xrightarrow{\sigma_2} p_9 \quad (27)$$

$$\sigma_3 = t_1 ; t_2 ; (t_3 || (t_5 ; t_6)) ; t_4 \quad \text{et} \quad p_1 \xrightarrow{\sigma_3} p_9 \quad (28)$$

Chacune génère bien un ensemble de séquences de franchissements entre M_0 et M_f , mais aucune ne les génère toutes.

Par exemple la première (26) génère :

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= t_1 ; t_2 ; t_5 ; t_3 ; t_6 ; t_4 \\
 s_{12} &= t_1 ; t_5 ; t_2 ; t_3 ; t_6 ; t_4 \\
 s_{13} &= t_1 ; t_5 ; t_2 ; t_6 ; t_3 ; t_4 \\
 s_{14} &= t_1 ; t_2 ; t_5 ; t_6 ; t_3 ; t_4
 \end{aligned} \tag{29}$$

Mais elle ne génère pas :

$$s_{21} = t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_5 ; t_6 ; t_4 \tag{30}$$

qui est par contre générée par la seconde (27). La seconde ne génère pas les séquences où t_6 est franchie avant t_3 etc.

5.4.2 Ordre partiel

La représentation du comportement d'un réseau de Petri à travers des *pas* ne représente donc pas tout le parallélisme possible. Par exemple le comportement σ_1 (équation 26) donne l'impression que les transitions t_5 et t_3 doivent nécessairement être exécutées en séquence puisqu'elles appartiennent à deux pas successifs. De façon contradictoire, le comportement σ_2 (équation 27) exprime bien qu'elles sont parallèles, mais il met en séquence t_6 et t_3 . Par rapport à la sémantique d'entrelacement, on peut remarquer que c'est précisément lorsque l'information est correcte sur le parallélisme (au sein d'un pas) que les marquages ne sont pas explicités. Ils ne sont en effet calculés explicitement qu'entre les pas.

L'explicitation du parallélisme entre les franchissements des transitions est effectivement contradictoire avec l'explicitation des marquages accessibles. C'est pourquoi la représentation fidèle de la sémantique du parallélisme vrai (expliciter exactement les contraintes d'ordre que doivent respecter les franchissements) implique que les marquages accessibles soient complètement implicites.

Cela se fait en utilisant un graphe dont les sommets sont les franchissements des transitions et les arcs les relations de "précédence" (le franchissement de t_i doit impérativement précéder celui de t_j car il produit au moins un jeton nécessaire pour sensibiliser t_j) imposées par le réseau de Petri. Nous verrons que les marquages accessibles sont en fait les coupes de ce graphe. Ce graphe exprime une relation d'ordre partiel strict entre les franchissements. Plus précisément, la relation d'ordre partiel strict est la fermeture transitive des relations de précédence représentées par ce graphe

Définition 32 (Ordre partiel strict) *Un ordre partiel strict sur un ensemble E est une relation binaire (nous la noterons \prec) qui est anti-réflexive, anti-symétrique et transitive :*

- anti-réflexive : $\forall e \in E, \neg(e \prec e)$
- anti-symétrique : $\forall e_i \in E$ et $\forall e_j \in E$ et $e_i \neq e_j$ si $e_i \prec e_j$ alors $\neg(e_j \prec e_i)$
- transitive : $\forall (e_i, e_j, e_k) \in E$ si $e_i \prec e_j$ et si $e_j \prec e_k$ alors $e_i \prec e_k$

Pour que l'ensemble des franchissements des transitions correspondant à un certain comportement d'un réseau de Petri puissent être ordonnées sous la forme d'un ordre partiel strict, il faut que tous les conflits soient résolus. En effet, si deux transitions sont en conflit, les comportements

possibles du réseau de Petri, soit ne feront apparaître que l'une de ces transitions, soit les feront apparaître avec des ordres contradictoires.

On va définir un scénario correspondant au comportement d'un réseau de Petri entre deux marquages : M_{ini} est le marquage de départ et M_{fin} le marquage d'arrivée.

Pour s'appuyer sur un ordre partiel, il faut avoir un ensemble d'événements E clairement défini. Pour n'avoir que des événements les marquages de départ et d'arrivée sont transformés en événements initiaux et finaux ¹¹.

Définition 33 (Ensemble d'événements d'un scénario) *L'ensemble des événements E est formé par le nom des transitions franchies pour passer de M_{ini} à M_{fin} . Si une transition est franchie plusieurs fois, son nom doit apparaître plusieurs fois. On différencie ces différents noms en mettant en exposant un numéro d'occurrence du franchissement. On ajoute à cet ensemble un événement e_i (production du jeton) pour chaque jeton de M_{ini} et un événement e_j (consommation du jeton) pour chaque jeton de M_{fin} .*

Nous avons besoin de la notion de linéarisation pour faire le lien avec la notion de séquence de franchissement.

Définition 34 (Linéarisation d'un ordre partiel) *Soit un ordre partiel strict \prec construit sur un ensemble d'événements E . Une linéarisation de cet ordre est une suite ordonnée s comprenant tous les éléments de E et telle que quel que soient les événements e_i et e_j de E , si $e_i \prec e_j$, alors dans s , e_i précède e_j .*

Nous pouvons maintenant définir le scénario.

Définition 35 (Scénario) *Soit un réseau de Petri marqué $\langle \mathcal{R}, M_0 \rangle$ et deux marquages M_{ini} et M_{fin} de l'ensemble des marquages accessibles $\mathcal{A}(\mathcal{R}; M_0)$. Soit un ensemble d'événements E suivant la définition 33 muni d'une relation d'ordre partiel \prec . Le couple $\langle E, \prec \rangle$ est un scénario si et seulement si toute linéarisation s de E est telle que sa restriction \hat{s} aux franchissements de transitions est une séquence de franchissements $M_{ini} \xrightarrow{\hat{s}} M_{fin}$.*

La différence entre s et \hat{s} est simplement la suppression des événements associés aux marquages M_{ini} et M_{fin} .

Reprenons l'exemple de la figure 13. Prenons $M_{ini} = p_1$ et $M_{fin} = p_9$. Il s'agit d'un cas simple car il n'y a pas de conflit et chaque transition est franchie exactement une fois. Le franchissement de la transition t_i est noté et_i . L'événement produisant le marquage de départ est ei_1 et celui consommant le marquage d'arrivée est ef_1 ¹².

On obtient alors une représentation simple de l'ordre partiel à partir du graphe des relations de précédence de la figure 14. Il a, dans cet exemple élémentaire, la même structure que le réseau de Petri. Chaque arc de ce graphe (chaque relation de précédence) est implicitement associée à un jeton qui est produit par l'événement qui est le sommet de départ de l'arc et est consommé par l'événement qui est le sommet d'arrivée de l'arc. La production du jeton *doit précéder* sa consommation. Par exemple l'arc (et_2, et_6) représente implicitement le jeton produit dans la place p_5 par le franchissement de t_2 et consommé par celui de t_6 .

¹¹Ce n'est pas indispensable

¹²Ces marquages ne comprennent qu'un seul jeton. Il y a donc un seul événement

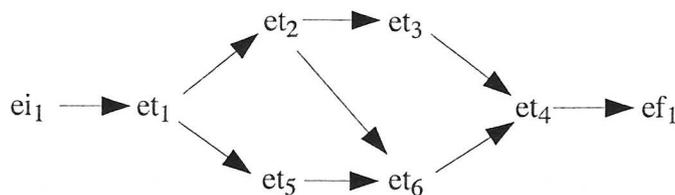


FIG. 14 – Ordre partiel du réseau de la figure 13

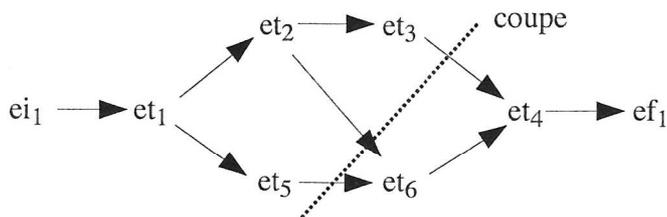


FIG. 15 – Ordre partiel avec coupe

C'est pourquoi les marquages accessibles sont des coupes du graphe de précédence. Par exemple, la coupe représentée figure 15, représente le marquage obtenu après le franchissement des transitions t_1, t_2, t_3 et t_5 . C'est donc le marquage $p_4 \otimes p_5 \otimes p_7$.

Les séquences de franchissements sont exactement les linéarisations (après avoir enlevé ei_1 et ef_1) de l'ordre partiel généré par le graphe de la figure 14. On retrouve les séquences données en 29, mais aussi celle donnée en 30. Si deux transitions t_i et t_j ne sont pas ordonnées par l'ordre partiel (on a ni $t_i \prec t_j$ ni $t_j \prec t_i$) alors elles sont parallèles.

Par exemple $et_1 \prec et_3$ ¹³ car il existe un chemin orienté qui va de l'une à l'autre. Par contre et_3 et et_6 sont parallèles car aucun chemin orienté ne les lie.

Toutes les contraintes imposées par le réseau de Petri et les marquages et seulement ces contraintes sont exprimées. La justification de cette affirmation se trouve dans le chapitre abordant la vision logique des réseaux de Petri (voir aussi [RI 03]), mais également dans les travaux sur les dépliages (*unfoldings* en anglais) des réseaux de Petri et la notion de *processus* ([BE 87]) de réseau de Petri.

Revenons maintenant à l'exemple de la figure 1. Nous avons déjà mis en évidence qu'il y avait, pour le marquage initial, un conflit effectif entre les transitions t_1 et t_3 . En conséquence, plusieurs scénarios de base peuvent être envisagés avec le marquage M_0 comme marquage de départ et comme marquage d'arrivée pour avoir des comportements cycliques.

Le premier concerne le franchissement de t_3 et t_4

$$p_2 \otimes p_2 \otimes p_2 \xrightarrow{t_3; t_4} p_2 \otimes p_2 \otimes p_2 \quad (31)$$

Les deux transitions doivent être franchies en séquence car le jeton mis dans la place p_3 par le franchissement de t_3 est nécessaire pour que t_4 soit sensibilisée et puisse être franchie. Le marquage de départ et d'arrivée comprenant 3 jetons, il y a 3 événements initiaux et finaux.

¹³Par fermeture transitive, $et_1 \prec et_2$ et $et_2 \prec et_3$ implique $et_1 \prec et_3$

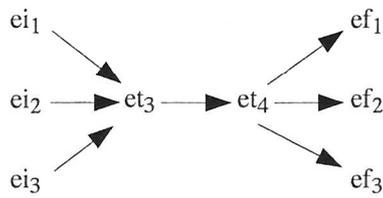


FIG. 16 – Ordre partiel 1 du réseau de la figure 1

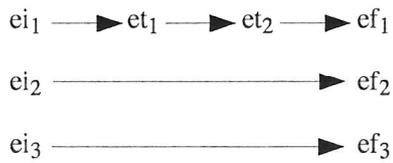


FIG. 17 – Ordre partiel 2 du réseau de la figure 1



FIG. 18 – Ordre partiel 2 réduit

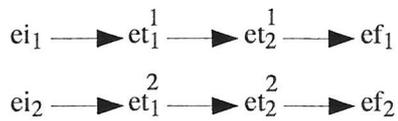


FIG. 19 – Ordre partiel 3 du réseau de la figure 1

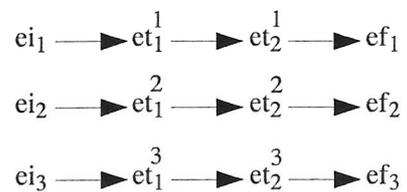


FIG. 20 – Ordre partiel 4 du réseau de la figure 1

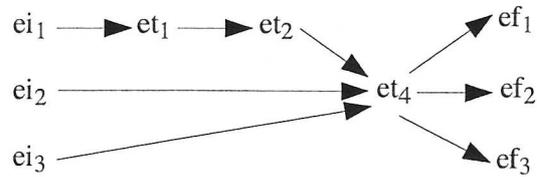


FIG. 21 – Ordre partiel composé

Le deuxième comportement cyclique possible correspond au franchissement de t_1 au lieu de t_3 . Il peut prendre trois formes, différentes du point de vue des ordres partiels associés : les transitions t_1 et t_2 sont franchies en séquence, mais comme il y a trois jetons dans la place p_2 et que seul un jeton est nécessaire au franchissement de t_1 , on peut franchir ce scénario une fois ou bien deux ou trois fois en parallèle. Si on choisit de ne le franchir qu'une fois, on obtient le graphe de précédence de la figure 17.

On peut remarquer que deux des trois événements initiaux (production du marquage $p_2 \otimes p_2 \otimes p_2$) sont inutiles. Ils peuvent être omis ce qui donne le graphe de la figure 18.

Les autres scénarios, représentés sur les figures 19 et 20 peuvent être vus comme des compositions parallèles du scénario de la figure 18. Nous voyons que pour les ordres des figures 19 et 20, les mêmes transitions sont franchies plusieurs fois et il faut différencier les événements associés à leurs franchissements en mettant des exposants.

On peut aussi composer des scénarios de façon séquentielle en décidant d'enchaîner le scénario franchissant t_1 une fois avec le scénario franchissant t_3 . On obtient alors le graphe de précédence de la figure 21.

Le calcul formel de ces ordres partiels sera vu plus tard dans le chapitre étudiant les relations entre les réseaux de Petri et la logique. Les ordres partiels peuvent également être mis en évidence par des techniques de dépliages (*unfoldings* en anglais). L'ordre partiel s'exprime alors sous la forme de processus de réseaux de Petri.

6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons donné les définitions de base d'un réseau de Petri. Bien que simples, ces définitions se compliquent lorsque l'on va au bout des choses.

En ce qui concerne la structure et la sémantique opérationnelle (le comportement) d'un réseau de Petri, nous avons montré que trois points de vue (au moins) pouvaient être retenus : le point de vue graphique, le point de vue "système d'additions de vecteurs" et le point de vue "règles de ré-écriture".

Quand on approfondit la sémantique opérationnelle en allant au delà du simple franchissement d'une unique transition, deux mondes apparaissent. Le premier, le plus connu et le plus directement lié à la vision "système d'additions de vecteurs" est celui de l'énumération des marquages accessibles dans le cadre d'une sémantique d'entrelacement. Cet ensemble est le plus souvent fini et l'on peut ainsi vérifier de nombreuses propriétés comme nous allons le voir dans les deux chapitres suivants. Mais dans ce cadre la vision des comportements se fait sous la forme de séquences

et elle est finalement relativement pauvre. Le deuxième monde est celui du parallélisme vrai pour mieux appréhender les comportements. Mais, alors que l'ensemble des marquages accessibles est le plus souvent fini, celui des comportements est irrémédiablement infini. Dans la plupart des cas on peut prolonger les séquences de franchissement indéfiniment.

Ce que nous avons essayé de mettre en évidence c'est que les deux options existent et que malheureusement elles sont largement contradictoires. Si on est exhaustif du point de vue des marquages, alors on est pauvre du point de vue du parallélisme. Inversement si l'on veut être riche du point de vue du parallélisme, alors il faut se placer dans le cadre d'un scénario particulier et il n'y a plus aucune étude exhaustive du système.

Références

- [BE 87] E. Best and R. Devillers. Sequential and concurrent behaviour in Petri nets theory. *Theoretical Computer Science*, 50 :87-136, 1987.
- [RI 03] N. Rivière. Thèse de Doctorat de l'INSA de Toulouse, Modélisation et analyse temporelle par réseaux de Petri et logique linéaire, soutenue le 26 novembre 2003 au LAAS, Toulouse

Exemple des lecteurs et des écrivains

Spécifications

Robert Valette

LAAS-CNRS Toulouse,

version de juin 2007

Pré-requis / Contenu : Cet exemple est utilisé dans le chapitre 2 donnant les définitions formelles d'un réseau de Petri et de sa sémantique opérationnelle (son comportement). Dans cette partie, il y a la spécification de cet exemple.

Table des matières

1 L'exemple	36
2 Modélisation	36
2.1 Modélisation des comportements des diverses entités	36
2.2 Construction du réseau de Petri global	38
3 Variantes du modèle des lecteurs et des écrivains	39
3.1 Cas d'un nombre de tâches inconnu	39
3.2 Modèle paramétré	39

1 L'exemple

Les réseaux de Petri sont particulièrement bien adaptés pour la gestion de ressources discrètes. En général tous les poids associés aux arcs sont égaux à 1. Les poids interviennent en particulier lorsque il y a des dissymétries pour les ressources.

Le problème des lecteurs et des écrivains est un exemple type classique de telles dissymétries. Si l'on considère un système complexe qui doit être commandé par ordinateur, on va classiquement avoir deux grandes zones de données. La première contient les valeurs de toutes les variables d'état à l'instant t_n . La seconde contient les valeurs des variables d'état à l'instant précédent t_{n-1} . Cette dernière zone est, en particulier, nécessaire pour calculer les dérivées des variables.

Deux types de tâches travaillent sur ces tableaux. Le premier type correspond aux tâches qui implémentent les lois de commande. Elles n'effectuent que des *lectures* sur ces deux tableaux. Elles calculent des valeurs qui sont envoyées en sortie sur les actionneurs. Le second type correspond aux tâches qui mettent les tableaux à jour. A chaque instant d'échantillonnage, les valeurs des capteurs doivent être lues, les valeurs du tableau t_n sont recopiées dans le tableau t_{n-1} et le tableau t_n est mis à jour. Les tâches *écrivains* effectuent donc à la fois des *lectures* et des *écritures* dans les tableaux.

Les tâches de type lecteur ne se gênent pas entre elles car elles ne rendent jamais les tableaux incohérents. Il peut donc y avoir autant de tâches *lecteurs* que l'on veut en train de travailler sur les données. Leur accès à la ressource associée aux deux tableaux n'est donc pas en exclusion mutuelle.

Inversement les tâches de type écrivain doivent travailler en exclusion mutuelle entre elles et également vis-à-vis des tâches de type lecteur car pendant qu'elles accèdent aux tableaux ces derniers passent par des états incohérents. Toute lecture d'un tableau dans un état incohérent doit être interdite.

Les règles d'accès sont donc les suivantes :

- les tâches "*lecteurs*" peuvent accéder simultanément à la ressource,
- les tâches "*écrivains*" doivent être en exclusion mutuelle,
- il doit également y avoir exclusion mutuelle entre les "*lecteurs*" et les "*écrivains*".

2 Modélisation

2.1 Modélisation des comportements des diverses entités

Afin d'avoir un système avec un nombre fini d'états, il nous faut d'abord supposer que le nombre de tâches de chaque type est fixé. Supposons qu'il y a 4 tâches de type lecteur et 2 tâches de type écrivain.

Chacune de ces tâches peut être vue comme un automate fini avec 3 états :

- suspendue : la tâche est en attente de son exécution,
- en attente : la tâche doit s'exécuter et elle attend d'avoir le droit d'accéder à la ressource, c'est-à-dire aux deux tableaux,

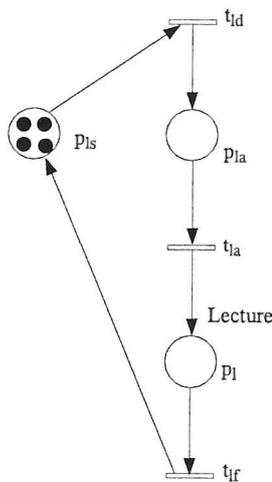


FIG. 1: Lecteurs

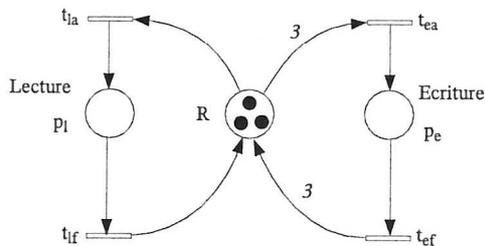


FIG. 2: Ressource

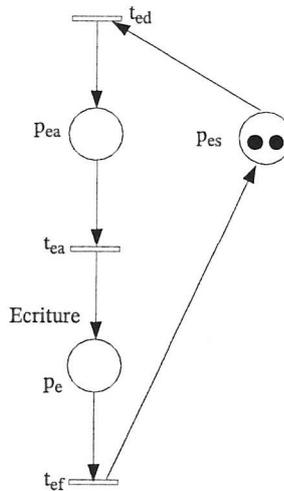


FIG. 3: Ecrivains

– en exécution : la tâche a eu le droit d'accéder à la ressource et elle s'exécute.

Lorsque l'on traduit cela en un réseau de Petri, on obtient pour les tâches *lecteurs* le graphe de la figure 1. L'état associé à la tâche suspendue est représenté par la place p_{ls} , celui associé à la tâche en attente par la place p_{la} et celui correspondant à la tâche en train de s'exécuter par la place p_l . L'événement *demande d'accès à la ressource* est associé au franchissement de la transition t_{ld} , celui associé à l'autorisation d'utiliser la ressource correspond au franchissement de la transition t_{la} et enfin lorsque la tâche a terminé, l'événement correspondant est associé au franchissement de la transition t_{lf} (fin). Comme il y a 4 tâches de ce type, on met 4 jetons initialement dans la place p_{ls} .

La représentation des tâches *écrivains* est analogue. Elle est donnée par le réseau de Petri de la figure 3. Les transitions et les places son indicées par e au lieu de l . Comme il y a 2 tâches de ce type, on met initialement 2 jetons dans la place p_{es} .

La dissymétrie et l'introduction des poids intervient pour la représentation de la ressource partagée, c'est-à-dire les deux tableaux. Pour conserver un nombre fini d'état, on va limiter le nombre maximal de tâches *lecteurs* pouvant travailler simultanément, par exemple à 3. L'état *disponible* de la ressource est représenté par la place R du réseau de Petri de la figure 2. Nous allons mettre initialement 3 jetons dans cette place. Ils correspondent à 3 *droits d'accès*.

Donner un droit d'accès à une tâche *lecteur* est représenté par le franchissement de la transition t_{la} du réseau de la figure 2. Ce franchissement ne consomme qu'un jeton dans la place R et donc il sera possible de donner 3 accès en lecture car t_{la} peut être franchie 3 fois à partir du marquage initial.

Donner un droit d'accès à une tâche *écrivain* est représenté par le franchissement de la transition t_{ea} du réseau de la figure 2. Ce franchissement consomme 3 jetons à cause du poids 3 associé à l'arc. On ne peut donc donner qu'un droit d'accès en écriture. Après ces deux transitions, on trouve les deux places p_l et p_e qui correspondent aux états *ressource occupée par un lecteur* et *ressource occupée par un écrivain*. Les fins d'utilisation de la ressource sont représentés par les

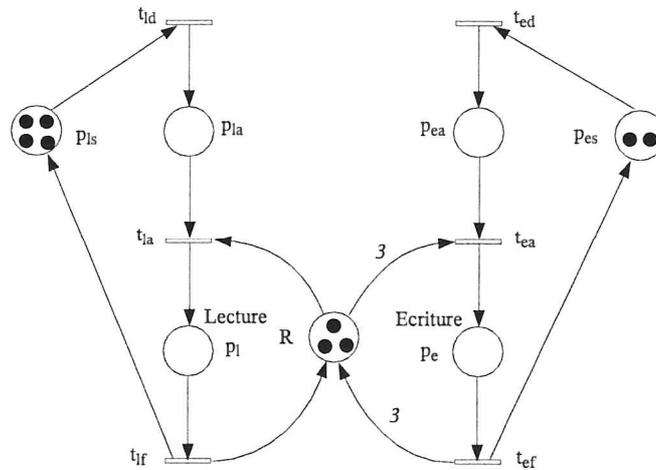


FIG. 4: Réseau de Petri complet

transitions t_{lf} et t_{ef} .

La vérification de ce réseau sera traitée dans la seconde partie de cet exemple.

2.2 Construction du réseau de Petri global

Maintenant il faut composer les réseaux de Petri des figures 1, 2 et 3 pour obtenir un seul réseau de Petri.

On remarque d'abord que les réseaux de Petri des figures 1 et 2 possèdent tous les deux une transition t_{la} . Ces transitions correspondent bien au même événement : l'autorisation d'accéder à la ressource pour une tâche *lecteur*. Ces transitions vont donc fusionner (communication synchrone, voir le chapitre 1). Il en est de même des transitions t_{lf} qui correspondent à l'événement *fin d'utilisation* de la ressource. Cela donne donc une seconde fusion de transition et une seconde communication synchrone.

Maintenant on se retrouve devant le fait qu'entre les transitions t_{la} et t_{lf} nous avons 2 places p_l . L'une représente l'état d'une tâche *lecteur* en train d'utiliser la ressource et l'autre l'état de la ressource utilisée par une tâche *lecteur*. C'est en fait, d'un point de vue global, la même information. Elle est simplement vue de deux entités (ou objets) différents. Pour simplifier nous allons donc également fusionner ces deux places.

La construction vis-à-vis du réseau de Petri décrivant les tâches *écrivains* est tout à fait analogue. Nous obtenons donc le réseau global de la figure 4.

Ce réseau de Petri donne l'exemple de l'utilité d'associer parfois des poids différents de 1 aux arcs.

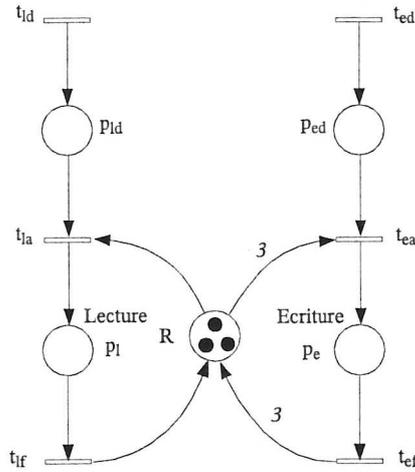


FIG. 5: Nombre de lecteurs et d'écrivains inconnus

3 Variantes du modèle des lecteurs et des écrivains

3.1 Cas d'un nombre de tâches inconnu

Si le nombre de tâches *lecteurs* et *écrivains* n'est pas connu, cela veut dire qu'à tout moment on peut s'attendre (c'est-à-dire que le réseau de Petri doit être réceptif à cet événement) à l'occurrence d'une demande d'accès en lecture ou en écriture. Cela veut dire qu'à tout moment, c'est-à-dire pour tout marquage accessible, il faut que les transitions t_{ld} et t_{ed} soient sensibilisées. La solution la plus simple pour obtenir ce résultat est d'effacer les places p_{ls} et p_{es} (et bien sûr les arcs associés). On obtient alors le réseau de Petri de la figure 5.

En effet, si une transition n'a pas de place d'entrée, elle est toujours sensibilisée et peut être franchie à tout instant. Cela se voit en examinant, par exemple la colonne de la matrice Pre qui lui est associée. Elle ne comprendra que des 0 et sera donc inférieure à n'importe quel vecteur d'entiers positifs ou nuls, c'est-à-dire à n'importe quel marquage.

Une autre façon de voir cela est de remarquer que plus une place contient de jetons, moins elle contraint le franchissement de ses transitions de sortie. Si le nombre de tâches *lecteurs* et *écrivains* est inconnu, c'est qu'il peut être arbitrairement grand. Donc initialement les places p_{ls} et p_{es} doivent contenir une infinité de jetons. Quel que soit le marquage accessible, ces places contiendront toujours une infinité de jetons puisque par définition, l'infini reste toujours égal à l'infini si on lui enlève ou si on lui ajoute un nombre fini. Donc les places ne servent à rien et on peut les effacer.

3.2 Modèle paramétré

Pour être plus général, on peut avoir envie d'avoir un modèle avec des paramètres pour représenter tous les cas possibles.

Le paramétrage du nombre des tâches est simple. S'il y a k_l lecteurs, on met k_l jetons dans la

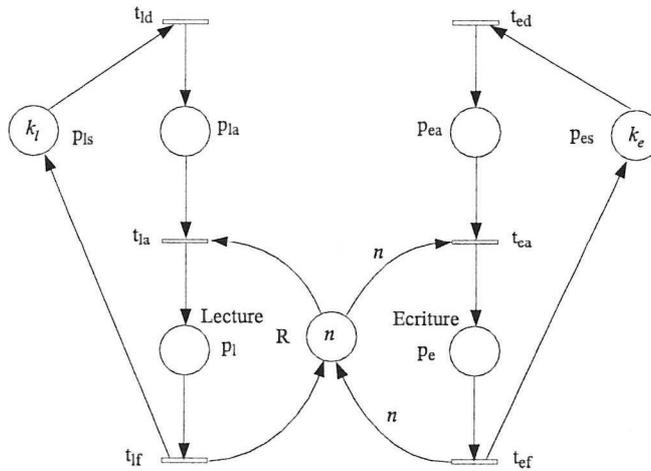


FIG. 6: Réseau de Petri paramétré

place p_{l_s} . S'il y a k_e écrivains, on met k_e jetons dans la place p_{e_s} .

En ce qui concerne le nombre maximal de tâches *lecteurs* pouvant accéder simultanément à la ressource, il suffit de remarquer que le mécanisme repose sur le fait que le nombre initial de jetons dans la place R (le nombre initial de droits d'accès) est égal aux poids des arcs (R, t_{ea}) et (t_{ef}, R) (pour écrire il faut tous les droits)¹. Soit n le nombre maximal de lecteurs autorisés simultanément, avec $n > 0$ (un poids d'arc ne peut être égal à 0), alors il suffit de mettre initialement n jetons dans la place R et d'associer un poids n aux arcs (R, t_{ea}) et (t_{ef}, R) .

On obtient le réseau de Petri paramétré de la figure 6.

¹Cela sera prouvé dans la partie *analyse et vérification* de cet exemple

Chamonix. 6 février 1981

Jean - Pierre Petit

Clôture des journées sur l'information scientifique

Le centre Jean Franco a retrouvé un peu de calme mercredi soir après trois journées marquées par une activité cérébrale intense puisque 200 scientifiques et enseignants de 11 pays ont discuté

sur l'éducation scientifique. Les journées sur l'éducation scientifique de Chamonix sont nées en 1979 de la rencontre entre des enseignants appartenant à tous les niveaux et des chercheurs

des disciplines fondamentales intéressés par l'éducation scientifique : épistémologie, histoire des sciences, psychologie, sociologie, linguistique, didactique et sciences de l'éducation, mathématiques, biologie, chimie, physique, géologie. Cette première rencontre était coordonnée par la section Sciences de l'I.N.R.P. et le département de psychologie de l'Université de Rouen.

Depuis, chaque année, elles sont devenues un lieu de réflexion et de confrontation sur des thèmes différents et ont regroupé de plus en plus de participants différents.

En 1979 : les démarches scientifiques expérimentales théorie et pratique. 40 participants.

En 1980 : la construction des concepts. 140 participants de 7 nationalités.

En 1981 : le colloque s'ouvre aux journalistes, aux écrivains, aux éditeurs scientifiques, aux muséologues et à la bande dessinée.



Jean-Pierre Petit, auteur de plusieurs ouvrages de bandes dessinées scientifiques, a offert ce dessin à nos lecteurs à l'occasion des journées chamoniardes.

AVANTURE

