Aix-Marseille université

BULLETIN D'INFORMATIQUE APPROFONDIE ET APPLICATIONS

COMPUTATION - INFORMATION

Volume 93 - Décembre 2012

FONDATEUR *Edmond Bianco*

Publication trimestrielle, gratuite, de l'Université d'Aix - Marseille

http ://sites.univ-provence.fr/biaa

Impression : décembre 2013

ISSN 0291 - 5413

BULLETIN D'INFORMATIQUE APPROFONDIE ET APPLICATIONS

COMPUTATION - INFORMATION

Volume 93 - Décembre 2012

FONDATEUR *Edmond Bianco*

Publication trimestrielle, gratuite, de l'Université d'Aix - Marseille

http ://sites.univ-provence.fr/biaa

Impression : décembre 2013

ISSN 0291 - 5413

SECRETARIAT

Kalassoumi Adjilani
Université d'Aix - Marseille
Site Saint Charles. Case 33
3 place Victor Hugo
F - 13331 Marseille Cedex 3
Téléphone : +33 (0) 413 550 252
Télécopie : +33 (0) 491 509 110

DEPOSITAIRE

Université d'Aix - Marseille
Bibliothèque Universitaire
3 place Victor Hugo
F - 13331 Marseille Cedex 3
Téléphone : +33 (0) 413 550 579
Télécopie : +33 (0) 491 957 557

IMPRIMEUR

Université d'Aix - Marseille
Service Reprographie
3 place Victor Hugo
F - 13331 Marseille Cedex 3
Téléphone : +33 (0) 413 550 626
Télécopie : +33 (0) 413 550 650

Le bulletin d'informatique approfondie et applications est une revue pluridisciplinaire destinée à éclairer les connaissances fondamentales informatiques.
Les fondements sont un domaine vaste allant de la structure intérieure de l'ordinateur, où se matérialise la machine universelle, à l'algorithme qui devient programme, pour aboutir à la notion de système.

Nous contribuons ainsi à ce que les autres disciplines plus anciennes (sciences humaines et de la société, sciences de la matière et de l'énergie, sciences mathématiques, sciences de la nature, sciences de la terre, sciences de l'univers, sciences de la vie, etc.) n'aient pas tendance à considérer l'informatique comme un simple outil définitivement figé.

Il importe de continuer à maîtriser les développements fondamentaux de l'informatique pour que nos disciplines puissent en tirer un meilleur parti.
Notre publication est ouverte à l'ensemble de la communauté scientifique. Le périodique est diffusé vers les bibliothèques universitaires de France et vers quelques bibliothèques des cinq continents.

Dépôt légal : décembre 2011

ISSN 0291 - 5413

Couverture : graffiti gare Saint Charles à Marseille. Graffeur inconnu.

EDITORIAL

La fondation Mark Gable (extrait)

Jean - Michel Knippel

Résumé. – Devra-t-on faire appel à la sagesse des animaux pour que les hommes entendent enfin raison et découvrent au XXIe siècle le secret de la paix ? Les dauphins ne sont-ils pas les plus intelligentes des créatures ? C'est ce qu'imagine Leó Szilárd, un des plus grands savants de notre temps : l'un des trois ou quatre qui ont obtenu la fission de l'atome. Mais ce « père » de la bombe atomique a entrepris une croisade pour mettre fin à la course aux armements atomiques. Atteint d'un cancer, il n'en poursuit pas moins son combat. L'ironie et l'humour figurent parmi ses armes favorites. Les nouvelles [1], dont nous présentons un court extrait, prouvent qu'il les manie avec maîtrise et qu'en imaginant le futur en vrai savant, il ne garde aucune illusion sur l'usage que notre temps fait de la science.

Hommage à Leó SZILÁRD

Dans une des dernières nouvelles de Leó SZILÁRD, « The Mark Gable Foundation [2] [3] », un milliardaire demande au personnage principal, un chercheur, comment on pourrait ralentir l'avancée de la science, trop rapide selon lui.

Le chercheur répond : « On pourrait mettre en place une fondation dotée de 30 millions de dollars. Les chercheurs ayant besoin d'argent pourraient y faire des demandes, en se montrant convaincants. Comptons pour examiner les dossiers dix comités, chacun composé d'une douzaine de chercheurs. Prenons les chercheurs les plus actifs et nommons-les membres de ces comités ... Premièrement, les meilleurs chercheurs seraient soustraits à leurs laboratoires et occupés à l'évaluation des dossiers. Deuxièmement, les chercheurs en quête d'argent se concentreraient sur des questions jugées prometteuses et sur lesquelles ils seraient à peu près sûrs de pouvoir publier rapidement. Les premières années, il y aurait certainement une augmentation notable de la production scientifique ; mais à force de rechercher les choses évidentes, bientôt la science se tarirait ... Il y aurait des modes, et ceux qui les suivraient auraient des crédits. Ceux qui ne les suivraient pas n'en auraient pas, et apprendraient rapidement à suivre les modes à leur tour. [4] »

Merci à mes collègues, Francis Rousseaux et Eric Sopena, du Conseil National des Universités de la section Informatique (CNU 27), de nous avoir fait partager ce rappel, d'un écrit du passé, qui trouve un titre réactualisé : « l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) avant l'heure » ... d'après Eric Sopena de Bordeaux.

1. http ://www.gallimard.fr/Catalogue/DENOEL/Presence-du-Futur/
2. Leó Szilárd. The Voice of the Dolphins. Simon Schuster, 1961.
3. Leó Szilárd. Présence du futur. La voix des dauphins. Editons Denoël, 1962.
4. Laurent Ségelat. La science à bout de souffle ? Editions du Seuil, 2009.

Qu'entend-on par calculer ?

Edmond Bianco et Jean - Michel Knippel

Résumé. – « Calculez la somme de 545 et 28 », « effectuez le produit de a et de b », « 25+15=100 (!) », etc. De telles expressions nous indiquent que le cadre intuitif immédiat dans lequel se pose ce genre de questions contient explicitement la notion de nombre. Il nous semble utile, pour éviter des confusions, de rappeler qu'il est possible dans le cadre de la théorie des ensembles (par exemple, mais dans d'autres également) de construire un objet abstrait $\mathbb{N}$, totalement formalisé si on le souhaite, et présentant toutes les caractéristiques requises pour correspondre à l'intuition courante que nous avons des nombres, avec les avantages ou autre gain en précision (par le formalisme), ou structuration (par l'axiomatisation), ou extension (par l'introduction d'interprétations dignes de l'intuition courante).

Cela dit considérons l'objet $\mathbb{N}$ dans une des présentations qu'on peut en donner :
Au préalable rappelons qu'on appelle successeur d'un ensemble x, $x^+ = x \cup \{x\}$
Il existe alors un ensemble $\mathbb{N}$ d'ensembles, en prenant les précautions d'usage concernant les paradoxes de Russel sur les ensembles d'ensembles, vérifiant :

1) $\emptyset \in \mathbb{N}$
2) $\mathbb{N}$ contient tous les successeurs de ses éléments
3) Si $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ et vérifie 1) et 2) alors $\mathbb{N} = \mathbb{N}'$

Cette propriété porte souvent le nom de « principe de l'induction mathématique ». Il est alors possible à partir de ses 3 propriétés de définir toutes les opérations habituelles sur $\mathbb{N}$, addition, multiplication, puissance, etc . et de retrouver tous les théorèmes connus intuitivement Ajoutons qu'un théorème établit que tous les ensembles $\mathbb{E}$ vérifiant :

1') $a \in \mathbb{E}$, a est un élément quelconque
2) $\mathbb{N}$ contient tous les successeurs de ses éléments
3) Si $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ et vérifie 1) et 2) alors $\mathbb{N} = \mathbb{N}'$

sont isomorphes à $\mathbb{N}$.

Nous n'allons pas ici nous lancer dans cette entreprise, mais simplement fixer notre attention sur l'addition. Pour en arriver là, on a besoin d'utiliser un théorème dit de « récurrence », dont nous ne donnerons que l'énoncé :

« si $a \in X$, et $f\ : X \to X$ quelconque, alors $\exists u, u : \mathbb{N} \to X$
vérifiant $u(o) = a$ et $u(n^+) = f(u(n))\ \forall n \in \mathbb{N}$. »

L'intérêt de ce théorème est précisément de permettre des définitions par induction. En voici un exemple :

On choisit pour X précisément $\mathbb{N}$, et pour f la fonction successeur
$f\ : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
$n \rightarrow n^+$ pour a, un m particulier $\in \mathbb{N}$

Le théorème de récurrence permet de conclure à l'existence d'une fonction u_m vérifiant :

$u_m(o) = m \quad u_m(n^+) = (u_m(n))^+$

Aussi par exemple :

$u_m(1) = (u_m(0))^+ = m^+$ noté $m + 1$
$u_m(2) = (u_m(1))^+ = (m + 1)^+ = m + 2$ etc.

On a tout simplement ainsi défini l'addition, et la fonction $u_m(x)$ n'est autre que m+n. On peut alors étudier les questions de l'associativité, de la commutativité, de la distributivité, etc. qui toutes s'établissent sans exception, dans le cadre déductif habituel, formalisé ou non.

Des techniques similaires permettent de définir la multiplication, l'exponentiation et ainsi de suite, en les établissant par déduction (formelle si nécessaire), en reconstruisant toutes les propriétés attendues de l'arithmétique.

Considérons alors l'expression « faire la somme de 25 et 38 » (1) et essayons d'en dégager le sens. Portons également nos réflexions sur un énoncé tel que « 15+34 = 59 » (2).

Les objets abstraits qui sont le support de notre réflexion, ici les nombres, ont besoin d'être nommés. Il en est ainsi de toute démarche théorique. Nommer les objets qu'on étudie (qu'ils soient ou non abstraits) et opérer sur ces noms plutôt que sur les choses est une caractéristique essentielle de nos processus intellectuels.

Il ne s'agit pas ici de dégager les conditions dans lesquelles se développe la pensée symbolique, mais d'être conscient de la nature des objets sur lesquels nous opérons à l'occasion de tel ou tel discours.

Signalons toutefois que dans ces circonstances, l'objet représenté dans notre esprit est recrée sous la forme d'un autre objet n'ayant en général qu'un lointain rapport avec celui qui lui a donné naissance. C'est d'ailleurs un des avantages essentiels de ces processus de formalisation : la forme du graphisme 25 n'indique par elle même rien de l'objet qu'elle désigne. L'important consiste simplement en cela qu'on se refuse à donner le même nom à deux objets différents, mais par contre rien n'interdit qu'un même objet soit désigné de plusieurs façons. Il faut donc s'imprégner des caractéristiques qui président à l'élaboration des noms. De même que les objets sont nommés, les opérations le sont à leur tour : ainsi + n'est pas l'addition mais simplement le nom de celle-ci ; on dit quelquefois son symbole.

Avant d'avancer plus loin dans cette direction, faisons une autre remarque : on a besoin par exemple dans $\mathbb{N}$ de décrire les situations telles que celles qu'on nomme associativité, commutativité ou toute autre propriété. Notons que l'objet réel que nous étudions décrit une relation, par exemple + : $\mathbb{N}$ x $\mathbb{N}$ $\rightarrow$ $\mathbb{N}$, et qu'il nous faut décrire une propriété particulière. La classe des objets étudiés s'est ainsi structurée, au départ ℕ, puis un certain sous ensemble de (ℕ x ℕ) x ℕ. Ici se pose une question délicate ! Comment nommer une propriété, et est ce bien ce dont nous avons besoin ?

Si tel est le cas, c'est que l'on étude que nous entreprenons, serait celle de l'objet concept, associativité. Or dans le problème qui nous occupe le problème n'est pas là : ce n'est pas l'associativité qu'il nous faut étudier : elle n'est pas l'objet de notre étude, mais plutôt une conclusion de celle-ci ; il nous faut l'exprimer non l'étudier.

Or, c'est justement la caractéristique des nombres que de n'exister que suivant certains rapports entre eux, nous disons actuellement par les opérations qu'on peut leur appliquer.

Les modes d'existence qui nous intéressent, sont ceux qui traduisent la place et le comportement des objets dans les rapports multiples qu'ils peuvent avoir avec les autres, et même peut on dire ce sont les seuls modes d'existence de faits. Il est donc superficiel d'espérer avancer par simple opération qui a consisté à nommer des objets élémentaires ; il faut pouvoir décrire les rapports qu'ils entretiennent entre eux ; c'est exactement à ce genre de moyen qu'on fait appel en écrivant $25 + 34 = 59$.

Peut on prouver une telle assertion ? La question est ailleurs ; ce qu'il faut c'est savoir ce que l'on veut dire et pour cela il est nécessaire de savoir ce que signifie 25, 34 et 59 (et également bien sur $+$ et $=$). Puisque l'addition est définie dans ℕ la somme des nombres dont les noms sont 25 et 34 est déterminée, elle est définie et on ne démontre pas qu'elle est ce qu'elle est. Par contre c'est une autre question que de savoir si le nom de cette somme est ou n'est pas 59.

On pourrait dire que la question est la suivante ; connaissant les noms des deux nombres décider si un nom donné est celui de la somme des deux précédents.

Pourtant si chez l'épicier qui inscrit le prix de tous les articles achetés par nous en une longue série, nous indiquons qu'il est inutile de faire la somme puise celle ci est déjà définie, nous serions considérés d'une façon curieuse. A quoi cela tient-il ?

Imaginons que nous n'ayons que des pièces de 1 c, et qu'au fur à mesure de l'inscription des prix nous mettons de côté les pièces en nombre requis ; à la fin l'addition se trouve ainsi faite d'elle même, et le recours au calcul est inutile sauf ce comptage 1 à 1 que nous avons opéré tout le long. Dans la réalité la situation se présente différemment : en poche nous avons de la monnaie : les types de pièces et de billets sont assez bien conçus pour faire commodément et assez rapidement n'importe quel montant courant ; et en outre nous sommes familiarisés avec le maniement des constituants de la monnaie.

C'est la que se trouve l'explication de notre embarras devant la question posée plus haut. En réalité, nous sommes bien plus familiarisés avec les noms des nombres qu'avec les nombres eux-même : au delà d'une quantité très limitée de situations, variable d'un individu à l'autre, mais dans l'immense majorité des cas, très restreinte, mais ne faisons plus la différence.

Reconnaît-on aisément qu'il y a dans un groupe 1200 ou 1201 individus ?

A l'exception de ces situations peu nombreuses, où l'identification des nombres en cause peut se faire d'emblée, nous sommes obligés de mettre en œuvre des moyens de représentation (dépendant de la nature du problème en cause) qui auraient quelque utilité.

Nous avons donc à nommer les nombres, c'est à dire à créer pour chacun d'eux un symbole (physique, graphique, ou de toute autre nature) associé à lui et lui seul..

Que se passerait-il si à chaque nombre nous associons un graphisme qui présenterait aucun lien structurel avec les autres utilisés ? Nous aboutirions à une situation effroyablement compliquée qui de plus exigerait pour les questions les plus simples une mémoire phénoménale.

De même, que nous devons connaître par cœur que 5+3=8 , il faudrait connaître par cœur des choses du genre $\aleph + \Re = \Im$ et le problème ne serait pas résolu pour autant.

La « numération » de position, comme son nom l'indique est fondée sur l'idée que le sens des mêmes graphiques est distinct suivant la place qu'ils occupent : ainsi dans 33, le premier 3 n'a au demeurant pas le même sens que le second.

Les avantages d'une telle technique de représentation sont au moins de deux types : d'une part, dans l'économie des symboles. Même si les occurrences de ceux-ci peuvent être innombrables, les symboles initiaux sont en nombre fini. La possibilité de désigner autant d'objets qu'on le souhaite continue d'exister ; d'autre part, et ceci est fondamental, la formation des noms ne nécessite aucune imagination, elle peut se faire automatiquement sans aucun appel à l'intuition. D'ailleurs, il est possible d'apprendre le procédé à peu près à n'importe qui.

On peut objecter, que certes l'avantage est pratiquement considérable, mais que du point de vue théorique on n'a guère avancé dans la mesure où des nombres très grands mèneraient à des graphismes eux mêmes d'une taille effrayante, hors d'attente d'une appréhension immédiate de nos sens. Mais cette crainte n'est pas réellement fondée : outre qu'on ne peut trouver des systèmes de représentations correctement adaptés à des domaines précis, ce qui est déjà un résultat satisfaisant, il faut bien saisir qu'aussi bien pour construire le nom d'un nombre ou que pour le reconnaître (ce qui est la même chose), les procédés à mettre en œuvre resteront les mêmes quelques soient les nombres en question, toujours aussi simples et automatiques. On pourrait dire que si la taille des graphismes est sans limite, leur complexité par contre ne dépasse jamais un certain seuil.

Ainsi l'expression 23+55=78 n'est en rien une proposition de l'arithmétique, mais une façon de dire que l'image de la fonction somme appliquée à « 23 » « 55 » et « 78 ». En effet comme on l'a dit, il y a un procédé qui définit la somme de 23 et 55[1] . Par extension si on considère le problème sous la forme suivante : « est ce que 78 est le nom du nombre qui est la somme de des nombres dont les noms sont 23 et 55 ? » , alors se pose réellement une question qui a du sens. Le calcul au sens où l'entend couramment opère aussi sur des noms, c'est à dire sur des formes dont les sens sont les nombres dans le cas présent. Ainsi quant on dit « faire la somme de 23 et 55 », il faut entendre « formez le nom de la somme en question » avant que d'examiner ce que c'est que former cette somme, faisons une autre remarque : si on avait à analyser l'expression 23+55 = 70+8 , celle ci à vrai dire est susceptible de 2 sens : ou bien on veut exprimer une propriété relative aux noms, auquel cas il n'y a rien de particuler à dire, ou bien alors, il s'agit de constater que la somme des nombres dont les noms sont 23 et 55 et celle des nombres

1. On a défini la fonction +(23,55)=78. Dira t-on qu'on a démontré quelque chose ? C'est comme si ayant défini un ensemble infini par le fait qu'il possède telle propriété, on dirait soit un ensemble vérifiant telle propriété, démontrez qu'il est infini !

dont les noms sont 70 et 8, c'est le même nombre, et dans ce cas là on a affaire avec une propriété de l'arithmétique, en l'occurrence une manifestation dans un cas particulier de l'associativité, et cela il faut le démontrer. Or démontrer consiste à produire des énoncés, les uns après les autres dans un cadre formel et en suivant des règles formalisées tout à fait strictes. En quelque sorte, il s'agit là aussi de produire des formes en ne suivant finalement que les règles de transformation des formes initiales, pour aboutir à la forme représentant l'énoncé final. Toutefois, et c'est cela qui caractérise les processus démonstratifs, le choix des configurations de départ et les règles à appliquer ainsi que leur encadrement est affaire de pure intuition [2], alors que dans ce que nous appelons le calcul et qui consiste également en une production de signes, le cheminement est automatique, sans choix ni intuition.

RÉFÉRENCES

[1] Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*, traduction de Jean-Pierre Levet d'après l'édition latine de Robert de Chesterdu (XIIe siècle), IREM de Poitiers, coll. Cahiers d'histoire des mathématiques et d'épistémologie, 1997.

[2] Edmond Bianco, *Informatique fondamentale. De la machine de Turing aux ordinateurs modernes*, Birkhäuser Verlag, 1979.

[3] Edmond Bianco, *Notions de calcul*, Bulletin d'Informatique Approfondie et Applications, Université d'Aix-Marseille, volume 45, 1996, p.23-28.

[4] Ivar Ekland, *Le Calcul, l'Imprévu.* , Editions du Seuil, 1984.

[5] G. Ifrah, *Histoire universelle des chiffres : l'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul*, Editions Robert Laffont, 1994.

[6] Christian Piguet, Heinz Hügli, *DU ZERO à l'ordinateur. Une brève histoire du calcul*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2004.

[7] Jean Claude Quiniou, Jean-Marc Font, Gérard Verroust, Jean-Marc Philippe & Claudine Marenco, *Les cerveaux non humains*, Collection "LE POINT SUR LA QUESTION", Editions S.G.P.P., 1970.

[8] René Taton, *Le Calcul Mental*, Que sais-je ?, Presses Universitaires de France, 1957.

[9] Guillaume Watier, *Le calcul confié aux machines*, Collection l'esprit des sciences, Ellipes, 2001.

2. Il existe des cas où la décision qu'un énoncé est ou n'est pas un théorème, peut se faire automatiquement sans intuition. Mais précisément ces cas sont des limites. Un exemple en est le calcul propositionnel simple, et il n'est pas forcement hasardeux qu'il soit aussi denommé (calcul).

VOUZZAVEDIBISAR

Salut Edmond Bianco. Souvenir de 1982

Patrick Isoardi