(2015) B.I.A.A. no **100** BULLETIN D'INFORMATIQUE APPROFONDIE ET APPLICATIONS
ISSN 0291-5413 (Université d'Aix-Marseille)

100 ans de Relativité Générale (I/III) : covariance

Eric OLIVIER [1] [2]

Résumé. – *Einstein publie l'article fondateur de la Relativité Générale en 1916 – il y a 100 ans. C'est l'aboutissement de 10 ans de travail qui lui permettent d'intégrer la gravitation à l'espace-temps de la Relativité Restreinte (1905). La manière dont les idées scientifiques d'Einstein se développent est très liée à sa personnalité : en étudiant la Relativité Générale, on est frappé par la manière dont s'articulent des idées d'apparence naïve à la technicité mathématique. En trois notes, nous partons des fondements mathématiques de la Relativité Générale, afin de comprendre l'effet de la gravitation sur les rayons lumineux. La première note est consacrée à la covariance, c'est-à-dire au calcul tensoriel : cela nous permettra d'introduire les symboles de Christoffel, la connexion de Levi-Civita et la caractérisation des géodésiques inertielles par le transport parallèle (Théorème de Levi-Civita). La deuxième note* [Oli15a] *traite de la courbure riemannienne : c'est le point crucial de la géométrie riemannienne qui donne tout son sens à l'équation d'Einstein de la Relativité Générale. Enfin dans la troisième note* [Oli15b]*, nous abordons la déflexion des rayons lumineux, d'abord du point de vue newtonien, puis en donnant la résolution des équations d'Einstein par Schwarzshild : en application, nous donnons le calcul relativiste complet de la déflexion des rayons lumineux rasant la surface solaire.*

1. **Introduction**

Lorsqu'il commence à réfléchir à la manière d'intégrer la gravitation à l'espace-temps de la Relativité Restreinte, Einstein bute sur des difficultés mathématiques très sérieuses. C'est un ami proche (Marcel Grossmann) qui l'oriente vers les tous nouveaux concepts de la géométrie différentielle et du calcul tensoriel. Plus précisément, c'est la notion de *courbure* introduite par Gauss pour les surfaces, puis développée par Riemann pour des objets géométriques plus généraux (les variétés pseudo-riemanniennes), qui semble le bon concept pour généraliser la Relativité Restreinte. Einstein réalise que la *force centrifuge ressentie* sur un manège tournant, doit être de nature gravitationnelle : sa Relativité Restreinte ne prend pas en compte un référentiel qui serait en rotation par rapport à un référentiel lorentzien, et c'est là que la gravitation se dévoile ! Il fera aussi souvent allusion à l'*expérience de pensée* où *un observateur* se trouve en chute libre dans une cabine d'ascenseur, constatant – par la pensée – l'annulation de la gravitation terrestre. Là encore, le référentiel lié à la cabine ne peut être considéré comme lorentzien, du fait de son accélération uniforme par rapport au référentiel terrestre. Ces réflexions semblent indiquer que la gravitation est lié au référentiel utilisé, ou plus concrètement à la manière dont on mesure les positions dans l'espace-temps. La grande idée de la Relativité Générale est que les lois de la physique (à commencer par celles de la gravitation) doivent être exprimées indépendamment du référentiel : en d'autres termes – et contrairement aux Relativités Galiléenne et Restreinte – aucune sous-classe de référentiels ne peut être privilégiée au sein de l'ensemble des référentiels possibles. Selon la terminologie d'Einstein, la Relativité Générale se comprend en termes de lois *covariantes* (terminologie introduite par Ricci en 1888 [Ric88]) : afin de pouvoir énoncer sa nouvelle théorie de la gravitation,

1. GDAC-I2M UMR 7373 CNRS Université d'Aix-Marseille
2. eric.olivier@univ-amu.fr

Einstein va devoir assimiler les derniers progrès de la géométrie de son temps – essentiellement le calcul tensoriel – en suivant les traces de Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci et Levi-Civita.

Cette première note est consacrée aux concepts mathématiques nécessaires à la formulation de la Relativité Générale : en particulier, il nous faudra introduire le formalisme du calcul différentiel et tensoriel sur les variétés, puis introduire les structures pseudo-riemanniennes, afin de pouvoir définir rigoureusement la notion de géodésiques inertielles. Pour Einstein, ces géodésiques doivent décrire les mouvements des corpuscules uniquement soumis à la gravitation : pour comprendre cela, il nous faudra partir du formalisme lagrangien afin de voir comment les équations des géodésiques inertielles se traduisent en termes de transport parallèle (Théorème de Levi-Civita). Nous aborderons ces questions par les bases de calcul différentiel absolue de Ricci et Levi-Civita en regardant particulièrement l'articulation qui existe entre la notion de connexion et le transport parallèle introduit par Levi-Civita.

Remerciement : Je tiens à remercier chaleureusement Christian Faivre pour m'avoir mis au défi d'un exposé "le plus simple possible" permettant de comprendre pourquoi la gravitation courbe les rayons lumineux. Entre autres, ce projet a été l'occasion de moulte discussions passionnées qui ont animé la salle du Dugommier. D'une certaine manière la Relativité Générale donne un élément de réponse important à cette question, puisqu'elle permet de prévoir avec une grande précision, les mesures des déflexions lumineuses dues à la gravitation. Aller plus loin, en essayant de voir comment s'articulent l'électrodynamique (quantique) et la Relativité Générale, permettrait une bonne (meilleure) description des rayons lumineux : mais cette tâche se trouve être très difficile, car un photon n'est pas un objet de la Relativité Générale...

2. Changements de bases dans un espace vectoriel

Soit $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base d'un espace vectoriel E. Tout vecteur $v \in E$ se décompose de manière unique sous forme d'une combinaison linéaire, soit $v = v^i \varepsilon_i$ (notations sommatoires d'Einstein[3]) : ici, les coordonnées v^i (indice en haut) sont appelées $\mathcal{E}$-composantes contravariantes. Pour l'instant, la « *contravariance*[4] » proprement dite traduit simplement le fait que les indices des composantes sont en position supérieure (nous verrons plus loin que la « *covariance* » concerne les indices en position inférieure). Ces notations ont aussi l'avantage de permettre l'utilisation des notations sommatoires d'Einstein ; dans la suite, nous donnerons un sens précis au formalisme de la covariance/contravariance, avec l'introduction systématique des tenseurs. Le changement de coordonnées de $\mathcal{E}$ vers une autre base $\hat{\mathcal{E}} = (\hat{\varepsilon}_1, \ldots, \hat{\varepsilon}_n)$, est effectué grâce à la matrice de passage[5]

3. La notation d'Einstein signifie une sommation sur tous les indices $i, j, k, \ldots$ se trouvant à la fois en position supérieure et inférieure dans une expression multiplicative : ainsi, par exemple, la décomposition d'un vecteur v de coordonnée $(v^1, \ldots, v^n)$ dans une base $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ s'écrit-elle $v = v^i \varepsilon_i = \sum_{i=1}^n v^i \varepsilon_i$.

4. La terminologie *covariance/contravariance* apparaît dans l'article de Ricci [Ric88] en 1888 (en italien). Dans leur article [RTLC00] de synthèse en français Ricci et Levi-Civita parlent de *contrevariance*.

5. Une matrice est ici considérée comme un tableau de nombres réels (les coefficients), dont la position est repérée par les indices de ligne/colonne. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est munie d'une structure naturelle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel ; on peut aussi voir $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme une algèbre non commutative en définissant le produit des matrices : si $A = ({a^i}_j)$ et $B = ({b^i}_j)$, alors le produit

$P = (p^i{}_j)$ – i étant l'indice de ligne et j l'indice de colonne – de sorte que

$$\hat{\varepsilon}_j = p^i{}_j \varepsilon_i$$

(retenir qu'on exprime les vecteurs de la *nouvelle* base en fonction des vecteurs de la base *initiale*, ce qui semble raisonnable). Par suite, pour un vecteur $v = v^i \varepsilon_i = \hat{v}^j \hat{\varepsilon}_j$ arbitraire, les relations entre les $\mathcal{E}$-composantes v^i et les $\hat{\mathcal{E}}$-composantes $\hat{v}^i$ s'obtiennent en écrivant $\hat{v}^j \hat{\varepsilon}_j = \hat{v}^j p^i{}_j \varepsilon_i = v^i \varepsilon_i$: cela se traduit par le système d'équations :

$$v^i = \hat{v}^j p^i{}_j$$

(où les *anciennes* composantes sont fonctions des *nouvelles*). Notons $P^{-1} = (q^i{}_j)$ l'inverse de la matrice P (i.e. $p^i{}_k q^k{}_j = \delta^i{}_j$ – symbole de Kronecker). Soit $A = (a^i{}_j)$ la matrice d'un endomorphisme (linéaire) ψ de E dans la base $\mathcal{E}$ (i.e. $\psi(\varepsilon_j) = a^i{}_j \varepsilon_i$) ; alors,

$$\psi(v) = a^i{}_j v^j \varepsilon_i = a^i{}_j (\hat{v}^r p^j{}_r)(q^s{}_i \hat{\varepsilon}_s) = (q^s{}_i a^i{}_j p^j{}_r) \hat{v}^r \hat{\varepsilon}_s$$

de sorte que la matrice de ψ dans la base $\hat{\mathcal{E}}$ s'écrit

(1) $$\hat{A} = P^{-1} A P$$

Soit $\xi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire ; par définition, les $b_{ij} := \xi(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ sont les $\mathcal{E}$-composantes de ξ, de sorte que $\xi(v, w) = v^i w^j b_{ij}$ dès que $v = v^i \varepsilon_i$ et $w = w^i \varepsilon_i$. Pour obtenir les $\hat{\mathcal{E}}$-composantes $\hat{b}_{ij} = \xi(\hat{\varepsilon}_i, \hat{\varepsilon}_j)$ de ξ, notons $v = \hat{v}^i \hat{\varepsilon}_i$ et $w = \hat{w}^i \hat{\varepsilon}_i$; alors il vient :

(2) $$\xi(v, w) = v^i w^i b_{ij} = (\hat{v}^r p^i{}_r)(\hat{w}^s p^j{}_s) b_{ij} = \hat{v}^r \hat{w}^s (p^i{}_r b_{ij} p^j{}_s)$$

et finalement

(3) $$\hat{b}_{ij} = p^i{}_r b_{ij} p^j{}_s$$

Par convention appelons $B = (b_{ij})$ (resp. $\hat{B} = (\hat{b}_{ij})$) la matrice de ξ dans la base $\mathcal{E}$ (resp. $\hat{\mathcal{E}}$) – i étant l'indice de ligne et j l'indice de colonne. Avec P^* désignant la transposée de P, nous pouvons traduire (3) en disant que la matrice de ξ dans la base $\hat{\mathcal{E}}$ est

(4) $$\hat{B} = P^* B P$$

3. **Dualité et dualité euclidienne**

Le dual E^* d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie n, est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des formes linéaires sur E (encore appelées covecteurs), i.e. des applications linéaires $\alpha : E \to \mathbb{R}$. L'espace E^* est de dimension n et toute base $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E est associée à une base duale $\mathcal{E}' = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ qui est la base de E^* formées des covecteurs ε^i définis par le système équations (c.f. [BG68, § 2.7 p. 75]) :

(5) $$(\forall j) \quad \varepsilon^i(\varepsilon_j) = \delta^i{}_j$$

Maintenant, munissons E d'une structure euclidienne : cela signifie que nous fixons une forme bilinéaire $(u, v) \mapsto g(u, v)$ qui est à la fois symétrique (i.e. $g(u, v) = g(v, u)$), positive (i.e. $g(u, u) \geq 0$) et définie (i.e. $g(u, u) = 0 \iff u = 0$). Par définition, g est le produit scalaire de l'espace euclidien E. Nous utiliserons aussi la notation spéciale $\langle u|v \rangle$ pour désigner la valeur de $g(u, v)$; $u \mapsto \|u\| := \langle u|u \rangle^{1/2}$ est une norme sur E qui fait de $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Soit $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base (quelconque) de E. La symétrie de g

---

AB est la matrice $(a^i{}_k b^k{}_j)$. Par définition, la transposée de $A = (a^i{}_j)$ est la matrice $A^* = (\alpha^i{}_j)$ t.q. $\alpha^i{}_j = a^j{}_i$: lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la transposition $A \mapsto A^*$ fait de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une C*-algèbre.

(en tant que produit scalaire) se traduit par la symétrie de ses *$\mathcal{E}$-composantes* $g_{ij} = g(\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ en ce sens que $g_{ij} = g_{ji}$. D'autre part, les g_{ij} permettent aussi de définir les $\mathcal{E}$-composantes covariantes $v_i \in \mathbb{R}$ (indice en bas) d'un vecteur $v = v^i \varepsilon_i$ en posant

(6) $$v_i := g(\varepsilon_i, v) = g(\varepsilon_i, v^j \varepsilon_j) = g_{ij} v^j$$

(opération généralisée avec l'abaissement/relèvement des indices tensoriels). Enfin, notons que la structure euclidienne sur E détermine une classe spéciale de bases de E : ainsi, $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ sera dite orthonormée si et seulement si $g_{ij} = g(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker, avec deux indices covariants).

Munir E d'un produit scalaire g permet de voir la dualité entre E et E^* comme une isométrie involutive : nous parlerons dans ce cas de g-dualité. Pour voir cela, notons que tout vecteur v est associé au covecteur $v^* = g(v, \cdot)$ et réciproquement que tout covecteur α est associé au vecteur α^* t.q. $\alpha = g(\alpha^*, \cdot)$. Étant déterminée par le produit scalaire g, l'opération $v \mapsto v^*$ (resp. $\alpha \mapsto \alpha^*$) de E sur E^* (resp. de E^* sur E) est appelée g-transposition : c'est une involution en ce sens que $(v^*)^* = v$ et $(\alpha^*)^* = \alpha$, pour tout $v \in E$ et tout $\alpha \in E^*$.

Remarque 3.1. *(1) : Dans les notations de Dirac, un vecteur v se note comme un « ket » soit $v \equiv |v\rangle$ et le covecteur associé comme un « bra » soit $v^* \equiv \langle v|$. Si w est un deuxième vecteur, on retrouve l'expression du produit scalaire $v^*(w) = g(v, w) = \langle v|w\rangle$.*

(2) : Attention : étant donné $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base (quelconque) de E, le vecteur ε^i de la base duale $\mathcal{E}'$ n'est pas en général égal à ε_i^*. En fait l'égalité $\varepsilon^i = \varepsilon_i^*$ n'a lieu – pour tout i – que dans le cas où $\mathcal{E}$ est une base orthogonale.

L'espace E^* est naturellement muni d'un produit scalaire $(\alpha, \beta) \mapsto g^*(\alpha, \beta)$, où par définition, $g^*(\alpha, \beta) = g(\alpha^*, \beta^*)$: l'application $v \mapsto v^*$ est alors une isométrie de (E, g) sur (E^*, g^*) dont l'isométrie réciproque est l'application $\alpha \mapsto \alpha^*$. Par définition les $\mathcal{E}$-composantes de g^* sont les

(7) $$g^{ij} := g^*(\varepsilon^i, \varepsilon^j)$$

Rappelons que la base $\mathcal{E}' = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ de E^* se déduit de la base $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E par les relations de dualité en (5) qui sont indépendantes du produit scalaire sur E. Les $\mathcal{E}'$-composantes covariantes [6] α_i d'un covecteur α sont les coordonnées de α dans la base duale $\mathcal{E}'$, ce qui donne $\alpha = \alpha_i \varepsilon^i$. De même que pour les composantes contravariantes des vecteurs en (6), les indices covariants des composantes d'un covecteur α peuvent être relevés en posant :

(8) $$\alpha^i := g^*(\varepsilon^i, \alpha) = g^*(\varepsilon^i, \varepsilon^j)\alpha_j = g^{ij}\alpha_j$$

Les définitions que nous venons de poser peuvent paraître abstraites (et elles le sont !) : elles prennent cependant un sens avec la proposition suivante (voir aussi la Figure 1).

Proposition 3.2. *Notons g_{ij} (resp. g^{ij}) les composantes covariantes (resp. contravariantes) du produit scalaire g d'un espace euclidien E rapporté à une base $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et soit $\mathcal{E}' = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ la base duale associée à $\mathcal{E}$. Si $v_i = g(\varepsilon_i, v)$ (resp. $\alpha^i = g^*(\varepsilon^i, \alpha)$) sont les composantes*

6. Covariantes, car les indices sont en position inférieure : c.f. infra pour la signification tensorielle.

covariantes (resp. contravariantes) de $v = v^i\varepsilon_i$ (resp. de $\alpha = \alpha_i\varepsilon^i$), alors :

$$\begin{array}{rclcl} (i) & : & v^* = v_i\varepsilon^i & \text{et} & \alpha^* = \alpha^i\varepsilon_i \\ (ii) & : & v = v_i\varepsilon^{i*} & \text{et} & \alpha = \alpha^i\varepsilon_i^* \\ (iii) & : & \varepsilon_j^* = g_{ij}\varepsilon^i & \text{et} & \varepsilon^{j*} = g^{ij}\varepsilon_i \\ (iv) & : & g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k & \text{et} & g(\varepsilon^{i*}, \varepsilon_j) = \delta^i{}_j \end{array}$$

Preuve. $(i)-(ii)$: D'après (6) nous avons $v^*(\varepsilon_j) = g(v, \varepsilon_j) = v^i g(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = v^i g_{ij} = v_j$. Le fait que $v^* = v_i\varepsilon^i$ se déduit de la définition des ε^i en (5) : en effet, pour tout j :

$$(v_i\varepsilon^i)(\varepsilon_j) = v_i\varepsilon^i(\varepsilon_j) = v_i\delta^i{}_j = v_j = v^*(\varepsilon_j)$$

La preuve de $\alpha^* = \alpha^i\varepsilon_i$ est analogue et (ii) découle de (i) par g-transposition.

(iii) : Comme $\varepsilon_j = \delta^i{}_j\varepsilon_i$, en appliquant (i) il vient : $\varepsilon_j^* = (g_{ik}\delta^k{}_j)\varepsilon^i = g_{ij}\varepsilon^i$. La preuve de $\varepsilon^{j*} = g^{ij}\varepsilon_i$ est analogue. (En général $\varepsilon^i \neq \varepsilon_i^*$, cette égalité n'ayant lieu (pour tout i) que lorsque la base $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est orthonormée, de sorte que dans ce cas $g(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$.)

(iv) : La g-dualité entre E et E^* est involutive en ce sens que pour tout $v \in E$ nous avons $(v^*)^* = v$: par suite, si les v^i sont les composantes contravariantes de v alors

$$v^i\varepsilon_i = v = (v^*)^* = \left(v^k g_{kj}\varepsilon^j\right)^* = \left(v^k g_{kj}\right)g^{ji}\varepsilon_i = v^k\left(g_{kj}g^{ji}\right)\varepsilon_i$$

Par suite, l'identité $v^i = v^k\left(g_{kj}g^{ji}\right)$ étant satisfaite pour tout i et tout $v \in E$, nous déduisons que $g_{kj}g^{ji} = \delta^i{}_k$. Pour la deuxième identité de (iv), nous avons

$$g(\varepsilon^{i*}, \varepsilon_j) = g(g^{ik}\varepsilon_k, \varepsilon_j) = g^{ik}g_{kj} = \delta^i{}_j$$

□

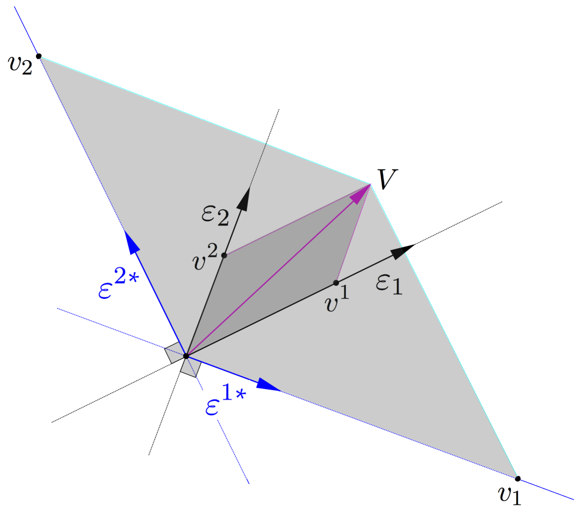

FIGURE 1. *Système de coordonnées covariant/contravariant relatif à une base (quelconque) $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, $g(\cdot,\cdot) = \langle\cdot|\cdot\rangle$. Tout vecteur v se représente de deux manières soient $v = v^i\varepsilon_i$ et $v = v_i\varepsilon^{i*}$. La deuxième identité de la partie (iv) de la Proposition 3.2 affirme que $\langle\varepsilon^{i*}|\varepsilon_j\rangle = \delta^i{}_j$: cela signifie que ε^{i*} est un vecteur (de E) qui est orthogonal à chacun des ε_j dès que $j \neq i$, avec $\langle\varepsilon^{i*}|\varepsilon_i\rangle = 1$.*

4. Calcul tensoriel

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et q (finies). Le produit tensoriel $u \otimes v$ de $u \in E$ et $v \in F$ est la forme linéaire sur $E^* \times F^*$ t.q.

$$u \otimes v(\xi, \zeta) = u(\xi)v(\zeta)$$

Par définition le produit tensoriel de E et F est l'espace vectoriel noté $E \otimes F$ qui est engendré par les $u \otimes v$, pour (u, v) décrivant $E \times F$. Si $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ et $\mathcal{F} = (\eta_1, \ldots, \eta_r)$ sont respectivement des bases de E et F, alors pour tout $u = u^i \varepsilon_i \in E$ et tout $v = v^i \eta_j \in F$,

$$u \otimes v = u^i v^j \varepsilon_i \otimes \eta_j$$

On peut alors montrer que les $\varepsilon_i \otimes \eta_j$ pour $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq$ forment une base de $E \otimes F$ notée $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, de sorte que $E \otimes F$ est de dimension pq. Si $E = F$ alors $u \otimes v$ et $v \otimes u$ sont deux éléments de $E \otimes E =: \bigotimes^2 E$: il est important de remarquer (et immédiat à vérifier) que – mis à part le cas où u et v sont proportionnels – nous avons

$$u \otimes v \neq v \otimes u$$

Si H est un troisième espace vectoriel de dimension r alors pour tout $(u, v, w) \in E \times F \times H$, nous posons $u \otimes v \otimes w := (u \otimes v) \otimes w$, ce qui permet de définir $E \otimes F \otimes H$. Il est immédiat de vérifier que le produit tensoriel est associatif, i.e. que $(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w)$; ainsi, le produit tensoriel d'un nombre quelconque (fini) d'espace vectoriels (de dimensions finies) se définit par une induction associative non commutative.

Un cas important est celui du produit tensoriel de *copies* de E et de son dual E^* : un élément de $(\bigotimes^p E) \otimes (\bigotimes^q E^*) =: \bigotimes^{p,q} E$ est appelé un tenseur de valence (on dit aussi de type) (p, q) sur E. Nous avons vu que toute base $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de E est associée à la base duale $\mathcal{E}' = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ de E^* par les relations en (5) : dans ce cas, les composantes d'un tenseur T de valence (p, q) sur E sont les réels $T^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q}$ t.q :

$$T = T^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_q} \varepsilon_{i_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon_{i_p} \otimes \varepsilon^{j_1} \otimes \cdots \otimes \varepsilon^{j_p}$$

Remarque 4.1. *Soit T un tenseur de valence $(1, 1)$ sur E et $T^i{}_j$ ses composantes relativement à la base $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n)$; alors les $T^i{}_j$ sont aussi les coefficients de la matrice (dans la base $\mathcal{E}$) de l'endomorphisme ψ de E qui à tout vecteur $v = v^i \varepsilon_i$ associe $T^i{}_j v^j \varepsilon_i$, soit encore que*

$$\psi(\varepsilon_j) = T^i{}_j \varepsilon_i$$

La trace d'une matrice $A = (a^i{}_j)$ est le réel $\mathrm{tr}(A) = a^i{}_i$. Cette définition naïve, nous permet d'introduire la contraction d'indices pour les tenseurs : plus précisément, la contraction $[^1{}_1] : \bigotimes^{p,q} E \to \bigotimes^{p-1,q-1} E$ est définie par deux conditions soient, pour tout $v_1, \ldots, v_p \in E$ (resp. $\alpha_1, \ldots \alpha_q \in E^*$) :

$$(\mathbf{CO1}) \ : \ [^1{}_1]\big(v_1 \otimes v_2 \cdots \otimes v_p \otimes \alpha_1 \otimes \alpha_2 \cdots \otimes \alpha_q\big) = \alpha_1(v_1)\big(v_2 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \alpha_q\big)$$

et pour tout $T, S \in \bigotimes^{p,q} E$

$$(\mathbf{CO2}) \ : \ [^1{}_1](T + S) = [^1{}_1](T) + [^1{}_1](S)$$

Si E^* est muni de la base duale de la base choisie pour E et si $T^{i_1 i_2 \cdots i_p}{}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ sont les composantes d'un tenseur $T \in \bigotimes^{p,q} E$, alors la contraction $[^1{}_1]$ de T s'écrit en composantes :

$$[^1{}_1](T)^{i_2 \cdots i_p}{}_{j_2 \cdots j_q} = T^{i i_2 \cdots i_p}{}_{i j_2 \cdots j_q}$$

De même, pour tout $1 \leq r \leq p$ et tout $1 \leq s \leq q$ il est possible de définir la contraction $[^r{}_s] : \bigotimes^{p,q} E \to \bigotimes^{p-1,q-1} E$: il y a donc pq contractions possibles définies sur $\bigotimes^{p,q} E$. Enfin, rappelons que pour E rapporté à une base $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, un tenseur $T \in \bigotimes^{1,1} E$ de composante $T^i{}_j$ est associé à une endomorphisme ψ de E, où $T^i{}_j$ soient les coefficients de la matrice de ψ dans la base $\mathcal{E}$ (c.f. Remarque 4.1) : dans ce cas, l'unique contraction de T s'identifie à un tenseur de $\bigotimes^{0,0} E$, c'est-à-dire à un scalaire : ce scalaire correspond à la trace de ψ.

5. **Variétés différentielles**

5.1. **Cartes et atlas.** Un espace topologique M séparé et à base dénombrable[7] est une variété topologique de dimension n (≥ 1) s'il existe un atlas $\mathfrak{A}$, i.e. une famille de couples $(\mathcal{U}, \boldsymbol{x})$ où chaque $\boldsymbol{x} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ est un homéomorphismes d'un ouvert $\mathcal{U}$ de M sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, t.q. l'ensemble des ouverts $\mathcal{U}$ forme un recouvrement ouvert (localement fini) de M et vérifiant la condition de compatibilité suivante : pour tout $(\mathcal{U}, \boldsymbol{x})$ et $(\mathcal{V}, \boldsymbol{y})$ dans $\mathfrak{A}$ t.q. $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ ne soit pas vide, l'application de *changement de coordonnées* $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y}^{-1}$ de $\boldsymbol{y}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ sur $\boldsymbol{x}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$ est un homéomorphisme. Dans la suite nous supposerons que M est une variété différentielle lisse et orientable, ce qui signifie que tous les homéomorphismes $\boldsymbol{x} \circ \boldsymbol{y}^{-1}$ définis ci-dessus sont des difféomorphismes C^∞ préservant l'orientation de $\mathbb{R}^n$. Nous dirons qu'un couple $(\mathcal{U}, \boldsymbol{x})$ formé d'un ouvert de M et d'une application $\boldsymbol{x} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ est un système de coordonnées sur M lorsque l'ensemble $\mathfrak{A} \cup \{(\mathcal{U}, \boldsymbol{x})\}$ est lui même un atlas de M ; par définition[8] la carte associée à $\boldsymbol{x}$ est l'application $\boldsymbol{X}$ définie sur $\boldsymbol{x}(\mathcal{U})$, à valeur dans M et telle que $\boldsymbol{X} \circ \boldsymbol{x}$ est l'identité de $\mathcal{U}$. Enfin, une partie S de M est une sous-variété différentielle de codimension d, si S est une variété différentielle de dimension $n - d$ et si tout point X de S appartient au domaine d'un système de coordonnées $(\mathcal{U}, \boldsymbol{x})$ de M, de sorte que $\boldsymbol{x}(\mathcal{U} \cap S) = \boldsymbol{x}(\mathcal{U}) \cap (\mathbb{R}^{n-d} \times \{0\}^d)$. Le théorème du plongement de Whitney (1936), nous permet de supposer, sans perte de généralités, que M est une sous-variété de (ou encore plongée dans) l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$ pour un certain $m \geq n$.

5.2. **Vecteurs tangents et dérivations directionnelles.** Soit M une variété (lisse et orientable) de dimension n plongée dans l'espace euclidien[9] $\mathbb{R}^m$. Nous notons $\mathcal{C}^\infty(M)$ l'espace vectoriel des applications $f : M \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur M (i.e. pour tout système de coordonnées $(\mathcal{U}, \boldsymbol{x})$ de carte associée $\boldsymbol{X}$, l'application $f \circ \boldsymbol{X} : \boldsymbol{x}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞ sur $\boldsymbol{x}(\mathcal{U})$ au sens usuel). L'application (lisse) $\gamma : [a\,; b] \to \mathbb{R}^m$ est un chemin de M si son support est inclus dans M et si de plus elle est injective sur[10] $]a\,; b[$; c'est un germe de chemin en X si de plus $a < 0 < b$ avec $\gamma(0) = X$. Par définition l'espace tangent en X est l'ensemble $T_X M$ formé des dérivées en $t = 0$ (au sens du calcul différentiel dans $\mathbb{R}^m$) des germes de chemin de M en X. Par la structure de variété différentielle de M, chaque $T_X M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ de dimension n ; si maintenant, $t \mapsto \gamma_1(t)$ et $t \mapsto \gamma_2(t)$ sont deux germes de chemin en X, dont les dérivées en $t = 0$ sont toutes les

7. Un espace topologique est dit séparée lorsqu'il possède un sous ensemble dénombrable et dense ; il est à base dénombrable si chacun de ses points possède une base de voisinage dénombrable.

8. Convention non universelle utilisée par Adrien Douady.

9. Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^m$ sera toujours noté $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

10. Le support $\gamma([a\,; b])$ de γ est une sous variété de M qui est lisse dès que $\gamma(a) \neq \gamma(b)$ (dans le cas où $\gamma(a) = \gamma(b)$ il faut regarder de plus près).

deux égales au vecteur v alors, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, chaque application $f \circ \gamma_i$ est C^∞ sur un voisinage de 0 et les dérivées de $f \circ \gamma_1(t)$ et $f \circ \gamma_1(t)$ prennent une valeur commune en $t = 0$ notée $v(f)$: cette valeur s'interprète comme la dérivée directionnelle de f suivant le vecteur tangent v. Il est facile de vérifier que l'application $v(\cdot) : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ est une dérivation en X, en ce sens qu'elle vérifie la règle de dérivation de Leibniz en X soit, pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$v(fg) = v(f)g(X) + f(X)v(g) \tag{9}$$

Le fibré tangent TM est l'union disjointe $\coprod_X T_X M$ des espaces tangents : c'est un sous-ensemble de la grassmannienne [11] $\mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^m)$. Soit V une section du fibré tangent, i.e. une application $V : X \mapsto V|_X$ de M dans TM t.q. $V|_X \in T_X M$; pour $f : M \to \mathbb{R}$, la valeur de l'application $V(f) : M \to \mathbb{R}$ prise en X est définie comme la dérivation directionnelle $V|_X(f)$ de f suivant $V|_X$: alors la section V est dite C^∞ si $V(f) \in \mathcal{C}^\infty(M)$ dès que $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$: c'est par définition un champ de vecteurs sur M. Nous notons $\mathfrak{T}_0^1(TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M (la notation sera généralisée avec l'introduction des champs de tenseurs : c.f. § 4) : il est facile de vérifier que $\mathfrak{T}_0^1(TM)$ forme un espace vectoriel. De plus, pour tout $V \in \mathfrak{T}_0^1(TM)$, l'application $V(\cdot) : f \mapsto V(f)$ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^\infty(M)$: on déduit alors de (9) que l'application $V(\cdot) : \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ est une dérivation, en ce sens qu'elle vérifie la formule de dérivation de Leibniz soit, pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$V(fg) = V(f)g + fV(g) \tag{10}$$

Les dérivations sur M – i.e. les endomorphismes de $\mathcal{C}^\infty(M)$ satisfaisant l'identité de Leibnitz – forment un espace vectoriel. L'application $V \mapsto V(\cdot)$, qui a un champ de vecteurs associe la dérivation correspondante, est une application linéaire injective (il est facile de vérifier que $V(f) = 0$ pour tout f entraîne que V est le champ nul). Dans la suite nous identifierons toujours un champ de vecteurs V avec la dérivation $V(\cdot)$: ainsi, pour tout $X \in M$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, la notation $V|_X$ (resp. $V|_X(f)$) désigne un élément de $T_X M$ et donc un vecteur de $\mathbb{R}^m$ (resp. un réel qui représente la dérivée directionnelle de f suivant $V|_X$) alors que $V(f) : X \mapsto V|_X(f)$ est un élément de $\mathcal{C}^\infty(M)$. Pour légitimer complètement cette identification il faut montrer que la correspondance $V \mapsto V(\cdot)$ entre champs de vecteurs et dérivations, est un isomorphisme d'espace vectoriel (le point difficile concernant la surjectivité de l'application $V \mapsto V(\cdot)$ est levée par le Lemme d'Hadamard [12]).

5.3. **Base holonôme d'un système de coordonnées.** Soit $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Étant donné $(\mathcal{U}, \boldsymbol{x})$ un système de coordonnées de M et $X \in \mathcal{U}$ nous notons $\partial_i|_X$ le vecteur de $T_X M$ associé au germe de chemin $\gamma_i : t \mapsto \boldsymbol{X}\big(\boldsymbol{x}(X) + t\mathbf{e}_i\big)$, où $\boldsymbol{X} : \boldsymbol{x}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}^m$ est la carte associée à $\boldsymbol{x}$. L'application $\partial_i : X \mapsto \partial_i|X$ est un champ de vecteurs défini

11. La grassmannienne $\mathrm{Gr}_n(\mathbb{R}^m)$ est ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension n de $\mathbb{R}^m$.
12. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ étoilé en $X = (x_1, \ldots, x_n)$. Alors, pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{U}$,

$$f(Y) - f(X) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f\big(X + t(Y - X)\big)dt = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(X + t(Y - X)\big)dt$$

Si $f_i(Y) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(X + t(Y - X)\big)dt$, alors (théorème de dérivation sous le signe intégral) les applications $Y \mapsto f_i(Y)$ sont localement C^∞ en $X = 0$ et nous pouvons écrire : $f(Y) = f(X) + \sum_{i=1}^n \big(y_i - x_i\big) f_i(Y)$

sur[13] $\mathcal{U}$: c'est le i-ème champ holonôme associée à $(\mathcal{U}, \boldsymbol{x})$. Le fait que $(\partial_1|_X, \ldots, \partial_n|_X)$ soit une base de $T_X M$ pour tout $X \in \mathcal{U}$, entraîne que $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ est une base du $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$-module des champs de vecteurs sur $\mathcal{U}$. En d'autres termes, tout champ $V \in \mathfrak{T}_0^1(TM)$ est associé à n-applications $V^i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ et t.q.[14] $V = V^i \partial_i$ (identité valable sur $\mathcal{U}$). On dira que $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ est la base holonôme des $\mathcal{U}$-champs de vecteurs pour le système de coordonnées $(\mathcal{U}, \boldsymbol{x})$. Supposons que $(\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^n)$ soient les composantes cartésiennes de $\boldsymbol{x}$, en ce sens que $\boldsymbol{x}(X) = \boldsymbol{x}^i(X)\mathrm{e}_i$, pour tout $X \in \mathcal{U}$. Alors $(\boldsymbol{x}^1(X), \ldots, \boldsymbol{x}^n(X))$ sont appelées les coordonnées locales de X pour le système de coordonnées $(\mathcal{U}, \boldsymbol{x})$: en vue des formules de changement de bases holonômes il sera avantageux de noter

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^i}$$

de sorte que $\partial_i(f) = \partial f / \partial \boldsymbol{x}^i$, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. De plus, si $\hat{f} := f \circ \boldsymbol{X}$, alors il y a une identification entre ∂_i et la dérivation partielle (au sens usuel du calcul différentiel sur $\boldsymbol{x}(\mathcal{U})$) et qui se traduit par l'identité $\partial_i|_X(f) = \partial \hat{f} / \partial x^i$, dès que $\boldsymbol{x}(X) = (x^1, \ldots, x^n)$.

5.4. **Courbes intégrales d'un champ de vecteurs.** Soit V un champ de vecteurs sur une variété M de dimension n, supposée plongée dans $\mathbb{R}^m$. Alors pour tout $X \in M$, il existe une unique courbe intégrale maximale $t \mapsto \phi_V^t(X) \in M$ i.e. un chemin sur M définie sur un intervalle ouvert I_X contenant 0, maximal pour l'inclusion et t.q

$$\phi_V^0(X) = X \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\phi_V^t(X) = V|_{\phi_V^t(X)} \tag{11}$$

la dernière identité ayant lieu pour tout $t \in I_X$. (En particulier le flot (maximal) $t \mapsto \phi_V^t(X)$ d'un champ de vecteur V en X est un germe de chemin en X.) Considérons maintenant que $Y := \phi_V^s(X)$ pour $s \in I_X$ donné. Alors (exercice) $t \mapsto \phi_V^{t+s}(X)$ est la solution maximale du problème de Cauchy en Y avec $I_Y = I_X - s$. Par suite (unicité du problème de Cauchy) il vient $\phi_V^{t+s}(X) = \phi_V^t(Y)$ pour tout $t \in I_Y$, soit encore :

$$\phi_V^{t+s}(X) = \phi_V^t(\phi_V^s(X)) \tag{12}$$

L'identité (12) est la propriété (locale) de coclycle des courbes intégrales de V. Le champ de vecteurs V est dit complet si et seulement si $I_X = \mathbb{R}$, pour tout $X \in M$. Du fait que $I_{\phi_V^s(X)} = (I_X - s)$ dès que $s \in I_X$, la complétude de V est équivalente à l'existence d'un $\varepsilon > 0$ t.q. $I_X \supset]-\varepsilon\,;\varepsilon[$, pour tout $X \in M$. Notons que si V est complet, (12) assure que l'ensemble $\{\phi_V^t(\cdot)\,;\, t \in \mathbb{R}\}$ réalise un groupe de difféomorphismes (de M) à un paramètre.

Le théorème d'existence et d'unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy (sur un ouvert d'un espace vectoriel euclidien) s'adapte au cas des courbes intégrales d'un champ de vecteurs défini sur une variété M plongée dans $\mathbb{R}^m$. Pour voir cela on peut résoudre le problème en coordonnées locales, ou encore supposer que le champ de vecteur est (au moins localement) la restriction à M d'un champ de vecteurs défini sur un voisinage ouvert de M.

13. Ce n'est pas un champ de vecteurs sur M, puisque la définition de ∂_i dépend du système de coordonnées $(\mathcal{U}, \boldsymbol{x})$ et que donc $\partial_i|_X$ n'est définie que pour $X \in \mathcal{U}$.

14. Nous utilisons ici les notations d'Einstein, de sorte que $V^i \partial_i = \sum_i V^i \partial_i$.

6. Crochet de Lie de deux champs de vecteurs

6.1. **Crochet de lie comme dérivation.** Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $[\cdot,\cdot] : E\times E \to E$ une application bilinéaire : l'algèbre $(E,[\cdot,\cdot])$ est appelée une algèbre de Lie lorsque l'application bilinéaire $[\cdot,\cdot]$ est un crochet de Lie, c'est-à-dite qu'elle est antisymétrique (i.e. $[u,v]=-[v,u]$) et satisfait l'identité de Jacobi en ce sens que

$$[u,[v,w]]+[w,[u,v]]+[v,[w,u]]=0 \tag{13}$$

(Lorsqu'il est non nul, le crochet de Lie n'est ni commutatif ni associatif [15].) Le modèle des algèbres de Lie est l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ où le crochet de Lie est le produit vectoriel $[u,v]=u\times v$. Nous allons voir que l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur une variété M est naturellement munie d'un crochet de Lie. Soient en effet U et V deux champs de vecteurs sur M et tout pour $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$ posons

$$[U,V](f):=U\big(V(f)\big)-V\big(U(f)\big)$$

Il est clair que $f\mapsto[U,V](f)$ est un endomorphisme linéaire de $\mathcal{C}^\infty(M)$. Pour montrer que $[U,V]$ est un champ de vecteurs il reste donc à vérifier la règle de Leibniz : si g est une autre fonction de $\mathcal{C}^\infty(M)$, alors

$$\begin{aligned}[U,V](fg)&=U[V(fg)]-V[U(fg)]\\&=\Big(U\Big[V(f)g+fV(g)\Big]\Big)-\Big(V\Big[U(f)g+fU(g)\Big]\Big)\\&=\Big(U[V(f)]g+V(f)U(g)+U(f)V(g)+fU[V(g)]\Big)-\\&\qquad\Big(V[U(f)]g+U(f)V(g)+V(f)U(g)+fV[U(g)]\Big)\\&=\Big(U[V(f)]-V[U(f)]\Big)g+f\Big(U[V(g)]-V[U(g)]\Big)\end{aligned}$$

soit encore $[U,V](fg)=[U,V](f)g+f[U,V](g)$. D'autre part, il est aussi facile de vérifier que $[\cdot,\cdot]:\mathfrak{T}^1_0(TM)\times\mathfrak{T}^1_0(TM)\to\mathfrak{T}^1_0(TM)$ est une application bilinéaire qui satisfait l'identité de Jacobi et réalise donc un crochet de Lie sur $\mathfrak{T}^1_0(TM)$.

Proposition 6.1. *$(\mathfrak{T}^1_0(TM),[\cdot,\cdot])$ est une algèbre de Lie ; lorsque le corchet de Lie $[U,V]$ des deux champs de vecteurs U et V is identiquement nul, on dit que U et V commutent.*

Le crochet de Lie $[U,V]$ de deux champs de vecteurs est un champ de vecteurs qui mesure le degré de non-commutativité des deux champs en question : le sens de cette affirmation vient essentiellement du Lemme de Schwarz. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ – muni de sa structure euclidienne et rapporté à la base canonique $(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$; rappelons que si $f=f(x^1,\ldots,x^n):\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ est de classe C^2, alors l'identité de commutation entre dérivées partielles affirme que pour tout $1\le i,j\le n$

$$(*)\quad \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right).$$

Il est possible d'interpréter cette identité en terme de crochet de Lie en écrivant

$$(*)\iff[\partial_i,\partial_j]=0$$

15. Suivant certaines définitions, et à cause de la non associativité du crochet de Lie, une algèbre de Lie peut ne pas être considérée comme une algèbre au sens strict.

Ici, nous notons $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ la base holonôme du système de coordonnées triviale de l'ouvert $\mathcal{U}$ (i.e. l'identité de $\mathcal{U}$) de sorte que $\partial_i|_X = \mathbf{e}_i$, pour tout $X \in \mathcal{U}$. *En général* le crochet de Lie $[V, U]$ est non nul : on peut voir cela avec des champs de vecteurs sur l'ouvert $\mathcal{U}$: dans ce cas, nous profitons du fait l'espace vectoriel $\mathfrak{T}_0^1(T\mathcal{U})$ des champs de vecteurs sur $\mathcal{U}$ est un $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$-module de dimension n dont une base est la base holonôme $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$. Si $U = U^i\partial_i$ et $V = V^i\partial_i$ sont deux champs de vecteurs sur $\mathcal{U}$ alors d'une part

$$\begin{aligned} U(V) = \left(U^i\partial_i\right)\left(V^j\partial_j\right) &= U^i\partial_i\left(V^j\partial_j\right) \\ &= U^i\Big(\partial_i(V^j)\partial_j + V^j\partial_{ij}\Big) = U^i\partial_i(V^j)\partial_j + U^iV^j\partial_{ij} \end{aligned}$$

Comme d'autre part $V(U) = V^i\partial_i(U^j)\partial_j + V^iU^j\partial_{ij}$, nous déduisons du Lemme de Schwarz que la i-ème composante du crochet $[U, V]$ est $U^i\partial_i(V^j) - V^i\partial_i(U^j)$.

Proposition 6.2. *Soient U, V deux champs de vecteurs dont les composantes (en coordonnées) sont respectivement U^i et V^i : alors les composantes de $[U, V]$ sont*

$$[U, V] = \Big(U^i\partial_i(V^j) - V^i\partial_i(U^j)\Big)\partial_j \tag{14}$$

6.2. **Interprétation géométrique du crochet de Lie.** Supposons que la variété M coïncide avec un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et que $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^m)$ est le système de coordonnées cartésiennes (i.e. $\partial_i = \partial/\partial\boldsymbol{x}^i = \mathbf{e}_i$). Étant donnés un point X de M fixé et $U = U^i\mathbf{e}_i$ un champ de vecteurs sur M, la courbe intégrale $t \mapsto \phi_U^t(X)$ de U issue de X est déterminée comme l'unique solution en $\varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^m)$ du problème de Cauchy :

$$(\forall k) \quad \frac{d\varphi^k}{dt} = U^k(\varphi(t)) \quad \text{avec} \quad \varphi(0) = X \tag{15}$$

Le développement de Taylor de w en 0 au second ordre s'écrit

$$(\forall k) \quad \varphi^k(t) = w(0) + t\frac{d\varphi^k}{dt}(0) + \frac{t^2}{2}\frac{d^2\varphi^k}{dt^2}(0) + \mathcal{O}(t^3) \tag{16}$$

Or (méthode d'Euler) d'après (15) nous avons la condition initiale $y(0) = X$, de sorte que pour $t = 0$ l'équation différentielle entraîne que

$$\frac{d\varphi^k}{dt}(0) = U^k(X) \quad \text{et} \quad \frac{d^2\varphi^k}{dt^2}(0) = \frac{\partial U^k}{\partial\boldsymbol{x}^i}(X)\frac{d\varphi^i}{dt} = U^i(X)\frac{\partial U^k}{\partial\boldsymbol{x}^i}(X)$$

Soit alors ε (suffisamment petit) et notons $H = \phi_U^\varepsilon(X)$: alors, d'après (16)

$$H^k = X^k + \varepsilon U^k(X) + \frac{\varepsilon^2}{2}U^i(X)\frac{\partial U^k}{\partial\boldsymbol{x}^i}(X) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{17}$$

Si maintenant $t \mapsto \phi_V^t(H)$ est la courbe intégrale d'un deuxième champ de vecteurs $V = V^i\mathbf{e}_i$ (issue du point H), alors en notant $I := \phi_V^\varepsilon(H)$, il vient (au second ordre en ε) :

$$I^k = H^k + \varepsilon V^k(H) + \frac{\varepsilon^2}{2}V^i(H)\frac{\partial V^k}{\partial\boldsymbol{x}^i}(H) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

Pour nous ramener en X, nous utilisons (17) pour la valeur de H^k mais nous avons aussi,

$$\varepsilon V^k(H) = \varepsilon V^k\Big(X + \varepsilon U^i(X)\mathbf{e}_i\Big) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = \varepsilon V^k(X) + \varepsilon^2 U^i(X)\frac{\partial V^k}{\partial\boldsymbol{x}^i}(X) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

et enfin

$$\frac{\varepsilon^2}{2}V^i(H)\frac{\partial V^k}{\partial\boldsymbol{x}^i}(H) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = \frac{\varepsilon^2}{2}V^i(X)\frac{\partial V^k}{\partial\boldsymbol{x}^i}(X) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

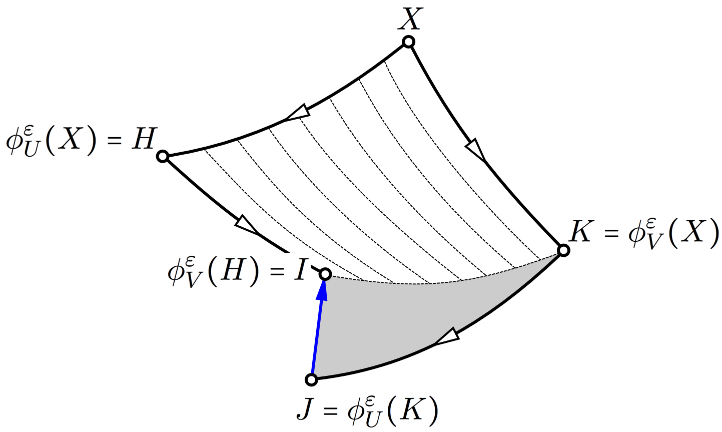

FIGURE 2. *Soient $t \mapsto \phi_U^t(X)$ et $t \mapsto \phi_V^t(X)$ les courbes intégrales respectives de deux champs de vecteurs U et V issues d'un point X quelconque de M. Si $H := \phi_U^\varepsilon(X)$ et $I := \phi_V^\varepsilon(H)$ (resp. $K := \phi_V^\varepsilon(X)$ et $I := \phi_U^\varepsilon(J)$), alors l'approximation $I \approx J$ à lieu au premier ordre en ε, mais n'a pas lieu au second ordre en ε (du moins, si U et V ne commutent pas). Dans tous les cas le défaut géométrique de commutation des champs U et V se traduit par un troisième champ, i.e. le crochet de Lie $[U,V]$ de sorte qu'en X (et pour ε suffisamment petit) :*

$$I - J = \phi_V^\varepsilon \circ \phi_U^\varepsilon(X) - \phi_U^\varepsilon \circ \phi_V^\varepsilon(X) = \varepsilon^2 [U,V]|_X + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

En regroupant ces développements nous obtenons (à partir de X et au second ordre en ε) :

$$\begin{aligned} I^k &= X^k + \varepsilon U^k(X) + \frac{\varepsilon^2}{2} U^i(X) \frac{\partial U^k}{\partial \boldsymbol{x}^i}(X) \\ &\quad + \varepsilon \left(V^k(X) + \varepsilon U^i(X) \frac{\partial V^k}{\partial \boldsymbol{x}^i}(X) \right) + \frac{\varepsilon^2}{2} V^i(X) \frac{\partial V^k}{\partial \boldsymbol{x}^i}(X) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} I^k &= X^k + \varepsilon\big(U^k(X) + V^k(X)\big) \\ &\quad + \varepsilon^2 U^i(X) \frac{\partial V^k}{\partial \boldsymbol{x}^i}(X) \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(U^i(X) \frac{\partial U^k}{\partial \boldsymbol{x}^i}(X) + V^i(X) \frac{\partial V^k}{\partial \boldsymbol{x}^i}(X) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{18}$$

En notant $K := \phi_V^\varepsilon(X)$ et $J = \phi_U^\varepsilon(K)$, nous obtenons de manière symétrique

$$\begin{aligned} J^k &= X^k + \varepsilon\big(V^k(X) + U^k(X)\big) \\ &\quad + \varepsilon^2 V^i(X) \frac{\partial U^k}{\partial \boldsymbol{x}^i}(X) \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(V^i(X) \frac{\partial V^k}{\partial \boldsymbol{x}^i}(X) + U^i(X) \frac{\partial U^k}{\partial \boldsymbol{x}^i}(X) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{19}$$

et par suite

$$I^k - J^k = \varepsilon^2 \left(U^i(X) \frac{\partial U^k}{\partial \boldsymbol{x}^i}(X) - V^i(X) \frac{\partial V^k}{\partial \boldsymbol{x}^i}(X) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

En reconnaissant les composantes du crochet de Lie de U et V (c.f. (6.2) in Proposition 14) et compte tenu des définitions des points I et J (de $\mathbb{R}^m$), nous pouvons finalement écrire :

$$\phi_V^\varepsilon \circ \phi_U^\varepsilon(X) - \phi_U^\varepsilon \circ \phi_V^\varepsilon(X) = \varepsilon^2 [U,V]|_X + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{20}$$

Pour étendre (20) au cas des variétés, supposons maintenant que M est une variété de dimension n plongée dans $\mathbb{R}^m$ et que U et V sont deux champs de vecteurs définies M. Alors, pour tout $X \in M$, il existe un voisinage de X (dans $\mathbb{R}^m$) pour lequel les champs de vecteurs U et V sont les restrictions à M de champs de vecteurs définis sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$: cela nous permet d'énoncer la proposition suivante.

Proposition 6.3. *Soient M une variété de dimension n plongée dans $\mathbb{R}^m$ et V et U deux champs de vecteurs sur M ; si $t \mapsto \phi_U^t(X)$ et $t \mapsto \phi_V^t(X)$ désignent respectivement les courbes intégrales de U et V issues d'un point X quelconque de M, alors pour tout ε suffisamment petit :*

$$\phi_V^\varepsilon \circ \phi_U^\varepsilon(X) - \phi_U^\varepsilon \circ \phi_V^\varepsilon(X) = \varepsilon^2 [U,V]|_X + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{21}$$

7. Champs de tenseurs sur une variété

7.1. **Changements de bases holonômes et co-holonômes.** Soit M une variété de dimension n (plongée dans $\mathbb{R}^m$). Soit $(\partial_1, \dots, \partial_n)$ la base holonôme des coordonnées $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^n)$. Rappelons que nous écrivons aussi $\partial_i = \partial/\partial \boldsymbol{x}^i$, cette notation ayant l'avantage de faire apparaître les composantes cartésiennes $\boldsymbol{x}^i$ du système de coordonnées en question ; elle est aussi très utilise pour traiter la question des changements de coordonnées, un point essentiel du calcul tensoriel. En effet, si $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{\boldsymbol{x}}^1, \dots, \hat{\boldsymbol{x}}^n)$ est un deuxième système de coordonnées locales dont le domaine intersecte celui de $\boldsymbol{x}$, alors nous avons (dans l'intersection des domaines de $\boldsymbol{x}$ et $\hat{\boldsymbol{x}}$) :

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} = \frac{\partial \boldsymbol{x}^a}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^a} \tag{22}$$

Le changement de base holonômes est une traduction de l'expression du jacobien du difféomorphisme de changement de système de coordonnées qui donne l'identité

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^a}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial \boldsymbol{x}^c} = \delta^a{}_c$$

D'autre part, si $T_X^* M$ désigne le dual de $T_X M$ (i.e. l'espace des formes linéaires sur $T_X M$), la base co-holonôme $(d\boldsymbol{x}^1|_X, \dots, d\boldsymbol{x}^n|_X)$ des coordonnées locales $\boldsymbol{x}$ au point X, est la base de $T_X^* M$ associée par dualité à la base holonôme correspondante, avec :

$$d\boldsymbol{x}^i|_X \left(\left. \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^j} \right|_X \right) = \delta^i{}_j$$

On vérifie alors que si $(d\hat{\boldsymbol{x}}^1, \dots, d\hat{\boldsymbol{x}}^n)$ est la base co-holonôme des coordonnées locales $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{\boldsymbol{x}}^1, \dots, \hat{\boldsymbol{x}}^n)$ alors les formules de changement de bases co-holonôme s'écrivent [16]

$$\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}{\partial \boldsymbol{x}^a} \mathrm{d}\boldsymbol{x}^a \tag{23}$$

16. La formule de changement co-holonôme est formellement consistante, mais il est instructif de la vérifier rigoureusement : ainsi, avec le changement de base $\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha = \theta^\alpha{}_a \mathrm{d}\boldsymbol{x}^a$, il vient :

$$\delta^\beta{}_\alpha = \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} \right) = \theta^\alpha{}_b \mathrm{d}\boldsymbol{x}^b \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^b} \right) = \theta^\alpha{}_b \frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} \mathrm{d}\boldsymbol{x}^b \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^b} \right) = \theta^\alpha{}_b \frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}$$

ce qui signifie que $(\theta^\alpha{}_b)$ est la matrice inverse de $(\partial \boldsymbol{x}^b / \partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta)$, c'est à dire que $\theta^\alpha{}_b = \partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta / \partial \boldsymbol{x}^b$.

7.2. **Champ de tenseurs.** Par définition $\mathfrak{T}^p_q(TM)$ est l'espace vectoriel des champs de tenseurs de valence (p,q) sur M : plus précisemment, un élément F de $\mathfrak{T}^p_q(TM)$ est une section $\mathcal{C}^\infty$ du fibré vectoriel $\coprod_X \otimes^{p,q} T_X M$ qui s'exprime dans chaque système de coordonnées $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^n)$ en écrivant

$$F = F^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{i_p}} \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{j_p}$$

et où les $F^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}$ sont les $\boldsymbol{x}$-composantes de F. Notons que $\mathfrak{T}^1_0(TM)$ correspond à l'espace des champs de vecteurs sur M (ce qui explique notre choix de notation initial du § 5.2) et que $\mathfrak{T}^0_1(TM)$ est l'espace des champs de covecteurs sur M, i.e. des 1-formes. Par convention nous noterons $\mathfrak{T}^0_0(TM)$ l'espace $\mathcal{C}^\infty(M)$ des champs scalaires sur M.

En pratique, il y a deux conditions qui caractérisent les champs de tenseurs. Il y a d'abord une condition de régularité : le tenseur $F|_X$ s'identifie à une forme multilinéaire t.q. pour tout $\boldsymbol{V} \in \times_1^p \mathfrak{T}^1_0(TM)$ et $\boldsymbol{\xi} \in \times_1^q \mathfrak{T}^0_1(TM)$ fixés, l'application

$$X \mapsto F|_X\big(\boldsymbol{V}|_X, \boldsymbol{\xi}|_X\big)$$

est de classe C^∞ sur M. La deuxième condition concerne la compatibilité [17] de l'expression du champ de tenseur relativement au coordonnées locales. C'est une généralisation de la formule des changements de bases holonômes/co-holonômes en (22) et (23) : si $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{\boldsymbol{x}}^1, \dots, \hat{\boldsymbol{x}}^n)$ est un deuxième système de coordonnées locales alors

$$\begin{aligned} F &= F^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{i_p}} \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{j_p} \\ &= \left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^{r_1}}{\partial \boldsymbol{x}^{i_1}} \cdots \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^{r_p}}{\partial \boldsymbol{x}^{i_p}} \frac{\partial \boldsymbol{x}^{j_1}}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^{s_1}} \cdots \frac{\partial \boldsymbol{x}^{j_q}}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^{s_q}} F^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q} \right) \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^{r_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^{r_p}} \otimes \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}^{s_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}^{s_p} \end{aligned}$$

Par suite, si $\hat{F}^{r_1\cdots r_p}{}_{s_1\cdots s_q}$ sont les $\hat{\boldsymbol{x}}$-composantes de F, alors :

$$\hat{F}^{r_1\cdots r_p}{}_{s_1\cdots s_q} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^{r_1}}{\partial \boldsymbol{x}^{i_1}} \cdots \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^{r_p}}{\partial \boldsymbol{x}^{i_p}} \frac{\partial \boldsymbol{x}^{j_1}}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^{s_1}} \cdots \frac{\partial \boldsymbol{x}^{j_q}}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^{s_q}} F^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q} \tag{24}$$

Regardons deux exemples importants. Si V est un champ de vecteurs qui s'écrit $V = V^i \partial/\partial \boldsymbol{x}^i$ dans la base holonôme d'un système de coordonnées $\boldsymbol{x}$, alors les composantes V^i de V dans ce système de coordonnées sont les composantes (contravariantes) de V en tant que tenseur. Si $V = \hat{V}^j \partial/\partial \hat{\boldsymbol{x}}^j$ dans les coordonnées d'un autre système de coordonnées $\hat{\boldsymbol{x}}$, alors le changement de bases holonômes (22) donne

$$V = V^i \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^i} = V^i \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^j}{\partial \boldsymbol{x}^i} \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^j} \quad \text{soit} \quad \hat{V}^j = V^i \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^j}{\partial \boldsymbol{x}^i}$$

Notons encore que l'espace des p-formes différentielles s'identifie à $\mathfrak{T}^0_p(TM)$. Ainsi, en partant (par exemple) de l'expression d'une 2-forme ξ dans les coordonnées locales de $\boldsymbol{x}$, nous obtenons son expression dans les coordonnées de $\hat{\boldsymbol{x}}$, en écrivant

$$\xi = \xi_{ab} \mathrm{d}\boldsymbol{x}^a \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^b = \xi_{ab} \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}^a}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha \right) \otimes \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}^\beta \right) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{x}^a}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} \xi_{ab} \right) \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha \otimes \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}^\beta$$

17. On parle aussi (Einstein, Weinberg,...) de propriété de covariance (avec une ambiguité relativement à la dualité covariant/contravariant des tenseurs) : ainsi un opérateur différentiel qui est covariant est un champ de tenseur.

Si nous notons $\hat{\xi}_{\alpha\beta}$ les composantes de ξ dans les coordonnées locales de $\hat{\boldsymbol{x}}$ alors :

(25)
$$\hat{\xi}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \boldsymbol{x}^a}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} \frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} \xi_{ab}$$

Le lemme suivant est très important en pratique.

Proposition 7.1. *Soient M une variété de dimension n et F une forme multilinéaire définie sur*

$$\left(\times_1^p \mathfrak{T}_1^0(TM) \right) \times \left(\times_1^q \mathfrak{T}_0^1(TM) \right)$$

Alors F est un champ de tenseurs (p,q) si et seulement si F est $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilinéaire (i.e. $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire suivant chacune des $p+q$ entrées de F).

Preuve. Par définition, si F est un champ de tenseurs (p,q) alors F est $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilinéaire. Pour la réciproque, considérons – pour simplifier – le cas $p = q = 1$ et notons ${F^a}_b$ les composantes de F dans un système de coordonnées $\boldsymbol{x}$: il s'agit de vérifier la formule de compatibilité tensorielle lors du passage du système de coordonnées $\boldsymbol{x}$ à un autre système $\hat{\boldsymbol{x}}$ (dont le domaine intersecte celui de $\boldsymbol{x}$). Pour voir cela, soit $(\xi, V) \in \mathfrak{T}_1^0(TM) \times \mathfrak{T}_0^1(TM)$: alors, en utilisant la $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéarité de F, la définition de ${F^b}_a$ et les formules de changement de base holonôme et co-holonôme dans (22) et (23) appliquées à V et ξ respectivement, il vient avec $\xi = \xi_b \mathrm{d}\boldsymbol{x}^b = \hat{\xi}_\beta \mathrm{d}\hat{\boldsymbol{x}}^\beta$ et $V = V^a \partial/\partial \boldsymbol{x}^a = \hat{V}^\alpha \partial/\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha$:

$$\begin{aligned} F(\xi, V) = F\left(\xi_b \mathrm{d}\boldsymbol{x}^b, V^a \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^a}\right) &= \xi_b V^a F\left(\mathrm{d}\boldsymbol{x}^b, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^a}\right) \\ &= \xi_b V^a {F^b}_a \\ &= \left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial \boldsymbol{x}^b} \hat{\xi}^\beta\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}^a}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} \hat{V}^\alpha\right) {F^b}_a = \hat{\xi}^\beta \hat{V}^\alpha \left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial \boldsymbol{x}^b} \frac{\partial \boldsymbol{x}^a}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} {F^b}_a\right) \end{aligned}$$

Ainsi, par définition des coefficients ${\hat{F}^\beta}_\alpha$ de F dans les coordonnées de $\hat{\boldsymbol{x}}$, nous obtenons la propriété de compatibilité des tenseurs $(1,1)$, soit

(26)
$$ {\hat{F}^\beta}_\alpha = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial \boldsymbol{x}^b} \frac{\partial \boldsymbol{x}^a}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} {F^b}_a$$

□

Corollaire 7.2. *Soient M une variété de dimension n et $F : \times_1^p \mathfrak{T}_0^1(TM) \to \mathfrak{T}_0^1(TM)$ une application multilinéaire et pour tout système $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^n) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de coordonnées locales, soient ${F^j}_{i_1 \ldots i_p} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ les applications t.q.*

(27)
$$F\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{i_p}}\right) = {F^j}_{i_1 \ldots i_p} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^j}$$

Alors les ${F^j}_{i_1 \ldots i_p}$ sont les composantes d'un champ de tenseurs $(1,q)$ si et seulement si F est $\mathcal{C}^\infty(M)$-multilinéaire (i.e. $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire sur les p entrées de F).

Remarque 7.3. *Nous verrons (c.f. Définition 8.1 infra) qu'une connexion sur une variété M est une application bilinéaire $\boldsymbol{D} : \mathfrak{T}_0^1(TM) \times \mathfrak{T}_0^1(TM) \to \mathfrak{T}_0^1(TM)$ qui est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire suivant la première entrée, mais vérifiant une règle de Leibnitz sur la seconde entrée : plus précisément, si U et V sont deux champs de vecteurs sur M et si $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, alors*

$$\boldsymbol{D}(U, fV) = U(f)V + f\boldsymbol{D}_U(V)$$

Si g est une structure riemanienne sur M (c.f. § 9), alors l'application (c.f. Formule de Koszul en (48))

$$(U,V,W) \mapsto g\big(\boldsymbol{D}(U,V),W\big)$$

est une forme trilinéaire sur $\mathfrak{T}^1_0(TM)$, mais ce n'est pas un tenseur $(0,3)$.

8. Dérivations covariantes et connexions

La variété M est de dimension n, plongée isométriquement dans $\mathbb{R}^m$ et nous considérons que $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^1,\dots,\boldsymbol{x}^n)$ est un système de coordonnées locales donné. Si f est un champ scalaire sur M, alors les dérivées partielles $\partial f/\partial \boldsymbol{x}^\mu$ sont les composantes d'un tenseur $(0,1)$ (nous verrons ci-après qu'il s'agit du gradient covariant de f) : en effet, si $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{\boldsymbol{x}}^1,\dots,\hat{\boldsymbol{x}}^n)$ est une autre système de coordonnées locales, alors la formule de la dérivée des fonctions composées donne directement la compatibilité tensorielle, i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\nu} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}^\mu}\frac{\partial \boldsymbol{x}^\mu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\nu}$$

Maintenant, si V est un champ de vecteurs de $\boldsymbol{x}$-composantes V^μ alors les $\partial V^\nu/\partial \boldsymbol{x}^\mu$ ne sont pas les composantes d'un tenseur $(1,1)$: en effect, si $V = \hat{V}^\mu$ sont les composantes de V dans une autre système $\hat{\boldsymbol{x}}$ de coordonnées locales, alors

$$V^\mu\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^\mu} = V = \hat{V}^\alpha\frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} = \hat{V}^\alpha\frac{\partial \boldsymbol{x}^\mu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^\mu} \quad \text{i.e.} \quad \hat{V}^\alpha\frac{\partial \boldsymbol{x}^\mu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} = V^\mu$$

Par suite

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial \boldsymbol{x}^\nu}\frac{\partial \boldsymbol{x}^\nu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} = \frac{\partial V^\mu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} = \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\left(\hat{V}^\alpha\frac{\partial \boldsymbol{x}^\mu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\right) = \frac{\partial \hat{V}^\alpha}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial \boldsymbol{x}^\mu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} + \hat{V}^\alpha\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^\mu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}$$

et finalement

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial \boldsymbol{x}^\nu} = \frac{\partial \hat{V}^\alpha}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial \boldsymbol{x}^\mu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial \boldsymbol{x}^\nu} + \hat{V}^\alpha\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^\mu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial \boldsymbol{x}^\nu} \tag{28}$$

Le deuxième terme de cette dernière somme n'étant pas nul, les $\partial V^\mu/\partial \boldsymbol{x}^\nu$ ne sont pas les composantes d'un tenseur $(1,1)$. Grâce à la notion de connexion, nous allons voir comment, pour tout système de coordonnées locales $\boldsymbol{x}$, chaque dérivation partielle $\partial/\partial \boldsymbol{x}^\nu$ peut être *corrigée* [18] en une dérivation partielle covariante [19] soit D_ν, de sorte que les $D_\nu(V^\mu)$ constituent les composantes d'un tenseur.

Définition 8.1. *Soit M une variété différentielle de dimension n ; une connexion (affine) sur M est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire $(U,V) \mapsto \boldsymbol{D}_U(V)$ de $\mathfrak{T}^1_0(TM) \times \mathfrak{T}^1_0(TM)$ dans $\mathfrak{T}^1_0(TM)$ t.q. pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ et U,V deux champs de vecteurs quelconques :*

$$\boldsymbol{D}_{fU}(V) = f\boldsymbol{D}_U(V) \tag{29}$$

$$\boldsymbol{D}_U(fV) = \mathrm{U}(f)V + f\boldsymbol{D}_U(V) \tag{30}$$

i.e. $U \mapsto \boldsymbol{D}_U(V)$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire et $V \mapsto \boldsymbol{D}_U(V)$ vérifie la règle de Leibniz. Les coefficients de la connexion sont définis pour chaque système de coordonnées locales comme les fonctions ${\Gamma^\sigma}_{\mu\nu}$ définies (localement) de sorte que $\boldsymbol{D}_{\partial_\mu}(\partial_\nu) = {\Gamma^\epsilon}_{\mu\nu}\partial_\epsilon$.

18. Nous verrons qu'il n'y a pas une manière unique de *corriger* les dérivations partielles en dérivations covariantes : cela est à relier au fait (c.f. § 11) que les connexions forment un sous-espace affine (strict) de l'espace des applications linéaires de $\mathfrak{T}^1_0(TM) \times \mathfrak{T}^1_0(TM)$ dans $\mathfrak{T}^1_0(TM)$.

19. Une dérivation partielle covariante n'est pas une dérivation au sens strict, du fait qu'elle n'est pas associée à un champ de vecteurs (même local comme c'est le cas pour les dérivation partielles).

Soit $\boldsymbol{D}$ une connexion sur M ; alors pour V fixé, les coefficients de $\boldsymbol{D}$ nous permettent d'écrire (en coordonnées)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_U(V) = U^\mu \boldsymbol{D}_{\partial_\mu}(V^\nu \partial_\nu) &= U^\mu \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial \boldsymbol{x}_\mu} \partial_\nu + V^\nu \boldsymbol{D}_{\partial_\mu}(\partial_\nu) \right) \\ &= U^\mu \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial \boldsymbol{x}_\mu} \partial_\nu + V^\nu \Gamma^\epsilon{}_{\mu\nu} \partial_\epsilon \right) \\ &= U^\mu \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial \boldsymbol{x}_\mu} \partial_\nu + V^\sigma \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma} \partial_\nu \right) = U^\mu \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial \boldsymbol{x}_\mu} + V^\sigma \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma} \right) \partial_\nu\end{aligned}$$

Par définition les dérivées partielles covariantes des $\boldsymbol{x}$-composantes de V sont les

(31) $$D_\nu(V^\mu) := \frac{\partial V^\mu}{\partial \boldsymbol{x}^\nu} + V^\sigma \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}$$

Par le Corollaire 7.2, la $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéarité des applications partielles $U \mapsto \boldsymbol{D}_U(V)$ nous permet d'énoncer la propriété essentielle des dérivations covariantes d'une connexion.

Proposition 8.2. *Soit $\boldsymbol{D}$ une connexion sur M ; si V est un champ de vecteur de $\boldsymbol{x}$-composantes V^μ alors les dérivées partielles covariantes $D_\mu(V^\nu)$ sont les composantes d'un tenseur $(1,1)$ t.q.*

$$\boldsymbol{D}_{\partial_\mu}(V) = D_\mu(V^\nu)\partial_\nu$$

Admettons provisoirement l'existence d'une connexion $\boldsymbol{D}$ et soient $\Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}$ (resp. $\hat{\Gamma}^\mu{}_{\sigma\nu}$) ses coefficients dans un système de coordonnées $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^n)$ (resp. $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{\boldsymbol{x}}^1, \ldots \hat{\boldsymbol{x}}^n)$). Pour V un champ de vecteurs fixé, nous utilisons la compatibilité tensorielle des dérivées covariantes $D_\nu(V^\mu)$ définie en (31), de sorte que par (28)

$$D_\nu(V^\mu) = \frac{\partial \hat{V}^\alpha}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} \frac{\partial \boldsymbol{x}^\mu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial \boldsymbol{x}^\nu} + \hat{V}^\alpha \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^\mu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta \partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial \boldsymbol{x}^\nu} + V^\sigma \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu} = \left(\frac{\partial \hat{V}^\alpha}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} + \hat{V}^\sigma \hat{\Gamma}^\alpha{}_{\sigma\beta} \right) \frac{\partial \boldsymbol{x}^\mu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial \boldsymbol{x}^\nu}$$

soit, après simplification, et du fait que $V^\sigma = \hat{V}^\alpha(\partial \boldsymbol{x}^\sigma / \partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha)$,

$$\hat{V}^\alpha \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^\mu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta \partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial \boldsymbol{x}^\nu} + \hat{V}^\alpha \frac{\partial \boldsymbol{x}^\sigma}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu} = \hat{V}^\sigma \hat{\Gamma}^\alpha{}_{\sigma\beta} \frac{\partial \boldsymbol{x}^\mu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial \boldsymbol{x}^\nu}$$

soit encore

$$\hat{V}^\alpha \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^\mu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta \partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}{\partial \boldsymbol{x}^\mu} + \hat{V}^\alpha \frac{\partial \boldsymbol{x}^\sigma}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}{\partial \boldsymbol{x}^\mu} \frac{\partial \boldsymbol{x}^\nu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu} = \hat{V}^\sigma \hat{\Gamma}^\alpha{}_{\sigma\beta}$$

Le champ de vecteur V étant arbitraire, nous obtenons le système d'identités

(32) $$\hat{\Gamma}^\alpha{}_{\sigma\beta} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^\mu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta \partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}{\partial \boldsymbol{x}^\mu} + \frac{\partial \boldsymbol{x}^\sigma}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}{\partial \boldsymbol{x}^\mu} \frac{\partial \boldsymbol{x}^\nu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}$$

Ces identités montrent que les coefficients de connexion $\Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}$ ne sont pas les composantes d'un tenseur $(1,2)$ (comme la notation pourrait le laisser suggérer).

Proposition 8.3. *Supposons que chaque système de coordonnées $\boldsymbol{x} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ sur M est associée à une famille de fonctions $C^\sigma{}_{\mu\nu}(\cdot|\boldsymbol{x}) : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ supposées lisses ; si la condition de compatibilité*

(33) $$C^\alpha{}_{\sigma\beta}(\cdot|\hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^\mu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta \partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}{\partial \boldsymbol{x}^\mu} + \frac{\partial \boldsymbol{x}^\sigma}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}{\partial \boldsymbol{x}^\mu} \frac{\partial \boldsymbol{x}^\nu}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} C^\mu{}_{\sigma\nu}(\cdot|\boldsymbol{x})$$

est satisfaite dès que les domaines de $\boldsymbol{x}$ et de $\hat{\boldsymbol{x}}$ s'intersectent, alors les $C^\sigma{}_{\mu\nu}(\cdot|\boldsymbol{x})$ sont les coefficients d'une connexion $\boldsymbol{D}$ sur M dans le système de coordonnées $\boldsymbol{x}$.

Preuve. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\hat{\boldsymbol{x}}$ deux systèmes de coordonnées dont les domaines s'intersectent ; dans le suite nous noterons simplement $C^\sigma{}_{\mu\nu} := C^\sigma{}_{\mu\nu}(\cdot|\boldsymbol{x})$ et $\hat{C}^\alpha{}_{\sigma\beta} := C^\alpha{}_{\sigma\beta}(\cdot|\hat{\boldsymbol{x}})$. Étant donné $V = V^\nu\partial/\partial\boldsymbol{x}^\nu = \hat{V}^\beta\partial/\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\beta$ un champ de vecteur, nous voulons démontrer la formule de compatibilité tensorielle, soit :

$$\left(\frac{\partial V^\nu}{\partial \boldsymbol{x}^\mu} + V^\sigma C^\nu{}_{\sigma\mu}\right)\frac{\partial \boldsymbol{x}^\mu}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial\boldsymbol{x}^\nu} = \frac{\partial\hat{V}^\beta}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} + \hat{V}^\gamma\hat{C}^\beta{}_{\gamma\alpha} \tag{34}$$

Comme $V^\nu = \hat{V}^\beta(\partial\boldsymbol{x}^\nu/\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\beta)$ nous avons

$$\frac{\partial V^\nu}{\partial\boldsymbol{x}^\mu} = \frac{\partial V^\nu}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}{\partial\boldsymbol{x}^\mu} = \frac{\partial}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\left(\hat{V}^\beta\frac{\partial\boldsymbol{x}^\nu}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\right)\frac{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}{\partial\boldsymbol{x}^\mu} = \frac{\partial\hat{V}^\beta}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\frac{\partial\boldsymbol{x}^\nu}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}{\partial\boldsymbol{x}^\mu} + \hat{V}^\beta\frac{\partial^2\boldsymbol{x}^\nu}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha\hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}{\partial\boldsymbol{x}^\mu} \tag{35}$$

Nous pouvons maintenant transformer le membre de droite de (34) :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial V^\nu}{\partial \boldsymbol{x}^\mu} + V^\sigma C^\nu{}_{\sigma\mu}\right)\frac{\partial \boldsymbol{x}^\mu}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial\boldsymbol{x}^\nu} &= \left(\frac{\partial\hat{V}^\beta}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\frac{\partial\boldsymbol{x}^\nu}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}{\partial\boldsymbol{x}^\mu} + \hat{V}^\beta\frac{\partial^2\boldsymbol{x}^\nu}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha\hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}{\partial\boldsymbol{x}^\mu} + \hat{V}^\gamma\frac{\partial\boldsymbol{x}^\sigma}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\gamma}C^\nu{}_{\sigma\mu}\right)\frac{\partial \boldsymbol{x}^\mu}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial\boldsymbol{x}^\nu}\\
&= \frac{\partial\hat{V}^\beta}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} + \hat{V}^\beta\frac{\partial^2\boldsymbol{x}^\nu}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha\hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial\boldsymbol{x}^\nu} + \hat{V}^\gamma\frac{\partial\boldsymbol{x}^\sigma}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{x}^\mu}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial\boldsymbol{x}^\nu}C^\nu{}_{\sigma\mu}\\
&= \frac{\partial\hat{V}^\beta}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} + \hat{V}^\gamma\frac{\partial^2\boldsymbol{x}^\nu}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha\hat{\boldsymbol{x}}^\gamma}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial\boldsymbol{x}^\nu} + \hat{V}^\gamma\frac{\partial\boldsymbol{x}^\sigma}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{x}^\mu}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial\boldsymbol{x}^\nu}C^\nu{}_{\sigma\mu}\\
&= \frac{\partial\hat{V}^\beta}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} + \hat{V}^\gamma\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{x}^\nu}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha\hat{\boldsymbol{x}}^\gamma}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial\boldsymbol{x}^\nu} + \frac{\partial\boldsymbol{x}^\sigma}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{x}^\mu}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\frac{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial\boldsymbol{x}^\nu}C^\nu{}_{\sigma\mu}\right)\\
&\frac{\partial\hat{V}^\beta}{\partial\hat{\boldsymbol{x}}^\alpha} + \hat{V}^\gamma\hat{C}^\beta{}_{\gamma\alpha}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la formule (33) de compatibilité. Ainsi les

$$D_\mu(V^\nu) := \frac{\partial V^\nu}{\partial\boldsymbol{x}^\mu} + V^\sigma C^\nu{}_{\sigma\mu}$$

sont les composantes d'un tenseur $(1,1)$. La conclusion vient facilement en vérifiant que $(U,V)\mapsto \boldsymbol{D}_U(V) = U^\mu D_\mu(V^\nu)\partial_\nu$ est une connexion t.q. $\boldsymbol{D}_{\partial_\mu}(\partial_\nu) = C^\sigma{}_{\mu\nu}\partial_\sigma$.

□

9. Variétés pseudo-riemanniennes et connexion de Levi-Civita

Sans aborder le problème de l'existence, nous avons vu comment s'articulent les notions de dérivations covariantes et de connexions sur une variété M – chacune d'elle pouvant se déduire de l'autre et réciproquement. Cependant, mis à part l'idée initiale (un peu vague) consistant à chercher une version covariante des dérivées partielles des composantes des champs de vecteurs, il est difficile de se faire une idée précise de l'intérêt de ces notions : ceci viendra avec la caractérisation des géodésiques (pour le lagrangien inertiel) par le transport parallèle (c.f. § 12). Dans cette section, nous définissons la notion de variété pseudo-riemannienne : la métrique nous permet alors de définir successivement les symboles de Christoffel puis la connexion de Levi-Civita comme la connexion dont les coefficients coïncident avec les symboles de Christoffel. Nous verrons au § 11 en quel sens la connexion de Levi-Civita d'une variété pseudo-riemannienne est caractérisée par deux conditions, à savoir l'absence de torsion et la compatibilité avec la métrique.

9.1. **Structures pseudo-riemanniennes.** Soit M une variété de dimension n (qu'on suppose toujours plongée dans $\mathbb{R}^m$) et g un tenseur de valence $(0,2)$: alors g est une métrique pseudo-riemannienne sur M – on dit aussi que (M,g) est une variété pseudo-riemannienne – si (1) : g est symétrique, en ce sens que $g(U,V) = g(V,U)$, pour tout couple (U,V) de champs de vecteurs sur M et (2) : g est non dégénéré, ce qu'on peut traduire en disant que pour tout $X \in M$ et tout système de coordonnées $\boldsymbol{x}$ en X, le déterminant de la matrice [20] $G := (g_{ij}(X))$ est non nul. Par le Théorème Spectral, il existe une matrice orthogonale P (dépendant de X) et une matrice diagonale $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (à coefficients diagonaux dépendant aussi de X) t.q. $D = P^{-1}GP$. La signature de g (en X) est le couple d'entiers (p,q) t.q. $p + q = n$ et où p (resp. q) est le nombre de λ_i qui sont négatifs (resp. positifs) : on montre que la signature de g en X ne dépend pas de X et c'est par définition la signature de g. La métrique g est dite riemannienne si sa signature est égale à $(0,n)$: cela signifie que la restriction $g|_X$ à $T_X(M)$ est un produit scalaire euclidien ; dans ce cas, il n'y a pas de perte de généralité à supposer [21] que (M,g) est isométriquement plongée dans $\mathbb{R}^m$ (muni de sa structure euclidienne canonique), c'est-à-dire que $g|_X$ coïncide avec le produit scalaire induit par la structure euclidienne de $\mathbb{R}^m$ sur $T_X M$. Un cas important pour la relativité générale est celui où (M,g) est de dimension 4 et de signature [22] $(1,3)$ ou $(3,1)$: on parle alors de variété lorentzienne.

9.2. **Abaissement/relèvement des indices tensoriels.** De même qu'un produit scalaire euclidien sur un espace vectoriel E, permet de définir le relèvement/abaissement des indices covariants/contravariants d'un tenseur (c.f. indications en § 3), une structure pseudo-riemannienne g sur M autorise le relèvement/abaissement des indices covariants/contravariants des composantes des champs de tenseurs. Nous ne présentons pas formellement l'utilisation de cette technique, préférant plutôt donner un exemple d'application. Supposons donc que (M,g) est une variété pseudo-riemannienne et soit F un tenseur de valence $(1,p)$; alors, pour tout $X \in M$, il existe une application p-linéaire $\tilde{F}|_X$ de $\times_1^p T_X M$ et à valeurs dans $T_X M$ telle que pour tout $i_1, \ldots, i_n$

$$\tilde{F}|_X \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{i_p}} \right) = F^{j}{}_{i_1 \ldots i_p}(X) \left. \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{j}} \right|_X$$

où les $F^{j}{}_{i_1 \ldots i_p}$ sont les $\boldsymbol{x}$-composantes de F. Alors, en posant

$$F_{i i_1 \ldots i_p} := g\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{i}}, \tilde{F}\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{i_p}} \right) \right) = g\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{i}}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{j}} \right) F^{j}{}_{i_1 \ldots i_p} = g_{ij} F^{j}{}_{i_1 \ldots i_p} \tag{36}$$

(abaissement de l'indice contravariant) nous définissons les $\boldsymbol{x}$-composantes d'un champ de tenseurs $(0, p+1)$. Maintenant (c.f. (7) et Proposition 3.2), si nous notons g^* le $(2,0)$ tenseur t.q. (pour tout X) $(g^*)|_X = (g|_X)^*$, alors les $\boldsymbol{x}$-composantes de g^* sont les g^{ij} t.q. $g^{ik} g_{ki} \equiv \delta^{i}{}_{j}$; alors nous pouvons démontrer de manière analogue à (36) que (relèvement du premier indice covariant) :

$$F^{i}{}_{i_1 \ldots i_p} = g^{ij} F_{j i_1 \ldots i_p}$$

---

20. Matrice, en tant que simple tableau $n \times n$ de nombres réels, i.e. un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
21. D'après le Théorème de Plongement de Nash (1954-56) [Nas54, Nas56].
22. On trouve aussi la notation $(- \ + \ + +)$ pour la signature $(1,3)$ et $(- \ - \ - +)$ pour la signature $(3,1)$.

9.3. **Symboles de Christoffel.** Soit (M,g) est une variété riemannienne de dimension n plongée isométriquement dans $\mathbb{R}^m$ (nous traiterons ultérieurement le cas pseudo-riemannien). Étant donné $(\mathcal{U},\boldsymbol{x})$ un système de coordonnées, nous notons $\boldsymbol{X}^\nu(x^1,\ldots,x^n)$ (pour $\nu=1,\ldots,m$ et $x=(x^1,\ldots,x^n)\in\boldsymbol{x}(\mathcal{U})$) les m composantes cartésiennes de la carte $\boldsymbol{X}$ associée à $\boldsymbol{x}$ (et considérée comme une application de $\boldsymbol{x}(\mathcal{U})$ à valeurs dans l'espace ambiant $\mathbb{R}^m$). Alors par définition de $(\partial_1,\ldots,\partial_n)$ (base holonôme de $\boldsymbol{x}$) et de $(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_m)$ (base canonique de $\mathbb{R}^m$), nous avons pour $X=\boldsymbol{X}(x^1,\ldots,x^n)$

$$\partial_\mu|_X=\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^\mu}:=\sum_{\nu=1}^m\frac{\partial\boldsymbol{X}^\nu}{\partial x^\mu}\mathbf{e}_\nu$$

De même que $\boldsymbol{X}$, les différentielles partielles $\partial\boldsymbol{X}/\partial x^\mu$ sont des applications de $\boldsymbol{x}(\mathcal{U})$ dans $\mathbb{R}^m$: cela nous permet de définir les différentielles partielles secondes

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{X}}{\partial x^\mu\partial x^\nu}:=\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^\nu}\right)$$

Soit $V=V^\mu\partial_\mu$ un champ de vecteurs et posons $\hat V:=V\circ\boldsymbol{X}$ (resp. $\hat V^\mu=V^\mu\circ\boldsymbol{X}$) : ainsi, $\hat V$ est une application définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (i.e. $\boldsymbol{x}(\mathcal{U})$), à valeur dans $\mathbb{R}^m$ (l'espace ambiant de M) qui de plus vérifie $\hat V(x)=V|_X\in T_XM$ dès que $x=\boldsymbol{x}(X)$. Du fait que $\partial_\nu|_X=\partial\boldsymbol{X}/\partial x_\nu$, il vient $\hat V(x)=\hat V^\nu(x)\partial\boldsymbol{X}/\partial x^\nu$ et en appliquant la différentielle (usuelle) du produit nous obtenons

$$\frac{\partial\hat V}{\partial x^\mu}=\frac{\partial\hat V^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^\nu}+\hat V^\nu(x)\frac{\partial^2\boldsymbol{X}}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\tag{37}$$

Le premier terme est dans T_XM, mais pas nécessairement le second. Par définition, Les symboles de Christoffel dans les coordonnées locales d'un système de coordonnées $\boldsymbol{x}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}^n$ sont les applications $\mathsf{C}^\lambda{}_{\mu\nu}:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ t.q. nous ayons

$$(\forall\sigma)\qquad\left\langle\frac{\partial^2\boldsymbol{X}}{\partial x^\mu\partial x^\nu}-\mathsf{C}^\lambda{}_{\mu\nu}(\boldsymbol{X}(x))\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^\lambda}\middle|\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^\sigma}\right\rangle=0\tag{38}$$

D'une part, nous tirons de (38) que

$$\left\langle\frac{\partial^2\boldsymbol{X}}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\middle|\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^\sigma}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^\lambda}\middle|\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^\sigma}\right\rangle\mathsf{C}^\lambda{}_{\mu\nu}(\boldsymbol{X}(x))=G_{\lambda\sigma}\mathsf{C}^\lambda{}_{\mu\nu}(\boldsymbol{X}(x))\tag{39}$$

où $G_{ij}=g_{ij}\circ\boldsymbol{X}$. Mais d'autre part, du fait que $G_{\alpha\beta}=\langle\partial\boldsymbol{X}/\partial x^\alpha|\partial\boldsymbol{X}/\partial x^\beta\rangle$ il vient aussi

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}&=\left\langle\frac{\partial^2\boldsymbol{X}}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\middle|\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^\lambda}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^\nu}\middle|\frac{\partial^2\boldsymbol{X}}{\partial x^\mu\partial x^\lambda}\right\rangle\\ \frac{\partial G_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}&=\left\langle\frac{\partial^2\boldsymbol{X}}{\partial x^\nu\partial x^\lambda}\middle|\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^\mu}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^\lambda}\middle|\frac{\partial^2\boldsymbol{X}}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\right\rangle\\ \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}&=\left\langle\frac{\partial^2\boldsymbol{X}}{\partial x^\lambda\partial x^\mu}\middle|\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^\nu}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^\mu}\middle|\frac{\partial^2\boldsymbol{X}}{\partial x^\lambda\partial x^\nu}\right\rangle\end{aligned}$$

soit encore avec (39)

$$\frac{\partial G_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}+\frac{\partial G_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}-\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}=2\left\langle\frac{\partial^2\boldsymbol{X}}{\partial x^\mu\partial x^\nu}\middle|\frac{\partial\boldsymbol{X}}{\partial x^\lambda}\right\rangle=2G_{\lambda\sigma}\mathsf{C}^\lambda{}_{\mu\nu}(\boldsymbol{X}(x))$$

et finalement (en terme des fonctions définies dans le domaine du système de coordonnées considéré)

$$\mathrm{C}^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}\Big(\partial_\mu(g_{\nu\sigma}) + \partial_\nu(g_{\sigma\mu}) - \partial_\sigma(g_{\mu\nu})\Big) \tag{40}$$

Nous transformons (37) en écrivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{V}}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial \hat{V}^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial \boldsymbol{X}(x)}{\partial x^\nu} + \hat{V}^\nu(x)\left(\mathrm{C}^{\lambda}{}_{\mu\nu}(\boldsymbol{X}(x))\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{X}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \mathrm{C}^{\lambda}{}_{\mu\nu}(\boldsymbol{X}(x))\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^\lambda}\right) \\ &= \left(\frac{\partial \hat{V}^\nu}{\partial x^\mu} + \hat{V}^\nu(x)\mathrm{C}^{\lambda}{}_{\mu\nu}(\boldsymbol{X}(x))\right)\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^\lambda} + \hat{V}^\nu(x)\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{X}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \mathrm{C}^{\lambda}{}_{\mu\nu}(\boldsymbol{X}(x))\frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial x^\lambda}\right) \end{aligned}$$

qui est la décomposition de $\partial\hat{V}/\partial x^\mu$ suivant $T_X M$ et son orthogonal. Cette présentation (valable pour une variété riemannienne de dimension n et plongée isométriquement dans $\mathbb{R}^m$), nous permet de poser la définition suivante (dans le cas pseudo-riemannien) :

Définition 9.1. *Soit (M,g) une variété pseudo-riemannienne de dimension n ; alors,*

(i) : en coordonnées, les symboles de Christoffel de première espèce sont les $\mathrm{C}_{\lambda\mu\nu} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ t.q

$$\mathrm{C}_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big(\partial_\mu(g_{\sigma\nu}) + \partial_\nu(g_{\mu\sigma}) - \partial_\sigma(g_{\mu\nu})\Big)$$

(ii) : en coordonnées, les symboles de Christoffel de deuxième espèce sont les $\mathrm{C}^{\lambda}{}_{\mu\nu} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ t.q

$$\mathrm{C}^{\lambda}{}_{\mu\nu} = g^{\lambda\sigma}\mathrm{C}_{\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}\Big(\partial_\mu(g_{\sigma\nu}) + \partial_\nu(g_{\mu\sigma}) - \partial_\sigma(g_{\mu\nu})\Big)$$

Par des calculs directs utilisant la symétrie du tenseur métrique nous pouvons démontrer (exercice) les propriétés suivantes du symboles de Christoffel. Nous verrons (c.f. Proposition 10.1) que ces propriétés s'interprètent en correspondance avec des propriétés spécifiques portant sur les connexions (c.f. carte mentale in Fig. 3).

Proposition 9.2. *Les symboles de Christoffel vérifient*

$$\mathrm{C}^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \mathrm{C}^{\sigma}{}_{\nu\mu} \tag{41}$$

$$\mathrm{C}_{\sigma\mu\nu} = \mathrm{C}_{\sigma\nu\mu} \tag{42}$$

$$\partial_\sigma(g_{\mu\nu}) = \mathrm{C}_{\mu\nu\sigma} + \mathrm{C}_{\nu\mu\sigma} \tag{43}$$

$$\partial_\sigma(g_{\mu\nu}) = \mathrm{C}_{\mu\sigma\nu} + \mathrm{C}_{\nu\sigma\mu} \tag{44}$$

Théorème 9.3. *Soit (M,g) une variété pseudo-riemannienne de dimension n ; alors l'application $(U,V) \mapsto \nabla_U(V)$ s'exprimant en coordonnées locales par*

$$\nabla_U(V) = U^\mu \nabla_\mu(V^\nu)\partial_\nu \quad \text{où} \quad \nabla_\mu V^\nu := \partial_\mu V^\nu + V^\epsilon \mathrm{C}^{\nu}{}_{\epsilon\mu}$$

définit une connexion sur M dont les coefficients coincident avec les symboles de Christoffel, i.e.

$$\nabla_{\partial_\mu}(\partial_\nu) = \mathrm{C}^{\sigma}{}_{\mu\nu}\partial_\sigma$$

Par définition $\boldsymbol{D}$ est la connexion de Levi-Civita.

Par la Proposition 8.3, le Théorème 9.3 est une corollaire de la proposition suivante.

Proposition 9.4. *Si $\mathrm{C}^{c}{}_{ab}$ (resp. $\hat{\mathrm{C}}^{\gamma}{}_{\alpha\beta}$) sont les symboles de Christoffel en $\boldsymbol{x}$ (resp. $\hat{\boldsymbol{x}}$), alors*

$$\hat{\mathrm{C}}^{\gamma}{}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\gamma}{\partial \boldsymbol{x}^c}\frac{\partial \boldsymbol{x}^a}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\mathrm{C}^{c}{}_{ab} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\gamma}{\partial \boldsymbol{x}^c}\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^c}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha \partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} \tag{45}$$

Preuve. Par définition, nous avons respectivement

$$\mathsf{C}^c{}_{ab} = \frac{1}{2}g^{cd}\left(\frac{\partial g_{db}}{\partial \boldsymbol{x}_a} + \frac{\partial g_{da}}{\partial \boldsymbol{x}_b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial \boldsymbol{x}_d}\right) \quad \text{et} \quad \hat{\mathsf{C}}^c{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\hat{g}^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial \hat{g}_{\beta\delta}}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha} + \frac{\partial \hat{g}_{\alpha\delta}}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_\beta} - \frac{\partial \hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_\delta}\right)$$

(où le "$\hat{}$" marque les symboles dans le coordonnées locales de $\hat{\boldsymbol{x}}$). Le changement de variables sur le tenseur métrique donne

$$\hat{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \boldsymbol{x}^a}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}g_{ab} \quad \text{et} \quad \hat{g}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}{\partial \boldsymbol{x}^a}\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial \boldsymbol{x}^b}g^{ab}$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\hat{g}^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial \hat{g}_{\beta\delta}}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\gamma}{\partial \boldsymbol{x}^c}\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\delta}{\partial \boldsymbol{x}^d}g^{cd}\right)\frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial \boldsymbol{x}^d}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\delta}g_{bd}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\gamma}{\partial \boldsymbol{x}^c}\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\delta}{\partial \boldsymbol{x}^d}g^{cd}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial \boldsymbol{x}^d}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\delta}\right)g_{bd} + \frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial \boldsymbol{x}^d}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\delta}\frac{\partial \boldsymbol{x}^a}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\frac{\partial g_{bd}}{\partial \boldsymbol{x}_a}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\gamma}{\partial \boldsymbol{x}^c}\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\delta}{\partial \boldsymbol{x}^d}\right)\frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha}\left(\frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial \boldsymbol{x}^d}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\delta}\right)\delta^c_b + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\gamma}{\partial \boldsymbol{x}^c}\frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial \boldsymbol{x}^a}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\left(\frac{1}{2}g^{cd}\left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial \boldsymbol{x}_a}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial \boldsymbol{x}^b}\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\delta}{\partial \boldsymbol{x}^d}\right)\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha \partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial \boldsymbol{x}^d}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\delta} + \frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^d}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha \partial \hat{\boldsymbol{x}}^\delta}\right) + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\gamma}{\partial \boldsymbol{x}^c}\frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial \boldsymbol{x}^a}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\left(\frac{1}{2}g^{cd}\left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial \boldsymbol{x}_a}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial \boldsymbol{x}^b}\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha \partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\delta}{\partial \boldsymbol{x}^d}\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^d}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha \partial \hat{\boldsymbol{x}}^\delta}\right) + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\gamma}{\partial \boldsymbol{x}^c}\frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial \boldsymbol{x}^a}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\left(\frac{1}{2}g^{cd}\left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial \boldsymbol{x}_a}\right)\right)
\end{aligned}$$

et par un calcul analogue

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\hat{g}^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial \hat{g}_{\alpha\delta}}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_\beta}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial \boldsymbol{x}^b}\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha \partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\delta}{\partial \boldsymbol{x}^d}\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^d}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha \partial \hat{\boldsymbol{x}}^\delta}\right) + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\gamma}{\partial \boldsymbol{x}^c}\frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial \boldsymbol{x}^a}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\left(\frac{1}{2}g^{cd}\left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial \boldsymbol{x}_a}\right)\right)\\
\frac{1}{2}\hat{g}^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial \hat{g}_{\alpha\beta}}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_\delta}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}{\partial \boldsymbol{x}^b}\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha \partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\delta}{\partial \boldsymbol{x}^d}\frac{\partial^2 \boldsymbol{x}^d}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}_\alpha \partial \hat{\boldsymbol{x}}^\delta}\right) + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\gamma}{\partial \boldsymbol{x}^c}\frac{\partial \boldsymbol{x}^b}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\beta}\frac{\partial \boldsymbol{x}^a}{\partial \hat{\boldsymbol{x}}^\alpha}\left(\frac{1}{2}g^{cd}\left(\frac{\partial g_{bd}}{\partial \boldsymbol{x}_a}\right)\right)
\end{aligned}$$

Nous obtenons (45) en additionnant les trois équations.

□

10. Torsion et g-compatibilité d'une connexion

Soit $(U, V) \mapsto \boldsymbol{D}_U(V)$ une connexion (affine) ; alors $\boldsymbol{D}$ est dite sans torsion lorsque pour tous champs de vecteurs U, V :

(46) $$\boldsymbol{D}_U(V) - \boldsymbol{D}_V(U) = [U, V]$$

De plus, lorsque g est une métrique pseudo-riemannienne sur M, alors $\boldsymbol{D}$ est dite métrique ou encore g-compatible, si pour tout triplet (U, V, W) de champs de vecteurs sur M, l'identité suivante est satisfaite, soit :

(47) $$U\big(g(V, W)\big) = g\big(\boldsymbol{D}_U(V), W\big) + g\big(V, \boldsymbol{D}_U(W)\big)$$

La propriété de g-compatibilité en (47) possède une belle symétrie formelle : plus concrètement, nous verrons (c.f. § 12) qu'elle est la condition assurant la propriété d'isométrie du transport parallèle. À ce stade, un premier indice de l'importance de la g-compatibilité est donné par le Théorème d'existence et d'unicité de Koszul (c.f. Théorème 11.2).

$$\boxed{\boldsymbol{D} : \text{sans torsion}} \longleftrightarrow \boxed{\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{D} : \text{métrique} \iff \boldsymbol{D}(g) \equiv 0} \longleftrightarrow \boxed{\partial_\sigma(g_{\mu\nu}) = \Gamma_{\mu\nu\sigma} + \Gamma_{\nu\mu\sigma}}$$

FIGURE 3. *Traduction de l'absence de torsion et de la g-compatibilité d'une connexion $\boldsymbol{D}$ sur les coefficients $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ et $\Gamma_{\mu\nu\sigma}$.*

Proposition 10.1. *Soit M une variété de dimension n munie d'une connexion $\boldsymbol{D}$ de coefficient $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$; alors (i) : $\boldsymbol{D}$ est sans torsion si et seulement si les coefficients $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ sont symétriques, i.e. :*

$$\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\mu}$$

(ii) : si de plus g est une structure riemannienne sur M, alors $\boldsymbol{D}$ est métrique si et seulement si

$$\partial_\sigma(g_{\mu\nu}) = \Gamma_{\mu\nu\sigma} + \Gamma_{\nu\mu\sigma}$$

(où par définition nous avons posé $\Gamma_{\mu\nu\sigma} := g_{\mu\epsilon}\Gamma^{\epsilon}{}_{\nu\sigma}$).

Preuve. (i) : Étant donnés U et V deux champs de vecteurs sur M, il vient :

$$\begin{aligned}
U^\mu\Big(D_\mu(V^\nu)\Big) - V^\mu\Big(D_\mu(U^\nu)\Big) &= U^\mu\Big(\partial_\mu(V^\nu) + V^\epsilon\Gamma^{\nu}{}_{\epsilon\mu}\Big) - V^\mu\Big(\partial_\mu(U^\nu) + U^\epsilon\Gamma^{\nu}{}_{\epsilon\mu}\Big)\\
&= U^\mu\partial_\mu(V^\nu) - V^\mu\partial_\mu(U^\nu) + U^\mu V^\epsilon\Gamma^{\nu}{}_{\epsilon\mu} - V^\mu U^\epsilon\Gamma^{\nu}{}_{\epsilon\mu}\\
&= [U,V]^\nu + U^\mu V^\epsilon\Big(\Gamma^{\nu}{}_{\epsilon\mu} - \Gamma^{\nu}{}_{\mu\epsilon}\Big)
\end{aligned}$$

(ii) : Étant donnés U, V et W trois champs de vecteurs sur M, il vient :

$$\begin{aligned}
&g\Big(\boldsymbol{D}_U(V), W\Big) + g\Big(V, \boldsymbol{D}_U(W)\Big)\\
=\;& U^\sigma\Big(\partial_\sigma(V^\mu) + V^\epsilon\Gamma^{\mu}{}_{\epsilon\sigma}\Big)g_{\mu\nu}W^\nu + U^\sigma\Big(\partial_\sigma(W^\mu) + W^\epsilon\Gamma^{\mu}{}_{\epsilon\sigma}\Big)g_{\mu\nu}V^\nu\\
=\;& U^\sigma\Big(\partial_\sigma(V^\mu)g_{\mu\nu}W^\nu + V^\epsilon\Gamma^{\mu}{}_{\epsilon\sigma}g_{\mu\nu}W^\nu + V^\nu\Gamma^{\mu}{}_{\epsilon\sigma}g_{\mu\nu}W^\epsilon + V^\nu g_{\mu\nu}\partial_\sigma(W^\mu)\Big)\\
=\;& U^\sigma\Big(\partial_\sigma(V^\mu)g_{\mu\nu}W^\nu + V^\mu\Gamma^{\epsilon}{}_{\mu\sigma}g_{\epsilon\nu}W^\nu + V^\epsilon\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}g_{\mu\epsilon}W^\nu + V^\nu g_{\mu\nu}\partial_\sigma(W^\mu)\Big)\\
=\;& U^\sigma\Big(\partial_\sigma(V^\mu)g_{\mu\nu}W^\nu + V^\mu\Gamma^{\epsilon}{}_{\mu\sigma}g_{\epsilon\nu}W^\nu + V^\mu\Gamma^{\epsilon}{}_{\nu\sigma}g_{\epsilon\mu}W^\nu + V^\nu g_{\mu\nu}\partial_\sigma(W^\mu)\Big)\\
=\;& U^\sigma\Big(\partial_\sigma(V^\mu)g_{\mu\nu}W^\nu + V^\mu\Big(g_{\nu\epsilon}\Gamma^{\epsilon}{}_{\mu\sigma} + g_{\mu\epsilon}\Gamma^{\epsilon}{}_{\nu\sigma}\Big)W^\nu + V^\nu g_{\mu\nu}\partial_\sigma(W^\mu)\Big)\\
=\;& U^\sigma\Big(\partial_\sigma(V^\mu)g_{\mu\nu}W^\nu + V^\mu\partial_\sigma(g_{\mu\nu})W^\nu + V^\nu g_{\mu\nu}\partial_\sigma(W^\mu)\Big) + V^\mu W^\nu\Big(\Gamma_{\nu\mu\sigma} + \Gamma_{\mu\nu\sigma} - \partial_\sigma(g_{\mu\nu})\Big)\\
=\;& U^\sigma\partial_\sigma\Big(V^\mu g_{\mu\nu}W^\mu\Big) + V^\mu W^\nu\Big(\Gamma_{\nu\mu\sigma} + \Gamma_{\mu\nu\sigma} - \partial_\sigma(g_{\mu\nu})\Big)
\end{aligned}$$

Cependant, nous avons aussi

$$U\Big(g(V,W)\Big) = U\Big(V^\mu g_{\mu\nu}W^\mu\Big) = U^\sigma\partial_\sigma\Big(V^\mu g_{\mu\nu}W^\mu\Big)$$

ce qui donne finalement

$$U\Big(g(V,W)\Big) - g\Big(\boldsymbol{D}_U(V), W\Big) + g\Big(V, \boldsymbol{D}_U(W)\Big) = V^\mu W^\nu\Big(\Gamma_{\nu\mu\sigma} + \Gamma_{\mu\nu\sigma} - \partial_\sigma(g_{\mu\nu})\Big)$$

□

11. Théorème d'existence et d'unicité de Koszul

Il existe une présentation algébrique très simple de la connexion de Levi-Civita due à Koszul [Kos50]. Le point de départ est le fait que l'ensemble des connexions sur M (s'il n'est pas vide !) est une sous-espace affine de l'espace vectoriel des applications $\mathbb{R}$-bilinéaire sur $\mathfrak{T}_0^1(TM)$. En effet, soit $B(TM) := \coprod_{X\in M} B(T_X M)$, où $B(T_X M)$ l'espace des applications $\mathbb{R}$-bilinéaires de $T_X M$. Une forme de connexion sur M est par définition une section $\Theta : X \mapsto \Theta|_X$ de $B(TM)$ qui est C^∞ : l'ensemble des formes de connexion est un espace vectoriel identifié à l'espace des applications $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéaires sur $\mathfrak{T}_0^1(TM)$: ainsi, si Θ est une forme de connexion alors, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\Theta(fV, W) = f\Theta(V, W) = \Theta(V, fW)$$

et par suite (règle de Leibniz) une forme de connexion n'est pas une connexion.

Proposition 11.1. *L'ensemble des connexions sur M est un espace affine dont la base vectorielle est l'espace vectoriel des formes de connexion sur M.*

Preuve. Soient $\boldsymbol{D}^{(1)}$ et $\boldsymbol{D}^{(2)}$ deux connexions affines : pour $V, W \in \mathfrak{T}_0^1(TM)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ on a d'une part $\boldsymbol{D}^{(1)}_{fV}(W) - \boldsymbol{D}^{(2)}_{fV}(W) = f\big(\boldsymbol{D}^{(1)}_V(W) - \boldsymbol{D}^{(2)}_V(W)\big)$ et que d'autre part,

$$\Big(\boldsymbol{D}^{(1)}_V - \boldsymbol{D}^{(2)}_V\Big)(fW) = \Big(V(f)W + f\boldsymbol{D}^{(1)}_V W\Big) - \Big(V(f)W + f\boldsymbol{D}^{(2)}_V W\Big) = f\Big(\boldsymbol{D}^{(1)}_V W - \boldsymbol{D}^{(2)}_V W\Big)$$

Cela montre que la différence de deux connexions est une forme de connexion.

$\square$

Théorème 11.2 (Koszul)**.** *Toute variété pseudo-riemannienne (M, g) est associée à une unique connexion ∇ – appelée connexion de Levi-Civita – et caractérisée par le fait que (1) : ∇ est sans torsion et (2) : g est parallèle (i.e. ∇ est métrique). De plus, la connexion de Levi-Civita est entièrement déterminée par la formule de Koszul affirmant que pour tout $V, W \in \mathfrak{T}_0^1(TM)$*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_U(V), W) \;&=\; U\Big(g(V,W)\Big) + V\Big(g(W,U)\Big) - W\Big(g(U,V)\Big) + \\ &\quad\; g([U,V],W) + g([W,U],V) - g([V,W],U) \end{aligned} \tag{48}$$

Preuve. Montrons d'abord l'unicité de la connexion de Levi-Civita. Comme ∇ est g-compatible, nous avons pour tous champs de vecteurs U, V et W,

$$\begin{aligned} U\Big(g(V,W)\Big) &= g(\nabla_U(V), W) + g(V, \nabla_U(W)) \\ V\Big(g(W,U)\Big) &= g(\nabla_V(W), U) + g(W, \nabla_V(U)) \\ W\Big(g(U,V)\Big) &= g(\nabla_W U, V) + g(U, \nabla_W(V)) \end{aligned}$$

En retranchant la troisième identité à la somme des deux premières, il vient :

$$\begin{aligned} U\Big(g(V,W)\Big) + V\Big(g(W,U)\Big) - W\Big(g(U,V)\Big) \;&=\; g\Big(\nabla_U(V) + \nabla_V(U), W\Big) + \\ &\quad\; g\Big(\nabla_U(W) - \nabla_W(U), V\Big) + \\ &\quad\; g\Big(\nabla_V(W) - \nabla_W(V), U\Big) \end{aligned} \tag{49}$$

D'autre part, la torsion de ∇ étant nulle l'identité (49) se simplifie :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_U(V),W) &= U\Big(g(V,W)\Big)+V\Big(g(W,U)\Big)-W\Big(g(U,V)\Big)+ \\ &\quad g([U,V],W)+g([W,U],V)-g([V,W],U) \end{aligned}$$

où on reconnaît la formule de Koszul en (48). Par non dégénérescence de g, la connexion ∇ est uniquement déterminée de sorte que si U et V sont deux champs de vecteurs sur M, le champ $\nabla_U(V)$ est définit comme l'unique champ de vecteurs sur M vérifiant (48). Pour l'existence, montrons que la formule de Koszul définissant $\nabla_U(V)$ fait de ∇ une connexion g-compatible et sans torsion. D'abord, pour toutes fonctions f :

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_U(fV),W) &= U\Big(g(fV,W)\Big)+(fV)\Big(g(W,U)\Big)-W\Big(g(U,fV)\Big)+ \\ &\quad g([U,fV],W)+g([W,U],fV)-g([fV,W],U) \\ &= U(f)\cdot g(V,W)-W(f)\cdot g(U,V)+U(f)\cdot g(V,W)+ \\ &\quad W(f)\cdot g(U,V)+f\cdot 2g(\nabla_U(V),W) \\ &= 2g(U(f).V+f\nabla_U(V),W) \\ 2g(\nabla_{fU}V,W) &= (fU)\Big(g(V,W)\Big)+V\Big(g(W,fU)\Big)-W\Big(g(fU,V)\Big)+ \\ &\quad g([fU,V],W)+g([W,fU],V)-g([V,W],fU) \\ &= V(f)\cdot g(W,U)-W(f)\cdot g(U,V)-V(f)\cdot g(U,W)+ \\ &\quad W(f)\cdot g(U,V)+f\cdot 2g(\nabla_U(V),W) \\ &= 2g(f\nabla_U(V),W) \end{aligned}$$

D'autre part, ∇ est bien sans torsion :

$$\begin{aligned} &2g\Big(\nabla_U(V)-\nabla_V(U),W\Big) \\ =\ &U\Big(g(V,W)\Big)+V\Big(g(W,U)\Big)-W\Big(g(U,V)\Big)+g([U,V],W)+g([W,U],V)-g([V,W],U) \\ &-V\Big(g(U,W))-U\Big(g(W,V)\Big)+W\Big(g(V,U)\Big)-g([V,U],W)-g([W,V],U)+g([U,W],V) \\ =\ &2g([U,V],W) \end{aligned}$$

Enfin, ∇ est bien g-compatible :

$$\begin{aligned} &2g\Big(\nabla_U(V),W)+2g(V,\nabla_U(W)\Big) \\ =\ &U\Big(g(V,W))+V\Big(g(W,U))-W\Big(g(U,V))+g([U,V],W)+g([W,U],V)-g([V,W],U) \\ &+U\Big(g(W,V))+W\Big(g(V,U))-V\Big(g(U,W)\Big)+g([U,W],V)+g([V,U],W)-g([W,V],U) \\ =\ &2U\Big(g(V,W)\Big) \end{aligned}$$

□

Remarque 11.3. *Nous avons initialement défini* ∇ *comme la connexion dont les coefficients* ${\Gamma^k}_{ij}$ *coïncident avec les symboles de Christoffel* ${\mathbb{C}^k}_{ij}$ *(c.f. Définition 9.1 et Théorème 9.3). Nous pouvons cependant retrouver directement ce résultat par la formule de Koszul donnée en (48) : en* *effet, si* $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ *est une base holonôme et si* $(U, V, W) = (\partial_i, \partial_j, \partial_k)$ *alors,*

$$\begin{aligned} 2g\Big(\nabla_{\partial_i}(\partial_j), \partial_k\Big) &= \partial_i\Big(g(\partial_j, \partial_k)\Big) + \partial_j\Big(g(\partial_k, \partial_i)\Big) - \partial_k\Big(g(\partial_i, \partial_j)\Big) + \\ & \quad g\Big([\partial_i, \partial_j], \partial_k\Big) + g\Big([\partial_k, \partial_i], \partial_j\Big) - g\Big([\partial_j, \partial_k], \partial_i\Big) \end{aligned}$$

et comme $[\partial_i, \partial_j] = 0$*, nous retrouvons*

$$g_{i\epsilon}\Gamma^{\epsilon}{}_{jk} = \frac{1}{2}\partial_i\Big(g(\partial_j, \partial_k)\Big) + \partial_j\Big(g(\partial_k, \partial_i)\Big) - \partial_k\Big(g(\partial_i, \partial_j)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\partial_i(g_{jk}) + \partial_j(g_{ki}) - \partial_k(g_{ij})\Big)$$

12. Transport parallèle

Soit M une variété de dimension n plongée dans l'espace $\mathbb{R}^m$. Étant donné $\gamma : [a\,;b] \to M$ un chemin sur M, nous dirons que l'application $V : t \mapsto V(t)$ de $[a\,;b]$ dans $\mathbb{R}^m$ est une champ de vecteur le long de γ si elle est C^∞ et si $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$, pour tout $a \leq t \leq b$. Toute connexion $\boldsymbol{D}$ sur M est associée à un transport parallèle le long des chemins sur M. Avant de définir cette notion, nous commençons par un cas particulier, pour lequel $\gamma(t)$ coïncide avec la position $\phi_U^t(X)$ de la courbe intégrale d'un champ de vecteur U au temps t et de position initiale X et où $V(t)$ coïncide avec la valeur $V|_{\gamma(t)}$ prise par un deuxième champ de vecteur V sur M. En posant

(50) $$\frac{DV(t)}{dt} := \boldsymbol{D}_U(V)|_{\gamma(t)}$$

nous définissons un nouveau champ de vecteur le long de γ et qui – en un sens – est *dérivé* de $V(t)$. Pour allez un peu plus loin, remarquons qu'en se plaçant dans n'importe quel système $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^n)$ de coordonnées locales, les propriétés de la connexion $\boldsymbol{D}$ (dont nous notons $\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}$ les coefficients), nous donnent :

$$\boldsymbol{D}_U(V) = \Big(U^\mu \partial_\mu(V^\sigma) + U^\mu V^\nu \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}\Big)\partial_\sigma$$

Maintenant nous notons $(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t))$ les composantes cartésiennes de $\boldsymbol{x}(\gamma(t))$; alors du fait que $\gamma(t) = \phi_U^t(X)$, nous avons $U^\mu(\gamma(t)) = \dot{\gamma}^\mu(t)$. Par suite, en notant (abusivement) $V(t) := V(\gamma(t))$, i.e. $V^\nu(t) := V^\nu(\gamma(t))$, il vient [23] :

$$\boldsymbol{D}_U(V)|_{\gamma(t)} = \Big(\dot{\gamma}^\mu(t)\partial_\mu(V^\sigma) + \dot{\gamma}^\mu(t)V^\nu(t)\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}(\gamma(t))\Big)\partial_\sigma$$

soit encore, d'après la notation en (50)

$$\frac{DV(t)}{dt} = \Big(\dot{V}^\sigma(t) + \dot{\gamma}^\mu(t)V^\nu(t)\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}(\gamma(t))\Big)\partial_\sigma$$

Cette introduction nous permet de poser la définition suivante :

Définition 12.1. *Soit* $\boldsymbol{D}$ *une connexion sur* M *; alors, tout champ de vecteurs* $t \mapsto V(t)$ *le long d'un chemin* $\gamma : [a\,;b] \to M$ *est associé à un champ de vecteurs* $t \mapsto DV(t)/dt$ *le long de* γ *t.q pour tout système* $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^1, \ldots \boldsymbol{x}^n)$ *de coordonnées locales (dont le domaine contient* $\gamma(t)$*)*

$$\frac{DV(t)}{dt} = \Big(\dot{V}^\sigma(t) + \dot{\gamma}^\mu(t)V^\nu(t)\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu}\big(\gamma(t)\big)\Big)\partial_\sigma|_{\gamma(t)}$$

---

23. Pour tout fonction $t \mapsto \alpha(t)$ de la variable réelle et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, nous utilisons la notation de Newton $\dot{\alpha}(t) := d\alpha/dt$ (indépendamment du nom de la variable réelle).

et où $(\gamma^1(t), \dots \gamma^n(t))$ sont les coordonnées cartésiennes de $\boldsymbol{x}(\gamma(t))$. Par définition $t \mapsto V(t)$ est transporté parallèlement le long de γ ssi $DV(t)/dt = 0$, pour tout $a \leq t \leq b$; en coordonnées :

$$\frac{DV(t)}{dt} = 0 \iff (\forall \sigma) \quad \dot{V}^\sigma(t) + \dot{\gamma}^\mu(t) V^\nu(t) \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\big(\gamma(t)\big) = 0$$

L'ensemble $\mathfrak{T}^1_0(T_\gamma M)$ des champs de vecteurs le long d'un chemin $t \mapsto \gamma(t)$ sur M est un espace vectoriel : il est facile de vérifier que la dérivation covariante $D/dt : \mathfrak{T}^1_0(T_\gamma M) \to \mathfrak{T}^1_0(T_\gamma M)$ le long de γ associée à la connexion $\boldsymbol{D}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire qui vérifie la règle de Leibnitz, i.e. pour toute application lisse $t \mapsto \alpha(t) \in \mathbb{R}$ et pour tout champ de vecteur V_t le long de γ :

$$\frac{D(f(t)V(t))}{dt} = \dot{\alpha}(t)V(t) + \alpha(t)\frac{DV(t)}{dt}$$

Le champ du vecteur vitesse $t \mapsto d\gamma/dt$ est un champ de vecteur le long de γ alors que l'accélération $t \mapsto d^2\gamma/dt^2$ (calculée dans l'espace ambient $\mathbb{R}^m$) n'en est pas nécessairement un. D'autre part, le champ du vecteur vitesse $t \mapsto d\gamma/dt$ le long de γ est transporté parallèlement par γ si et seulement si

$$(\forall \sigma) \qquad \ddot{\gamma}^\sigma(t) + \dot{\gamma}^\mu(t)\dot{\gamma}^\nu(t)\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\big(\gamma(t)\big) = 0 \tag{51}$$

Nous verrons (c.f. infra § 13) comment le système d'équations différentielles (51) permet de décrire les géodésiques sur M, lorsque M et munie d'une métrique pseudo-riemannienne et associée à la connexion de Levi-Civita. La proposition suivante est une conséquence directe du Théorème de Cauchy-Lipchitz.

Proposition 12.2. *Soit $\gamma :]a\,; b[\to M$ un germe de chemin en un point $X \in M$ (i.e. $a < 0 < b$ et $\gamma(0) = X$) et de support est dans le domaine d'un système de coordonnées ; alors, pour tout $a < t < b$ il existe une application linéaire $\Pi^t_\gamma : T_X(0) \to T_{\gamma(t)}M$ (appelé propagateur) t.q. pour pour tout vecteur $v \in T_X M$ le champ de vecteur $t \mapsto \Pi^t_\gamma(v)$ est transporté parallèlement le long de γ, en ce sens que c'est la solution maximale du problème de Cauchy*

$$(\forall \sigma) \quad \dot{V}^\sigma(t) + \dot{\gamma}^\mu(t) V^\nu(t) \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}(\gamma(t)) = 0 \quad \textit{et} \quad V^\sigma(0) = v^\sigma \tag{52}$$

Rappelons que lorsque M est munie d'une métrique pseudo-riemannienne g, la connexion $\boldsymbol{D}$ est dite g-compatible (ou encore métrique) si pour tout $U, V, W \in \mathfrak{T}^1_0(TM)$

$$U\Big(g(V, W)\Big) = g\big(\boldsymbol{D}_U(V), W\big) + g\big(V, \boldsymbol{D}_U(W)\big) \tag{53}$$

La proposition suivante montre que dans le cas où $\boldsymbol{D}$ est une connexion métrique (et en particulier pour la connexion de Levi-Civita), chaque propagateur Π^t_γ, le long d'un germe de chemin γ en un point X de M est une isométrie de $T_X M$ sur $T_{\gamma(t)}M$.

Proposition 12.3. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne et soit D/dt la dérivation covariante associée à une connexion $\boldsymbol{D}$ supposée métrique : alors, étant données $t \mapsto V_t$ et $t \mapsto W_t$ deux champs de vecteurs quelconques le long d'un chemin γ sur M :*

$$\frac{d}{dt}g(V_t, W_t) = g\left(\frac{DV_t}{dt}, W_t\right) + g\left(V_t, \frac{DW_t}{dt}\right) \tag{54}$$

En particulier si V et W sont transportés parallèlement par γ, alors

$$\frac{d}{dt}g(V_t, W_t) = 0$$

Preuve. Soit $\boldsymbol{D}$ une connexion métrique sur (M, g) et soit $t \mapsto V_t$ et $t \mapsto W_t$ deux champs de vecteurs le long d'un chemin γ. Pour démontrer (54), il suffit de considérer d'une part que les champs de vecteurs $t \mapsto V_t$ et $t \mapsto W_t$ le long de γ sont des restrictions de deux champs de vecteurs sur M – soient V et W – de sorte que $V_t = V|_{\gamma(t)}$ et $W_t = W|_{\gamma(t)}$ et d'autre part, que γ est une courbe intégrale d'un troisième champ de vecteur U, dont le support est contenu dans le domaine d'une système de coordonnées locales (dans ce cas on a donc $\dot\gamma(t) = U|_{\gamma(t)}$). Alors, d'après la définition de la compatibilité métrique de $\boldsymbol{D}$,

$$U|_X\Big(g(V, W)\Big) = g\Big(\boldsymbol{D}_U(V)|_X, W|_X\Big) + g\Big(V|_X, \boldsymbol{D}_U(W)|_X\Big) \tag{55}$$

Or, pour $X = \gamma(t)$ il vient $\boldsymbol{D}_U(V)|_{\gamma(t)} = DV/dt$ et $\boldsymbol{D}_U(W)|_{\gamma(t)} = DW/dt$, et (55) devient :

$$U|_{\gamma(t)}\Big(g(V, W)\Big) = g\left(\frac{DV_t}{dt}, W_t\right) + g\left(V_t, \frac{DW_t}{dt}\right)$$

Par définition de U relativement au chemin γ, nous avons $U|_{\gamma(t)}(f) = d/dt(f \circ \gamma)$, pour tout champ scalaire f sur M : nous obtenons (54) en prenant $f(X) := g(U|_X, V|_X)$.

□

13. Géodésiques inertielles : Théorème de Levi-Civita

Dans ce ce paragraphe, nous supposerons que la variété pseudo-riemannienne (M, g) (de dimension n) est munie de la connexion de Levi-Civita $(U, V) \mapsto \nabla_U(V)$. Rappelons que les coefficients de ∇ coïncident avec les symboles de Christoffel i.e.

$$\nabla_{\partial_\mu}(\partial_\nu) = \mathsf{C}^\sigma{}_{\mu\nu}\partial_\sigma \quad \text{où} \quad \mathsf{C}^\sigma{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\epsilon}\Big(\partial_\mu(g_{\epsilon\nu}) + \partial_\nu(g_{\mu\epsilon}) - \partial_\epsilon(g_{\mu\nu})\Big)$$

Ainsi, ∇ est une connexion qui est sans torsion et g-compatible (et c'est la seule connexion ayant ces deux propriétés). Enfin, U et V étant deux champs de vecteurs sur M, le champ de vecteurs $\nabla_U(V)$ s'écrit (en coordonnées)

$$\nabla_U(V) = U^\mu \nabla_\mu(V^\nu)\partial_\nu \quad \text{avec} \quad \nabla_\mu(V^\nu) := \partial_\mu(V^\nu) + V^\epsilon \mathsf{C}^\nu{}_{\epsilon\mu} \tag{56}$$

où on reconnait les composantes des dérivées partielles covariantes $\nabla_\mu(V^\nu)$ associée à V.

Nous allons maintenant voir comment les géodésiques sur M définies par un principe de moindre action, peuvent être caractérisées comme solutions d'une équation différentielle du second ordre s'interprétant en terme de transport parallèle. Pour cela, considérons d'abord que $\mathcal{V}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit

$$(q^1, \ldots, q^n, \dot q^1 \ldots, \dot q^n) = (q, \dot q) \mapsto L(q, \dot q)$$

un lagrangien [24] défini sur $\mathcal{V} \times \mathbb{R}^n$. Le chemin $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{q}^1, \ldots, \boldsymbol{q}^n) : [a\,; b] \to \mathcal{V}$ sera appelé une L-géodésique s'il satisfait le système des équations d'Euler-Lagrange i.e.

$$(\forall\sigma) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q^\sigma}\big(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)\big) = \frac{\partial L}{\partial q^\sigma}\big(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)\big)$$

24. Ici on se restreint à un lagrangien stationnaire en ce sens qu'il ne dépend pas d'un paramètre temporel ; on exige seulement que les dérivées partielles $\partial L/\partial q^\mu$ et $\partial L/\partial \dot q^\mu$ existent et soient continues.

Théorème 13.1 (Levi-Civita)**.** *Soit* (M, g) *une variété pseudo-riemannienne de dimension* n *munie de la connexion de Levi-Civita et soit* $\boldsymbol{x} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ *une carte. Nous considérons le lagrangien-inertiel défini pour tout* $(q, \dot{q}) \in \boldsymbol{x}(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}^n$ *en posant*

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu G_{\mu\nu}(q)$$

où $G_{\mu\nu}(q) = g_{\mu\nu}(X)$ *dès que* $q = \boldsymbol{x}(X)$*. Si* $\gamma^1, \ldots, \gamma^n$ *sont les* $\boldsymbol{x}$*-composantes d'un germe de chemin* $\gamma : [a\,; b] \to \mathcal{U}$ *en un point* $X = \gamma(0) \in \mathcal{U}$ *– en ce sens que* $\boldsymbol{x}(\gamma(t)) = (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t))$ *– alors* $t \mapsto (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t))$ *est une L-géodésique (dans* $\boldsymbol{x}(\mathcal{U})$*) ssi le champ du vecteur vitesse de* $t \mapsto \gamma(t)$ *est transporté parallèlement suivant* γ*, ce qui se traduit par le système différentiel*

$$(\forall k) \qquad \ddot{\gamma}^\sigma(t) + \dot{\gamma}^\mu(t) \dot{\gamma}^\nu(t) \mathsf{C}^\sigma{}_{\mu\nu}\big(\gamma(t)\big) = 0$$

On dit que γ *est une géodésique issue de* X*. De plus (Théorème de Cauchy-Lipschitz)* γ *est déterminées par le conditions initiales* $\gamma(0) = X$ *et* $\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}^\mu(0) \partial_\mu|_X =: v \in T_X M$ *et on écrira*

$$\gamma(t) = \exp_X(tv) \tag{57}$$

Preuve. Nous commençons par calculer les dérivées partielles de L. D'une part,

$$\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial}{\partial q^\sigma} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu G_{\mu\nu}(q) \right) = \frac{1}{2} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial q^\sigma}$$

et d'autre part (en utilisant la symétrie $G_{\mu\sigma} = G_{\sigma\mu}$)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu G_{\mu\nu}(q) \right) = \dot{q}^\mu G_{\mu\sigma}(q)$$

Les équations d'Euler-Lagrange pour $t \mapsto (\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t))$ $(\in \boldsymbol{x}(\mathcal{U}))$ s'écrivent alors :

$$(\forall \sigma) \quad \ddot{\gamma}^\mu(t) g_{\mu\sigma}(\gamma(t)) + \dot{\gamma}^\mu(t) \dot{\gamma}^\nu(t) \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial \boldsymbol{x}^\nu}(\gamma(t)) = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^\mu(t) \dot{\gamma}^\nu(t) \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \boldsymbol{x}^\sigma}(\gamma(t))$$

Or, il est évident par la convention sommatoire d'Einstein que

$$\dot{\gamma}^{\mu}(t) \dot{\gamma}^{\nu}(t) \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial \boldsymbol{x}^{\nu}}(\gamma(t)) = \dot{\gamma}^{\nu}(t) \dot{\gamma}^{\mu}(t) \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mu}}(\gamma(t))$$

d'où l'identité

$$\dot{\gamma}^\mu(t) \dot{\gamma}^\nu(t) \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial \boldsymbol{x}^\nu}(\gamma(t)) = \frac{1}{2} \dot{\gamma}^\mu(t) \dot{\gamma}^\nu(t) \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial \boldsymbol{x}^\nu}(\gamma(t)) + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial \boldsymbol{x}^\mu}(\gamma(t)) \right)$$

et nous obtenons une forme équivalente des équations d'Euler-Lagrange, soient :

$$(\forall \sigma) \quad \ddot{\gamma}^\mu(t) g_{\sigma\nu}(\gamma(t)) + \frac{1}{2} \dot{\gamma}^\mu(t) \dot{\gamma}^\nu(t) \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial \boldsymbol{x}^\nu}(\gamma(t)) + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial \boldsymbol{x}^\mu}(\gamma(t)) - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \boldsymbol{x}^\sigma}(\gamma(t)) \right) = 0$$

soient encore, par définition des symboles de Christoffel de première espèce :

$$(\forall \sigma) \quad \ddot{\gamma}^\mu(t) g_{\sigma\nu}(\gamma(t)) + \dot{\gamma}^\nu(t) \dot{\gamma}^\mu(t) \mathsf{C}_{\sigma\mu\nu}(\gamma(t)) = 0$$

Comme $g^{\sigma\sigma} g_{\mu\sigma} = g^{\sigma\sigma} g_{\sigma\mu} = \delta^\sigma{}_\mu$ et $g^{\sigma\sigma} \mathsf{C}_{\sigma\mu\nu} = \mathsf{C}^\sigma{}_{\mu\nu}$, nous retrouvons :

$$(\forall \sigma) \quad \ddot{\gamma}^\sigma(t) + \dot{\gamma}^\mu(t) \dot{\gamma}^\nu(t) \mathsf{C}^\sigma{}_{\mu\nu}(\gamma(t)) = 0$$

□

Remarque 13.2. *Supposons (M, g) riemannienne, isométriquement plongée dans $\mathbb{R}^m$ euclidien et munie de la connexion de Levi-Civita. Dire que $t \mapsto \gamma(t)$ est une géodésique sur M signifie que le vecteur vitesse $t \mapsto d\gamma/dt$ est transporté parallèlement le long de $t \mapsto \gamma(t)$. Par suite, la connexion de Levi-Civita étant en particulier métrique, nous en déduisons (Proposition 12.3) que la norme de $\dot{\gamma}(t)$ (i.e. la norme dans l'espace tangent aussi que dans l'espace ambiant) reste constante le long de γ et donc $0 = d/dt \left\langle \dot{\gamma}(t) \middle| \dot{\gamma}(t) \right\rangle = 2 \left\langle \ddot{\gamma}(t) \middle| \dot{\gamma}(t) \right\rangle$. Cela signifie que l'accélération de γ (calculée dans $\mathbb{R}^m$ euclidien) est normale au vecteur vitesse.*

14. Dérivation covariante des champs de tenseurs

Dans ce paragraphe, nous supposons que (M, g) est pseudo-riemannienne et munie d'une connexion $\boldsymbol{D}$ quelconque. En composante, la dérivée covariante d'un $(1,0)$-tenseur $V = V^\mu \partial_\mu$ est un tenseur de valence $(1,1)$ noté $D(V)$ et dont les composantes sont

$$D(V)^\mu{}_\nu = D_\nu(V^\mu) = \partial_\nu(V^\mu) + V^\epsilon \Gamma^\mu{}_{\epsilon\nu}$$

La dérivation covariante se généralise en une transformation D de l'ensemble $\mathfrak{T}(TM) := \coprod_{p,q} \mathfrak{T}^p_q(TM)$ de tous les tenseurs sur M déterminée par les *axiomes* $(\mathbf{DC0:5})$ dans la Proposition 14.1 ci-dessous. Tous ces axiomes sont raisonnablement *naturels*, excepté (peut-être) l'axiome $(\mathbf{DC3})$ qui fait intervenir la contraction des indices des champs de tenseurs. Rappelons (c.f. § 4) que lorsque E est un espace euclidien de dimension finie, la contraction d'indice $[^r{}_s]$ est définie sur le produit tensoriel $\bigotimes^{p,q} E$ (pour $p, q \geq 1$, $1 \leq r \leq p$ et $1 \leq q \leq s$) et à valeur dans $\bigotimes^{p-1,q-1} E$. En utilisant la métrique g sur M, cette application s'étend simplement aux champs de tenseurs en une application

$$[^r{}_s] : \mathfrak{T}^p_q(TM) \to \mathfrak{T}^{p-1}_{q-1}(TM)$$

où avec un abus de notations $[^r{}_s](F)|_X = [^r{}_s](F|_X)$. Nous verrons que $(\mathbf{DC3})$ permet la définition inductive de D, de sorte que la dérivation covariante d'une forme différentielle ξ s'écrit en composantes

$$D(\xi)_{\mu\nu} = D_\nu(\xi_\mu) = \partial_\mu(\xi_\nu) - \xi_\epsilon \Gamma^\epsilon{}_{\mu\nu}$$

Proposition 14.1. *Étant donnée (M, g) est une variété pseudo-Riemannienne munie d'une connexion $\boldsymbol{D}$ quelconque, la dérivation covariante des tenseurs (relativement à $\boldsymbol{D}$) est l'unique application $D : \mathfrak{T}(TM) \to \mathfrak{T}(TM)$ qui vérifie les six axiomes suivantes :*

$(\mathbf{DC0})$ *: pour tout $f \in \mathfrak{T}^0_0(TM) = \mathcal{C}^\infty(M)$, $D(f)$ est le tenseur $(0,1)$ (appelé gradient covariant de f) dont les composantes sont*

$$D(f)_\mu = D_\mu(f) = \partial_\mu(f)$$

$(\mathbf{DC1})$ *: pour tout $V \in \mathfrak{T}^1_0(TM)$ de composantes V^μ, la dérivée covariante $D(V)$ est le tenseur $(1,1)$ de composantes*

$$D(V)^\mu{}_\nu = D_\nu(V^\mu) = \partial_\nu(V^\mu) + V^\sigma \Gamma^\mu{}_{\sigma\nu}$$

$(\mathbf{DC2})$ *: la dérivée covariante d'un tenseur F de valence (p,q) est un tenseur $D(F)$ de valence $(p, q+1)$ dont on écrit les composantes sous la forme (conventionnelle)*

$$D(F)^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q \epsilon} =: D_\epsilon(F^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q}) = F^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q ; \epsilon})$$

$(\mathbf{DC3})$ *: la dérivation covariante D commute avec la contraction d'indice $[^r{}_s]$ en ce sens que*

$$D\big([^r{}_s](F)\big) = [^r{}_s]\big(D(F)\big) \quad \textit{(lorsque cela a un sens)}$$

$(\mathbf{DC4})$ *: pour $A, B \in \mathfrak{T}^p_q(TM)$*

$$D(A+B) = D(A) + D(B)$$

$(\mathbf{DC5})$ *: D satisfait la règle de Leibnitz généralisée : pour $A \in \mathfrak{T}^p_q(TM)$ et $B \in \mathfrak{T}^r_s(TM)$*

$$D(A \otimes B) = D(A) \otimes B + A \otimes D(B)$$

Par définition l'application

$$F^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} \mapsto D_\epsilon(F^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}) = F^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q;\epsilon}$$

est la dérivée partielle covariante D_ϵ étendues aux composantes des tenseurs.

Au lieu de donner une démonstration de la Proposition 14.1 (i.e. la vérification de la consistance des axiomes) nous préférons donner un aperçu de l'articulation de ces axiomes en effectuant le calcul de la dérivée covariantes dans le cas (important) d'une forme différentielle ξ. Soit alors V un champ de vecteurs arbitrairement donné ; alors, le tenseur $\xi \otimes V$ de composante $\xi_\nu V^\mu$ se contracte d'une seule manière possible sous forme d'un tenseur $(0,0)$ i.e. le champ scalaire $X \mapsto \xi|_X(V)$, que nous notons $\xi(V)$, et dont les composantes sont les $V^\nu\xi_\nu$. D'une part, d'après $(\mathbf{DC0})$

(58) $$D_\sigma\big(\xi(V)\big) = \xi(V)^\nu{}_{\nu;\sigma} = \partial_\sigma\big(\xi(V)^\nu{}_\nu\big) = \partial_\sigma(V^\nu\xi_\nu) = \partial_\sigma(V^\nu)\xi_\nu + V^\nu\partial_\sigma(\xi_\nu)$$

mais d'autre part, d'après $(\mathbf{DC4-5})$

$$D_\sigma(\xi \otimes V)^\mu{}_\nu = (\xi \otimes V)^\mu{}_{\nu;\sigma} = \xi_{\nu;\sigma}V^\mu + \xi_\nu V^\mu{}_{;\sigma}$$

et du fait que $\xi(V) = [^1{}_1](\xi \otimes V)$ nous pouvons utiliser $(\mathbf{DC3})$ et écrire

$$D_\sigma\big(\xi(V)\big) = [^1{}_1](\xi \otimes V)^\mu{}_{\nu;\sigma} = \xi_{\nu;\sigma}V^\nu + \xi_\nu V^\nu{}_{;\sigma}$$

Finalement en exprimant $D_\sigma(V^\nu) = V^\nu{}_{;\sigma}$ par $(\mathbf{DC1})$ il vient avec (58)

$$\partial_\sigma(V^\nu)\xi_\nu + V^\nu\partial_\sigma(\xi_\nu) = \xi_{\nu;\sigma}V^\nu + \xi_\nu\big(\partial_\sigma(V^\nu) + V^\epsilon\Gamma^\nu{}_{\epsilon\sigma}\big)$$

soit encore,

$$\xi_{\nu;\sigma}V^\nu = V^\nu\partial_\sigma(\xi_\nu) - \xi_\nu V^\epsilon\Gamma^\nu{}_{\epsilon\sigma} = \partial_\sigma(\xi_\nu)V^\nu - \xi_\epsilon V^\nu\Gamma^\epsilon{}_{\nu\sigma}$$

Cette dernière identité étant valable pour tout V, nous en concluons que

$$D_\sigma(\xi_\nu) = \partial_\sigma(\xi_\nu) - \xi_\epsilon\Gamma^\epsilon{}_{\nu\sigma}$$

Plus généralement, les *axiomes* de la dérivation covariante des tenseurs permettent de déduire (de manière analogue aux calculs donnant l'expression de $D_\sigma(\xi_\nu)$) la formule de dérivation covariante des tenseurs en composantes, i.e. en donnant l'expression des dérivations partielles covariantes étendues aux composantes de valence quelconques.

Proposition 14.2. *Soient* $F^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ *les composantes d'un tenseur* $F \in \mathfrak{T}^p_q(TM)$ *; alors la dérivée covariante* DF *est un tenseur de* $\mathfrak{T}^p_{q+1}(TM)$ *dont les composantes sont* [25] *:*

$$\begin{aligned} D(F)^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q\epsilon} &= D_\epsilon(F^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}) \\ &= \partial_\epsilon(F^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}) + \sum_{r=1}^{p} F^{\mu_1\cdots(\sigma\leftarrow\mu_r)\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}\Gamma^{\mu_r}{}_{\sigma\epsilon} \\ &\qquad - \sum_{s=1}^{q} F^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots(\sigma\leftarrow\nu_s)\cdots\nu_q}\Gamma^{\sigma}{}_{\nu_s\epsilon} \end{aligned}$$

et par définition, pour tout $U = U^i\partial_i$*, nous posons :*

$$D_U(F) := U^\epsilon D_\epsilon(F^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q})\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{\mu_p}} \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\nu_q}$$

La proposition suivante est une conséquence de la formule des dérivées covariantes des tenseurs en composantes, pour une connexion quelconque (c.f. Proposition 14.2).

Théorème 14.3. *Si* $\boldsymbol{D}$ *est une connexion sur une variété pseudo-riemannienne* (M, g) *alors,*

$$(i) \iff (ii) \iff (iii)$$

où nous avons les propositions suivantes, soient (i) *:* $\boldsymbol{D}$ *est métrique ;* (ii) *:* $\boldsymbol{D}(g) \equiv 0$ *et* (iii) *: les dérivations partielles covariantes de* $\boldsymbol{D}$ *commutent avec l'abaissement/relèvement d'indices.*

Preuve. $(i) \iff (ii)$: Étant donnée $\boldsymbol{D}$ une connexion arbitraire de coefficients $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$, la formule de la dérivée covariante des tenseurs en composantes (c.f. Proposition 14.2) appliquée au tenseur métrique nous permet d'écrire :

$$D_\lambda(g_{\mu\nu}) = \partial_\lambda(g_{\mu\nu}) - g_{\nu\epsilon}\Gamma^\epsilon{}_{\lambda\mu} - g_{\mu\epsilon}\Gamma^\epsilon{}_{\lambda\nu} = \partial_\lambda(g_{\mu\nu}) - \left(\Gamma_{\nu\lambda\mu} + \Gamma_{\mu\lambda\nu}\right)$$

L'équivalence annoncée vient avec la partie (ii) de la Proposition 10.1.

$(ii) \iff (iii)$: Nous considérons le cas de l'abaissement d'indice, le cas du relèvement étant analogue (le fait que $\boldsymbol{D}(g) = 0$ entraîne aussi que $D_\sigma(g^{\mu\nu}) = 0$). Si nous supposons que $\boldsymbol{D}(g) \equiv 0$, alors pour tout tenseur $F \in \mathfrak{T}^p_q(TM)$ de $\boldsymbol{x}$-composantes $F^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ le calcul de la dérivé covariance du produit donne

$$\begin{aligned} D_\sigma(g_{\tau\mu_i}F^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}) &= D_\sigma(g_{\tau\mu_i})F^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} + g_{\tau\mu_i}D_\sigma(F^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}) \\ &= g_{\tau\mu_i}D_\sigma(F^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}) \end{aligned}$$

la conclusion venant du fait que $D_\sigma(g_{\tau\mu_i}) = 0$. Réciproquement, si nous supposons la commutation des dérivées partielles covariances D_σ avec l'abaissement des indices, alors nous pouvons écrire : $D_\sigma(g_{\mu\nu}) = g_{\mu\nu}D_\sigma(1) = 0$.

□

15. Opérateurs différentiels

15.1. **Gradient polaire classique.** Une difficulté de l'analyse vectorielle classique porte sur l'expression des opérateurs différentiels (gradient, divergence, laplacien,...) lors d'une changement de système de coordonnées. Considérons par exemple que $\mathbb{R}^2$ est rapporté

25. Nous notons $(\sigma \leftarrow k)$ le remplacement d'un indice k par l'indice ϵ.

à la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et soit $\mathcal{U} =]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}$. L'expression cartésienne du gradient (vecteur) $\mathrm{grad}(f)$ d'un champ scalaire $(x,y) \mapsto f(x,y)$ défini sur $\mathcal{U}$ s'écrit :

$$\mathrm{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_2 \tag{59}$$

Notons $\hat{f}(\rho,\theta) = f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$ l'expression de f dans les coordonnées polaires et $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$ la base *mobile* polaire au point $(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$ (i.e. $\mathbf{e}_\rho := \cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_\theta := -\sin(\theta)\mathbf{e}_1 + \cos(\theta)\mathbf{e}_2$) : un rapide examen montre que

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta$$

ne correspond pas au gradient en (59). Pour obtenir l'expression du gradient polaire, il nous faut partir d'une définition précise . Nous utilisons *l'heuristique* du calcul infinitésimal de Leibnitz : si $X \in \mathcal{U}$ et si dX est un vecteur déplacement infinitésimal,

$$f(X + dX) - f(X) = \left\langle \mathrm{grad}(f) \middle| dX \right\rangle$$

En coordonnées cartésiennes, $X = (x, y)$ et $dX = dx\mathbf{e}_1 + dy\mathbf{e}_2$: nous retrouvons l'expression du gradient de f en (59), par l'approximation différentielle de f en (x, y) qui s'écrit

$$f(x + dx, y + dy) - f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Pour trouver l'expression polaire du gradient de f, nous considérons le déplacement polaire infinitésimal, soit $dX = d\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho d\theta\,\mathbf{e}_\theta$: ainsi nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathrm{grad}(f) \middle| dX \right\rangle &= \hat{f}(\rho + d\rho, \theta + d\theta) - \hat{f}(\rho,\theta) \\
&= \frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho}d\rho + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}d\theta \\
&= \left\langle \frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta \middle| d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho d\theta\mathbf{e}_\theta \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta \middle| dX \right\rangle
\end{aligned}$$

et finalement, l'accroissement dX étant quelconque (sic)

$$\mathrm{grad}(f) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta \tag{60}$$

15.2. **Gradient pseudo-riemannien.** Retrouvons la définition du gradient vecteur pour un champ scalaire $f : M \to \mathbb{R}$ défini sur une variété pseudo-riemannienne (M, g) munie de la connexion de Levi-Civita ∇. Ici la situation est simplifiée par l'axiome (**DC0**) de la dérivation covariante des tenseurs : dans un système $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^n)$ de coordonnées locales, les dérivées partielles $\partial_i(f) = \partial f/\partial \boldsymbol{x}^i$ coïncident avec les dérivées partielles covariantes $\nabla_i(f)$ et sont les composantes d'un tenseur $(0, 1)$, i.e. le gradient covariant [26] $\nabla(f)$. Le gradient vecteur $\mathrm{grad}(f)$ (ou gradient contravariant) s'obtient par le relèvement de l'indice covariant de $\nabla_i(f)$: les composantes de $\mathrm{grad}(f)$ sont donc les $g^{ij}\partial_j(f)$, soit :

$$\mathrm{grad}(f) = g^{ij}\partial_j(f)\partial_i \tag{61}$$

26. Attention aux confusions possibles avec les notations d'analyse vectorielle classique !

Revenons à l'ouvert de $\mathcal{U} =]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}^2$: dans l'analyse vectorielle classique $\mathcal{U}$ est considéré (implicitement comme une variété riemannienne munie de la métrique euclidienne canonique. Dans le cas considéré ici, les *coordonnées polaires* sont déterminées par le système de coordonnées $\mathcal{U} \ni (x,y) \mapsto \big(\boldsymbol{\rho}(x,y), \boldsymbol{\theta}(x,y)\big)$ où

$$\boldsymbol{\rho}(x,y) := (x^2+y^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\theta}(x,y) := \mathrm{Arcsin}(y/x)$$

Alors la base holonôme polaire s'exprime en fonction de la base mobile polaire $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$ avec $\partial_\rho = \mathbf{e}_\rho$ et $\partial_\theta = \rho\mathbf{e}_\theta$: les coefficients polaires de la métrique (plate) sont alors

$$\begin{pmatrix} \langle\partial_\rho|\partial_\rho\rangle & \langle\partial_\rho|\partial_\theta\rangle \\ \langle\partial_\theta|\partial_\rho\rangle & \langle\partial_\theta|\partial_\theta\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\rho\rho} & g_{\rho\theta} \\ g_{\rho\theta} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} g^{\rho\rho} & g^{\rho\theta} \\ g^{\rho\theta} & g^{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{pmatrix}$$

Si $f(x,y)$ est la valeur prise par l'application $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ au point de coordonnées cartésiennes (x,y) alors la valeur correspondante en coordonnées polaires est $\hat{f}(\rho,\theta) = f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$: avec la définition tensorielle en (61) nous retrouvons

$$\mathrm{grad}(f) = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{f}}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta$$

15.3. **Divergence polaire classique.** Le calcul de la divergence d'un champ de vecteur est un outils essentiel de l'analyse vectorielle. La divergence est – entre autre – liée à l'équation des ondes ainsi qu'à l'équation de la chaleur ; elle permet aussi de caractériser l'écoule des fluide incompressibles. Soit $X \mapsto V(X)$ un champ de vecteur défini pour tout *point* $X \in \mathcal{U} =]0\,;+\infty[\times\mathbb{R}$. Écrivons (V^1, V^2) les composantes cartésiennes de V ; si (ρ,θ) (resp. (x,y)) sont les coordonnées polaires (resp. cartésiennes) de X, alors, $V^i(x,y) = V^i \circ \Phi(\rho,\theta)$, où $\Phi(\rho,\theta) = \big(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta)\big)$. Par suite, en partant de la définition de la divergence de V en coordonnées cartésiennes, nous obtenons successivement :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(V) &= \Big\langle \mathrm{grad}(V^1) \Big| \mathbf{e}_1 \Big\rangle + \Big\langle \mathrm{grad}(V^2) \Big| \mathbf{e}_2 \Big\rangle \\
&= \left\langle \left(\frac{\partial V^1 \circ \Phi}{\partial \rho}\right)\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial V^1 \circ \Phi}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_\theta \middle| \cos(\theta)\mathbf{e}_\rho - \sin(\theta)\mathbf{e}_\theta \right\rangle + \\
&\quad \left\langle \left(\frac{\partial V^2 \circ \Phi}{\partial \rho}\right)\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial V^2 \circ \Phi}{\partial \theta}\right)\mathbf{e}_\theta \middle| \sin(\theta)\mathbf{e}_\rho - \cos(\theta)\mathbf{e}_\theta \right\rangle \\
&= \frac{\partial V^1 \circ \Phi}{\partial \rho}\cos(\theta) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial V^1 \circ \Phi}{\partial \theta}\sin(\theta) + \frac{\partial V^2 \circ \Phi}{\partial \rho}\sin(\theta) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V^1 \circ \Phi}{\partial \theta}\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Maintenant, si $(\hat{V}^1, \hat{V}^2)$ sont les composantes polaires de V, alors

$$V^1 \circ \Phi = \cos(\theta)\hat{V}^1 - \sin(\theta)\hat{V}^2 \quad \text{et} \quad V^2 \circ \Phi = \sin(\theta)\hat{V}^1 + \cos(\theta)\hat{V}^2$$

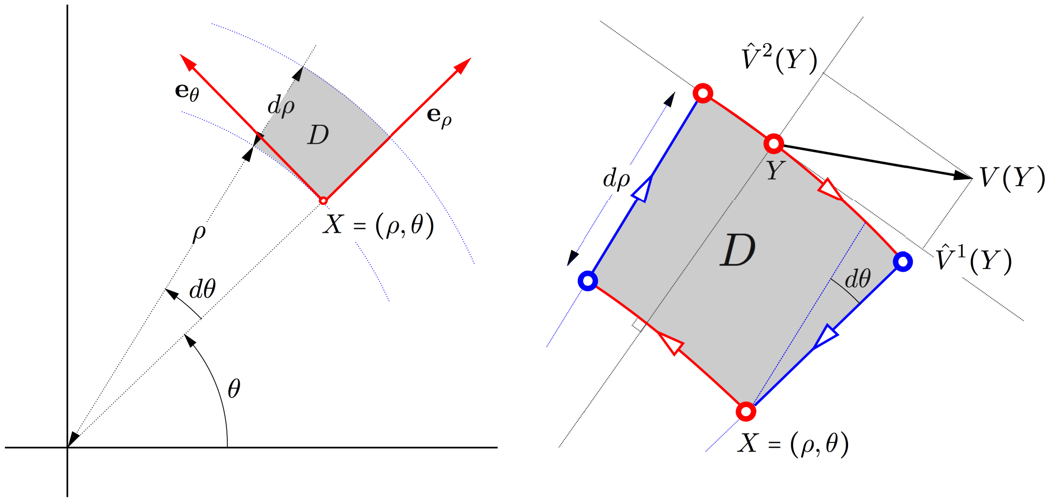

FIGURE 4. *Domaine polaire infinitésimal.*

de sorte que

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(V) &= \frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\cos(\theta)\hat{V}^1 - \sin(\theta)\hat{V}^2\Big)\cos(\theta) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\cos(\theta)\hat{V}^1 - \sin(\theta)\hat{V}^2\Big)\sin(\theta) + \\
&\quad \frac{\partial}{\partial \rho}\Big(\sin(\theta)\hat{V}^1 + \cos(\theta)\hat{V}^2\Big)\sin(\theta) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\Big(\sin(\theta)\hat{V}^1 + \cos(\theta)\hat{V}^2\Big)\cos(\theta) \\
&= \cos^2(\theta)\frac{\partial \hat{V}^1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\left(\sin(\theta)\hat{V}^1 - \cos(\theta)\frac{\partial \hat{V}^1}{\partial \theta} + \cos(\theta)\hat{V}^2 + \sin(\theta)\frac{\partial \hat{V}^2}{\partial \theta}\right)\sin(\theta) + \\
&\quad \sin^2(\theta)\frac{\partial \hat{V}^1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\left(\cos(\theta)\hat{V}^1 + \sin(\theta)\frac{\partial \hat{V}^1}{\partial \theta} - \sin(\theta)\hat{V}^2 + \cos(\theta)\frac{\partial \hat{V}^2}{\partial \theta}\right)\cos(\theta) \\
&= \frac{\partial \hat{V}^1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\hat{V}^1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{V}^2}{\partial \theta}\cos(\theta)
\end{aligned}$$

et finalement

$$\mathrm{div}(V) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho \hat{V}^1)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{V}^2}{\partial \theta}$$

Un raisonnement analogue en polaire ne donne pas le même résultat, puisque

$$\begin{aligned}
\big\langle \mathrm{grad}(\hat{V}^1)|\mathbf{e}_\rho\big\rangle + \big\langle \mathrm{grad}(\hat{V}^2)|\mathbf{e}_\theta\big\rangle &= \left\langle \frac{\partial \hat{V}^1}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{V}^1}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta \middle| \mathbf{e}_\rho \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \hat{V}^2}{\partial \rho}\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{V}^2}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta \middle| \mathbf{e}_\theta \right\rangle \\
&= \frac{\partial \hat{V}^1}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{V}^2}{\partial \theta}.
\end{aligned}$$

Cela est dû au fait que la base $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$ dépend des coordonnées locales polaires (ρ, θ). D'une manière purement géométrique (et dans l'approximation différentielle) la divergence de V en (ρ, θ) est constante dans le domaine polaire infinitésimal en (ρ, θ) (d'aire $\rho d\rho d\theta$). Par suite, en intégrant le flux sortant de V à travers le bord de ce domaine (forme locale du théorème du flux divergence : voir Figure 4), il vient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(V) &= \frac{1}{\rho d\rho d\theta}\Big(\hat{V}^1(\rho+d\rho,\theta)(\rho+d\rho)d\theta - \hat{V}^1(\rho,\theta)\rho d\theta + \hat{V}^2(\rho,\theta+d\theta)d\rho - \hat{V}^2(\rho,\theta)d\rho\Big) \\
&= \frac{1}{\rho d\rho d\theta}\left(\left(\hat{V}^1 + \frac{\partial \hat{V}^1}{\partial\rho}d\rho\right)(\rho d\theta + d\rho d\theta) - \hat{V}^1\rho d\theta + \left(\hat{V}^2 + \frac{\partial \hat{V}^2}{\partial\theta}d\theta\right)d\rho - \hat{V}^2 d\rho\right) \\
&= \frac{1}{\rho}\left(\hat{V}^1 + \frac{\partial \hat{V}^1}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{V}^2}{\partial\theta} + \frac{d\rho}{\rho}\frac{\partial \hat{V}^1}{\partial\rho}
\end{aligned}$$

et nous retrouvons

$$\mathrm{div}(V) = \frac{1}{\rho}\left(\hat{V}^1 + \frac{\partial \hat{V}^1}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{V}^2}{\partial\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\hat{V}^1)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \hat{V}^2}{\partial\theta}$$

Le calcul de la divergence d'un champ de vecteur dans le cadre pseudo-riemannien ne peut se traiter élémentairement (comme nous l'avons fait au § 15.2 pour le gradient). Plus généralement, la définition des opérateurs différentiels sur une variété dépend essentiellement de la dérivation covariante.

15.4. **Divergence et laplacien pseudo-riemanniens.** Lorsque (M,g) est pseudo-riemannienne et munie de la connexion de Levi-Civita ∇, la divergence peut être définie pour les champs de tenseurs. Étant donné $F \in \mathfrak{T}_q^{p+1}(TM)$ de $\boldsymbol{x}$-composantes $F^{i_0\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q}$, la divergence de F est le tenseur $\mathrm{div}(F) \in \mathfrak{T}_q^p(TM)$ de $\boldsymbol{x}$-composantes

$$\mathrm{div}(F)^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q} = \nabla(F)^{i_1\cdots i_p\epsilon}{}_{j_1\cdots j_q\epsilon} = \nabla_\epsilon(F^{i_1\ldots i_p\epsilon}{}_{j_1\cdots j_q}) = F^{i_1\ldots i_p\epsilon}{}_{j_1\cdots j_q;\epsilon}.$$

Proposition 15.1. *La divergence d'un champ de vecteur V est un champ scalaire, soit*

$$\mathrm{div}(V) = \nabla_i V^i = \partial_i(V^i) + V^j \mathrm{C}^i{}_{ij} = \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{g}|}}\partial_i\left(V^i\sqrt{|\boldsymbol{g}|}\right) \tag{62}$$

où $\boldsymbol{g}$ désigne le déterminant de la matrice (g_{ij}).

La preuve de la Proposition 15.1 est basée sur la contraction de l'exposant contravariant des symboles de Christoffel [27].

Lemme 15.2. *Si $\boldsymbol{g} := \det(g_{ij})$ alors la contraction des symboles de Christoffel s'écrit :*

$$\mathrm{C}^i{}_{ik} = \frac{1}{2}g^{ij}\partial_k(g_{ij}) = \frac{1}{2\boldsymbol{g}}\partial_k(\boldsymbol{g}) = \frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{g}|}}\partial_k\sqrt{|\boldsymbol{g}|} = \partial_k\left(\log\sqrt{|\boldsymbol{g}|}\right) \tag{63}$$

Preuve. Soit $\boldsymbol{x}$ un système de coordonnées fixé. Partant de l'expression des symboles de Christoffel et profitant de la symétrie du tenseur métrique il vient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}^i{}_{ik} &= \frac{1}{2}\Big(g^{ij}\partial_i(g_{jk}) + g^{ij}\partial_k(g_{ij}) - g^{ij}\partial_j(g_{ik})\Big) \\
(i \leftrightarrow j) \quad &= \frac{1}{2}\Big(g^{ij}\partial_i(g_{jk}) + g^{ij}\partial_k(g_{ij}) - g^{ji}\partial_i(g_{jk})\Big) = \frac{1}{2}g^{ij}\partial_k(g_{ij})
\end{aligned}$$

Soient X et Y deux points du domaine de $\boldsymbol{x}$: pour simplifier nous supposons que $\boldsymbol{x}(X) = 0$ et que $\boldsymbol{x}(Y) = (y^1,\ldots,y^n)$. Nous allons utiliser le fait que

$$\det(\delta^i{}_j + h^i{}_j) \approx 1 + h^i{}_i + \max_{ij}\{|h^i{}_j|\}\varepsilon(h) \quad (\text{avec } \varepsilon(h) \to 0 \text{ and } h \to 0)$$

27. Il n'y a qu'une contraction possible du fait de la symmétrie $\mathrm{C}^k{}_{ij} = \mathrm{C}^k{}_{ji}$.

Alors, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\boldsymbol{g}(Y)=\det(g_{ij}(Y)) &= \det\left(g_{ij}(X)+y^k\partial_k|_X(g_{ij})+\cdots\right)\\ &= \det\left(g_{i\epsilon}\left(\delta^\epsilon{}_j+g^{\epsilon i}y^k\partial_k|_X(g_{ij})\right)+\cdots\right)\\ &= \boldsymbol{g}(X)\det\left(\delta^\epsilon{}_j+g^{\epsilon i}y^k\partial_k|_X(g_{ij})+\cdots\right)\\ &= \boldsymbol{g}(X)\Big(1+g^{\epsilon i}y^k\partial_k|_X(g_{i\epsilon})+\cdots\Big)=\boldsymbol{g}(X)+y^k\Big(\boldsymbol{g}(X)g^{ji}\partial_k|_X(g_{ij})\Big)+\cdots\end{aligned}$$

ce qui entraîne que $\partial_k|_X(\boldsymbol{g})=\boldsymbol{g}(X)g^{ij}\partial_k|_X(g_{ij})$, soit encore que

$$\frac{\partial_k(\boldsymbol{g})}{2\boldsymbol{g}}=\frac{1}{2}g^{ij}\partial_k(g_{ij})$$

□

Preuve de la Proposition 15.1. L'expression du symbole de Christoffel contracté $\mathsf{C}^i{}_{ij}$ (c.f. Lemma 15.2) permet d'écrire la divergence sous la forme :

$$\operatorname{div}(V)=\partial_i(V^i)+\frac{V^i}{\sqrt{|\boldsymbol{g}|}}\partial_i\left(\sqrt{|\boldsymbol{g}|}\right)$$

Or la dérivation partielle usuelle (des fonctions numériques) donne $1/\phi\partial_i(\psi\phi)=\partial_i(\psi)+(\psi/\phi)\partial_i(\phi)$ de sorte que pour $\phi=\sqrt{|\boldsymbol{g}|}$ et $\psi=V^i$ il vient :

$$\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{g}|}}\partial_i\left(V^i\sqrt{|\boldsymbol{g}|}\right)=\partial_i(V^i)+\frac{V^i}{\sqrt{|\boldsymbol{g}|}}\partial_i\left(\sqrt{|\boldsymbol{g}|}\right)$$

□

Pour terminer ce paragraphe, notons que le laplacien $\Delta(f)$ d'un champ scalaire $f:M\to\mathbb{R}$ est défini comme la divergence du gradient vecteur de f i.e.

$$\Delta(f)=\operatorname{div}\Big(\operatorname{grad}(f)\Big)=\nabla_i\big(g^{ij}\partial_j(f)\big)$$

Proposition 15.3. *En coordonnées locales, l'expression du laplacien de $f:M\to\mathbb{R}$ est*

$$\Delta(f)=g^{ij}\Big(\partial_{ij}(f)-\partial_k(f)\mathsf{C}^k{}_{ij}\Big)=\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{g}|}}\partial_i\Big(\sqrt{|\boldsymbol{g}|}g^{ij}\partial_j(f)\Big)$$

(Le laplacien ainsi défini en pseudo-riemannien est l'opérateur de Laplace-Beltrami.)

Preuve. D'une part, nous pouvons utiliser le fait que $\nabla_i g^{ij}=0$ pour écrire

$$\Delta(f)=\nabla_i\big(g^{ij}\partial_j(f)\big)=g^{ij}\nabla_i\big(\partial_j(f)\big)=g^{ij}\Big(\partial_{ij}(f)-\partial_k(f)\mathsf{C}^k{}_{ij}\Big)$$

D'autre part, en utilisant l'expression de la divergence en (62),

$$\Delta(f)=\operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))=\frac{1}{\sqrt{|\boldsymbol{g}|}}\partial_i\Big(\sqrt{|\boldsymbol{g}|}g^{ij}\partial_j(f)\Big)$$

□

16. **Notes**

Le livre de Bishop et Goldberg [BG68] donne une présentation complète du calcul tensoriel. On pourra aussi consulter, avec un grand intérêt, le travail de Bourguignon [Bou92] sur l'évolution des notions de transport parallèle et de connexion entre 1830 et 1930. De ce papier, nous tirons quelques points de repères : la notion de connexion apparait chez Christoffel [Chr69], le calcul différentiel absolue étant introduit par Ricci en 1888 [Ric88]. Le papier de référence sur le calcul différentiel absolu est cependant celui que publient Ricci et son élève Levi-Civita en 1900 [RTLC00] : il peut être considéré comme « *l'acte de naissance et le manuel fondamental du Calcul Tensoriel* ». Un premier cycle de développement des idées géométriques initiées par Gauss et Riemann s'achève avec le papier de Levi-Civita de 1917 [LC17] et l'introduction du transport parallèle : ainsi, (Théorème de Levi-Civita), un chemin satisfait l'équation des géodésiques inertielles si et seulement si il transporte parallèlement son vecteur vitesse. Il faut préciser ici que la forme du lagrangien inertiel impose que le transport parallèle du Théorème de Levi-Civita, soit nécessairement effectué relativement à la connexion de Levi-Civita. La présentation de Koszul [Kos50], place l'espace affine des connexions comme paradigme : la connexion de Levi-Civita est alors caractérisée par le Théorème d'Unicité : ce point de vue offre une multitude d'avantages, mais on y perd le lien avec le formalisme lagrangien.

17. **Appendices : Connexion de Levi-Civita d'une nappe de** $\mathbb{R}^3$

17.1. **Une connexion.** Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}^m$: comme d'habitude, $\mathbb{R}^m$ est supposé munie de sa structure euclidienne usuelle et de sa base canonique $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m)$. Étant donnés deux champs de vecteurs V et W définis sur $\mathcal{O}$ et de composantes cartésiennes respectives V^i et W^i, on voudrait définir le champ de vecteurs $\boldsymbol{D}_V(W)$, de sorte qu'en tout $X = (x^1, \dots, x^n)$ de $\mathcal{O}$, le vecteur $\boldsymbol{D}_V(W)|_X$ soit la dérivée en $t = 0$ du champ $t \mapsto W|_{\phi_V^t(X)}$ le long de la courbe intégrale $t \mapsto \phi_V^t(X)$ de V issue de X. Plus précisément, par approximations différentielles

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\Big(W|_{\phi_V^t(X)} - W|_{\phi_V^0(X)}\Big) &= \frac{1}{t}\Big(W^k(\phi_V^t(X)) - W^k(X)\Big)\mathbf{e}_k \\ &\approx \frac{1}{t}\Big(W^k(X + tV^\epsilon(X)\mathbf{e}_\epsilon) - W^k(X)\Big)\mathbf{e}_k \approx V^\epsilon(X)\frac{\partial W^k}{\partial x^\epsilon}\mathbf{e}_k\end{aligned}$$

Par définition, nous posons

$$\boldsymbol{D}_V(W) = V^\epsilon(X)\frac{\partial W^k}{\partial x^\epsilon}\mathbf{e}_k \tag{64}$$

L'application $(V, W) \mapsto \boldsymbol{D}_V(W)$ est bilinéaire et de plus, pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$,

$$\boldsymbol{D}_{fV}(W) = f\boldsymbol{D}_V(W) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{D}_V(fW) = V(f)W + f\boldsymbol{D}_V(W) \tag{65}$$

En d'autre termes, $(V, W) \mapsto \boldsymbol{D}_V(W)$ est une connexion sur $\mathcal{O}$. Pour tout $X \in \mathcal{O}$, soit $\mathrm{Sp}_X(V, W)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par $V|_X$ et $W|_X$ et notons $\boldsymbol{D}_V^{\tan}(W)|_X$ la projection orthogonale de $\boldsymbol{D}_V(W)|_X$ sur $\mathrm{Sp}_X(V, W)$. Les propriétés de $\boldsymbol{D}$ en (65) se décomposant suivant la somme orthogonale $\mathrm{Sp}_X(V, W) \boxplus \mathrm{Sp}_X(V, W)^\perp$ (dans $\mathbb{R}^m$) en tout point X de M, nous obtenons

$$\boldsymbol{D}_{fV}^{\tan}(W) = f\boldsymbol{D}_V^{\tan}(W) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{D}_V^{\tan}(fW) = V(f)W + f\boldsymbol{D}_V^{\tan}(W) \tag{66}$$

ce qui signifie que $(V,W) \mapsto \boldsymbol{D}_V^{\tan}(W)$ est aussi une connexion de Koszul sur $\mathcal{O}$

Supposons maintenant que (M,g) est une variété riemannienne de dimension n plongée isométriquement dans $\mathbb{R}^m$ et soit V et W deux champs de vecteurs sur M. Alors V et W peuvent respectivement être considérés comme les restrictions locales de deux champs de vecteurs $\hat{V}$ et $\hat{W}$ définis sur un voisinage ouvert – disons $\mathcal{O}$ – de M dans $\mathbb{R}^m$ ($\hat{V}$ et $\hat{W}$ n'étant pas en général uniques). Alors, pour tout $X \in M$ le vecteur $\boldsymbol{D}_V^{\tan}(W)|_X := \boldsymbol{D}_{\hat{V}}^{\tan}(\hat{W})|_X$ appartient à $T_X M$: de plus, la valeur $\boldsymbol{D}_V^{\tan}(W)|_X$ ne dépend pas des extensions $\hat{V}$ et $\hat{W}$ et $X \mapsto \boldsymbol{D}_V^{\tan}(W)|_X$ définit un champ de vecteur sur M. Il découle alors de (66) que l'application bilinéaire $(V,W) \mapsto \boldsymbol{D}_V^{\tan}(W)$ est une connexion de Koszul sur M. Il n'est pas difficile de montrer que cette connexion coïncide avec la connexion de Levi-Civita de (M,g), en ce sens qu'elle est sans torsion et g-compatible (nous n'utiliserons pas cette dernière remarque dans la suite de cette appendice).

17.2. **Le cas d'une nappe.** Notons (x^1,x^2,x^3) les coordonnées cartésiennes de $\mathbb{R}^3$ et soit $(x^1,x^2) \mapsto f(x^1,x^2)$ une application numérique définie sur un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^2$. Nous nous intéressons à la surface $\Sigma := \{(x^1,x^2,f(x^1,x^2))\ ;\ (x^1,x^2) \in \mathcal{V}\}$ munie de sa structure riemannienne g obtenue par le plongement isométrique dans $\mathbb{R}^3$. Nous notons $(\Sigma, \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2))$ le système de coordonnées trivial t.q. $\boldsymbol{x}(x^1,x^2,f(x^1,x^2)) = (x^1,x^2)$, les vecteurs holonômes ∂_1 et ∂_2 de ce système de coordonnées s'exprimant simplement dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ avec :

(67) $$\partial_1 = \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1}\right)\mathbf{e}_3 = \quad \text{et} \quad \partial_2 = \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^2}\right)\mathbf{e}_3$$

où $\boldsymbol{f} = f \circ \boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2)$. Nous appliquons la construction décrite au paragraphe précédent pour définir une connexion. Pour cela notons que tout champ de vecteur V défini sur M est associé à un champ de vecteur $\hat{V}$ sur $\mathcal{V} \times \mathbb{R}$ dont la valeur prise en (x^1,x^2,x^3) coïncide avec celle de V prise en $(x^1,x^2,f(x^1,x^2))$. Maintenant, étant donnés $\hat{V} = \hat{V}^\nu \mathbf{e}_\nu$ et $\hat{W} = \hat{W}^\mu \mathbf{e}_\mu$ deux champs de vecteurs sur $\mathcal{V} \times \mathbb{R}$, nous savons la définition en (64) que

$$\boldsymbol{D}_{\hat{V}}(\hat{W}) = \hat{V}^\nu \left(\frac{\partial \hat{W}^\mu}{\partial x^\nu}\right)\mathbf{e}_\mu$$

Dans le cas où $\hat{W} = \hat{\partial}_i$ nous avons $(\hat{W}^1,\hat{W}^2,\hat{W}^3) = ({\delta^1}_j, {\delta^2}_j, \partial f/\partial x^j)$ et

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{W}^1}{\partial x^1} & \frac{\partial \hat{W}^1}{\partial x^2} & \frac{\partial \hat{W}^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \hat{W}^2}{\partial x^1} & \frac{\partial \hat{W}^2}{\partial x^2} & \frac{\partial \hat{W}^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial \hat{W}^3}{\partial x^1} & \frac{\partial \hat{W}^3}{\partial x^2} & \frac{\partial \hat{W}^3}{\partial x^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^j} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^j} & 0 \end{pmatrix}$$

Il découle alors de (64) que

$$\boldsymbol{D}_{\hat{\partial}_i}(\hat{\partial}_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\mathbf{e}_3$$

Nous prenons $\hat\partial_1 \times \hat\partial_2 / \|\hat\partial_1 \times \hat\partial_2\|$ comme vecteur normal au plan vectoriel engendré (ponctuellement) par $\hat\partial_1$ et $\hat\partial_2$, où plus précisément nous avons

$$\hat\partial_1 \times \hat\partial_2 = -\frac{\partial f}{\partial x^1}\mathbf{e}_1 - \frac{\partial f}{\partial x^2}\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \quad \text{avec} \quad \|\hat\partial_1 \times \hat\partial_2\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)^2} \tag{68}$$

Alors, par définition,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}^{\tan}_{\hat\partial_i}(\hat\partial_j) &= \boldsymbol{D}_{\hat\partial_i}(\hat\partial_j) - \left\langle \boldsymbol{D}_{\hat\partial_i}(\hat\partial_j) \middle| \frac{\hat\partial_1 \times \hat\partial_2}{\|\hat\partial_1 \times \hat\partial_2\|} \right\rangle \frac{\hat\partial_1 \times \hat\partial_2}{\|\hat\partial_1 \times \hat\partial_2\|} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\left[\mathbf{e}_3 + \frac{1}{\|\hat\partial_1 \times \hat\partial_2\|^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\right)\right] \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\left[\mathbf{e}_3 + \frac{1}{\|\hat\partial_1 \times \hat\partial_2\|^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\left(\mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial x^1}\mathbf{e}_3 - \frac{\partial f}{\partial x^1}\mathbf{e}_3\right)\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \frac{\partial f}{\partial x^2}\left(\mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\mathbf{e}_3 - \frac{\partial f}{\partial x^2}\mathbf{e}_3\right) - \mathbf{e}_3\right)\right] \\
&= \frac{1}{\|\hat\partial_1 \times \hat\partial_2\|^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\left[\|\hat\partial_1 \times \hat\partial_2\|^2\mathbf{e}_3 + \frac{\partial f}{\partial x^1}\hat\partial_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2\mathbf{e}_3 + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial f}{\partial x^2}\hat\partial_2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right)^2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_3\right)\Bigg] \\
&= \frac{1}{\|\hat\partial_1 \times \hat\partial_2\|^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\hat\partial_1 + \frac{\partial f}{\partial x^2}\hat\partial_2\right)
\end{aligned}$$

Nous savons que la *restriction* de $\boldsymbol{D}^{\tan}$ à Σ – toujours notée (abusivement) $\boldsymbol{D}^{\tan}$ – définit une connexion sur Σ : alors, dans les coordonnées locales de $\boldsymbol{x}$, il vient $\boldsymbol{D}^{\tan}_{\partial_i}(\partial_j) = \Gamma^1{}_{ij}\partial_1 + \Gamma^2{}_{ij}\partial_2$ où les coefficients de $\boldsymbol{D}^{\tan}$ s'écrivent (avec $\boldsymbol{f} = f(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2)$)

$$\Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{\|\partial_1 \times \partial_2\|^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^i \partial \boldsymbol{x}^j}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^k} \tag{69}$$

Proposition 17.1. *Lorsque Σ est munie de la métrique riemannienne induite par la structure euclidienne de $\mathbb{R}^3$, alors $(V, W) \mapsto \boldsymbol{D}^{\tan}_V(W)$ coïncide avec la connexion de Levi-Civita $\boldsymbol{D}$.*

Preuve. Nous allons montrer que les coefficients $\Gamma^k{}_{ij}$ de $\boldsymbol{D}^{\tan}$ dans les coordonnées locales $\boldsymbol{x}$ et donnés en (69), coincident avec les symboles de Christoffel $\complement^k{}_{ij}$. De l'expression en (67) des vecteurs holonômes ∂_1 et ∂_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, nous déduisons

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1}\right)^2 & \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1}\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^2} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1}\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^2} & 1 + \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^2}\right)^2 \end{pmatrix}$$

ce qui donne (grâce à l'expression en (68) de $\|\partial_1 \times \partial_2\|$)

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\partial_1 \times \partial_2\|^2}\begin{pmatrix} 1 + \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^2}\right)^2 & -\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1}\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^2} \\ -\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1}\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^2} & 1 + \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1}\right)^2 \end{pmatrix}$$

Par suite, en utilisant l'expression des symboles de Christoffel en fonction des composantes de la connexion, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}
2\|\partial_1\times\partial_2\|^2 \mathsf{C}^1{}_{ij} &= \|\partial_1\times\partial_2\|^2\left(g^{11}\left(\frac{\partial g_{1j}}{\partial \boldsymbol{x}^i}+\frac{\partial g_{i1}}{\partial \boldsymbol{x}^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial \boldsymbol{x}^1}\right)+g^{12}\left(\frac{\partial g_{2j}}{\partial \boldsymbol{x}^i}+\frac{\partial g_{i2}}{\partial \boldsymbol{x}^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial \boldsymbol{x}^2}\right)\right)\\
&= \left(1+\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^2}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^i\partial \boldsymbol{x}^1}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^j}+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1}\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^i\partial \boldsymbol{x}^j}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^j\partial \boldsymbol{x}^i}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1}+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^i}\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^j\partial \boldsymbol{x}^1}\right.\\
&\qquad\qquad \left.-\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1\partial \boldsymbol{x}^i}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^j}-\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^i}\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1\partial \boldsymbol{x}^j}\right)\\
&\quad -\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^2}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^i\partial \boldsymbol{x}^2}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^j}+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^i\partial \boldsymbol{x}^j}+\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^j\partial \boldsymbol{x}^i}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^2}+\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^i}\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^j\partial \boldsymbol{x}^2}\right.\\
&\qquad\qquad \left.-\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^2\partial \boldsymbol{x}^i}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^j}-\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^i}\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^2\partial \boldsymbol{x}^j}\right)\\
&= 2\left(1+\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^2}\right)^2\right)\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1}\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^i\partial \boldsymbol{x}^j}-2\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^2}\right)^2\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1}\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^j\partial \boldsymbol{x}^i}=2\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1}\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^i\partial \boldsymbol{x}^j}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire (et de même pour $\mathsf{C}^2{}_{ij}$)

$$\mathsf{C}^1{}_{ij}=\frac{1}{\|\partial_1\times\partial_2\|^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^j\partial \boldsymbol{x}^i}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1}=\Gamma^1{}_{ij}$$

□

Remarque 17.2. *Il est aussi possible de vérifier que $\boldsymbol{D}^{\tan}$ coïncide avec la connexion de Levi-Civita, grâce au Théorème d'unicité de Koszul et en vérifiant directement par la Proposition 10.1 que $\boldsymbol{D}^{\tan}$ est sans torsion et g-compatible. L'absence de torsion est facile à vérifier, puisqu'on voit directement sur (69) que $\Gamma^k{}_{ij}=\Gamma^k{}_{ji}$. Pour vérifier la g-compatibilité, il est possible de prouver directement (par des calculs plus fastidieux) que $\partial_k(g_{ij})=\Gamma_{ijk}+\Gamma_{jik}$.*

Références

[BG68] R.L. Bishop and S.I. Goldberg. *Tensor Analysis on Manifolds*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1968.

[Bou92] J.-P. Bourguignon. Transport parallèle et connexions en géométrie et en physique, in "1830-1930 : a century of geometry". *Springer-Verlag, Lect. Notes in Physics*, 402 :150–164, 1992.

[Chr69] E.B. Christoffel. Üeber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. *J. reine angew. Math.*, 70 :46–70, 1869.

[Kos50] J. L. Koszul. Homologie et cohomologie des algèbres de Lie. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 78 :65–127, 1950.

[LC17] T. Levi-Civita. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana. *Rend. Circ. Mat. Palermo (1884-1940)*, 42 :173–204, 1917.

[Nas54] J. Nash. C1-isometric imbeddings. *Annals of Mathematics*, 60 :383–396, 1954.

[Nas56] J. Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Annals of Mathematics*, 63 :20–63, 1956.

[Oli15a] E. Olivier. 100 ans de Relativité Générale II/III : courbure. *Bull. Inf. App. & App.*, 101 :97–123, 2015.

[Oli15b] E. Olivier. 100 ans de Relativité Générale III/III : déflexion de la lumière. *Bull. Inf. App. & App.*, 102 :139–167, 2015.

[Ric88] G. Ricci. Delle derivazioni covarianti e contravarianti e del loro uso nella analisi applicata. *Stud. ed. Univ. Padova, Padova*, 3, 12 :23 p., 1888.

[RTLC00] G. Ricci and Tullio T. Levi-Civita. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Mathematische Annalen (Springer)*, 54 :125–201, 1900.