(2015) B.I.A.A. no **101** BULLETIN D'INFORMATIQUE APPROFONDIE ET APPLICATIONS
ISSN 0291-5413 (Université d'Aix-Marseille)

100 ans de Relativité Générale (II/III) : courbure

Eric OLIVIER [1 2]

Résumé. – Riemann généralise la notion de courbure d'une surface introduite par Gauss pour des objets géométriques différentiels de dimension quelconque (le concept de variété riemannienne n'existe pas encore !). Pour cela il introduit ce qui sera par la suite appelé le tenseur de courbure de Riemann (ou de Riemann-Christoffel). Dans le sillage de Gauss et de Riemann, les travaux de Christoffel, Ricci et Levi-Civita, ont été déterminants dans la réalisation du projet d'Einstein qui l'a mené de la Relativité Restreinte à la Relativité Générale et où la courbure de l'espace-temps remplace – en un sens – la *force* de gravitation newtonnienne.

1. Introduction

Étant donnée (M, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension n, le *tenseur de Riemann* [3] est un tenseur de valence $(1, 3)$ qui généralise, en dimension quelconque la notion de courbure introduite par Gauss pour les surfaces. En coordonnées, les composantes $R^{\tau}{}_{\sigma\mu\nu}$ du tenseur de Riemann possèdent (au signe prêt) une unique contraction non nulle de l'indice contravariant : ici, nous retrouvons notre sujet, puisque le *tenseur de Ricci* de composantes $R_{\mu\nu} := R^{\epsilon}{}_{\mu\epsilon\nu}$ joue un rôle central dans la Relativité Générale. En particulier (ce sera le point de départ de [Oli15b, § 9] sur la déflexion des rayons lumineux) la métrique de Schwarzschild est déterminée par une résolution de l'équation d'Einstein dans le vide i.e.

$$R_{\mu\nu} = 0$$

pour un espace-temps lorentzien à symétrie (spatiale) sphérique. Dans cette note, nous commençons par introduire les tenseurs de torsion et de courbure d'un point de vue général (définition de Koszul), lorsque (M, g) est munie d'une connexion affine à priori quelconque. Cela nous permet de raffiner les propriétés de symétrie du tenseur de courbure en fonction des propriétés spécifiques de la connexion. La connexion de Levi-Civita est déterminée par son absence de torsion et sa compatibilité métrique (Théorème d'unicité de Koszul) : elle est essentiellement liée à la Relativité Générale du fait qu'elle détermine les géodésiques du lagrangien inertiel (Théorème de Levi-Civita : c.f. [Oli15a, Théorème 14.1]). Le tenseur de Riemann proprement dit correspond au tenseur de courbure de la connexion de Levi-Civita : conséquence de cette spécificité, celui-ci vérifie (en particulier) un ensemble de quatre identités de symétrie (deux propriétés d'antisymétrie, la première identité de Bianchi et la bisymétrie) que nous regarderons en détail. Il est essentiel pour l'équation d'Einstein de la Relativité Générale (c.f. § 7), que le tenseur de Ricci soit symétrique en ce sens que

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

1. GDAC-I2M UMR 7373 CNRS Université d'Aix-Marseille
2. eric.olivier@univ-amu.fr
3. Einstein parle du tenseur de *Riemann-Christoffel*.

cette symétrie découlant elle même de la symétries du tenseur métrique et de la bisymétrie du tenseur de Riemann. (Parmi l'ensemble des tenseurs de courbure, seul le tenseur de Riemann vérifie la bisymétrie : voir la carte mentale de la Figure 2.)

Un point important abordé porte sur l'interprétations géométrique du tenseur de Riemann. Une rapide présentation du concept de transport parallèle nous amènera au Théorème de Levi-Civita – déjà mentionné – et caractérisant les géodésiques inertielles par un système différentiel déduit du transport parallèle. Nous serons alors capable de retrouver l'expression des composantes $R^{\tau}{}_{\sigma\mu\nu}$ par le transport parallèle d'un champ de vecteur le long d'un circuit infinitésimal de géodésiques. Enfin, nous terminerons cette note par les origines historiques du tenseur de Riemann, en revisitant la courbure gaussienne dans les termes de la théorie moderne des tenseurs.

Remerciement : Je tiens à remercier chaleureusement John Hubbard : nos nombreuses discussions sur le tenseur de courbure (entre autres), m'ont grandement éclairé/guidé pour la rédaction de cette deuxième note sur la Relativité Générale. Un regret : faute de place, je n'ai pu intégrer beaucoup de ses remarques, essentiellement sur les idées originales de Gauss et Riemann, et qui sont difficiles à trouver dans la littérature : j'espère qu'elles pourront être publiées par ailleurs, sous une forme ou sous une autre.

2. Structures algébriques du tenseur de Riemann

Dans ce paragraphe, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{S}_B(\mathbb{R}^d)$ désignent deux sous-espaces de l'espace vectoriel des formes quadrilinéaires définies sur $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$). Plus précisément, étant donnée $\varphi : \times_1^4 \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une forme quadrilinéaire, nous considérons les propositions suivantes :

$$\begin{array}{lcll}
(\mathbf{S1}) & : & \varphi(u,v,w,z) = -\varphi(v,u,w,z) & \text{(Première antisymétrie)} \\
(\mathbf{S2}) & : & \varphi(u,v,w,z) = -\varphi(u,v,z,w) & \text{(Deuxième antisymétrie)} \\
(\mathbf{S3}) & : & \varphi(u,v,w,z) + \varphi(w,u,v,z) + \varphi(v,w,u,z) = 0 & \text{(Identité de Bianchi)} \\
(\mathbf{S4}) & : & \varphi(u,v,w,z) = \varphi(w,z,u,v) & \text{(Bisymétrie)}
\end{array}$$

Alors, l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (resp. $\mathcal{S}_B(\mathbb{R}^d)$) est formé des formes quadrilinéaires φ définies sur E et satisfaisant les propriétés $(\mathbf{S1})$-$(\mathbf{S4})$ [4] (resp. $(\mathbf{S1})$-$(\mathbf{S2})$-$(\mathbf{S3})$).

Proposition 2.1. *$\mathcal{S}_B(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, en ce sens que*

$$\Big((\mathbf{S1})\ \&\ (\mathbf{S2})\ \&\ (\mathbf{S3})\Big) \Longrightarrow (\mathbf{S4})$$

Preuve (Milnor). Soit O le point de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées $(0,0,0)$; pour tout point A de $\mathbb{R}^3$, nous notons A' l'image de A dans la symétrie centrale de centre O (avec la convention que $A'' = A$). Nous considérons alors que A, B, C, A', B', C' sont les sommets d'un octaèdre (régulier) de $\mathbb{R}^3$ de centre O et que A, B, C sont les trois sommets d'une même face de l'octaèdre. Étant donné $\varphi \in \mathcal{S}_B(\mathbb{R}^d)$ et $(u,v,w,z) \in \times_1^4 \mathbb{R}^d$, chaque sommet – disons H – de l'octaèdre est associé au réel $\rho(H)$ correspondant à la valeur de φ sur une permutation (a,b,c,d) du quadruplet (u,v,w,z) et déterminée par les deux conditions :

$$\begin{array}{lcl}
(\mathbf{C1}) & : & \big(\rho(A), \rho(B), \rho(C)\big) = \big(\varphi(u,v,w,z), \varphi(w,u,v,z), \varphi(v,w,u,z)\big) \\
(\mathbf{C2}) & : & \rho(H) = \varphi(a,b,c,d) \iff \rho(H') = \varphi(c,d,a,b)
\end{array}$$

4. Il est évident que $(\mathbf{S1})$ et $(\mathbf{S4})$ entraîne $(\mathbf{S2})$.

(voir Fig. 1). Par définition de la fonction ρ, l'identité de Bianchi (**S3**) entraîne $\rho(A) + \rho(B) + \rho(C) = 0$. Mais d'autre part, en utilisant (**S1**) et (**S2**), nous pouvons aussi écrire

$$\begin{aligned}\rho(A) + \rho(B') + \rho(C') &= \varphi(u, v, w, z) + \varphi(v, z, w, u) + \varphi(u, z, v, w)\\ &= -\varphi(u, v, z, w) - \varphi(v, z, u, w) - \varphi(z, u, v, w)\end{aligned}$$

soit encore $\rho(A) + \rho(B') + \rho(C') = 0$, en utilisant (**S3**) une nouvelle fois. Finalement

$$2\rho(A) + \rho(B) + \rho(C) + \rho(B') + \rho(C') = 0 \tag{1}$$

et comme de même

$$2\rho(A') + \rho(B) + \rho(C) + \rho(B') + \rho(C') = 0 \tag{2}$$

nous obtenons $\rho(A) = \rho(A')$ en retranchant (1) et (2).

□

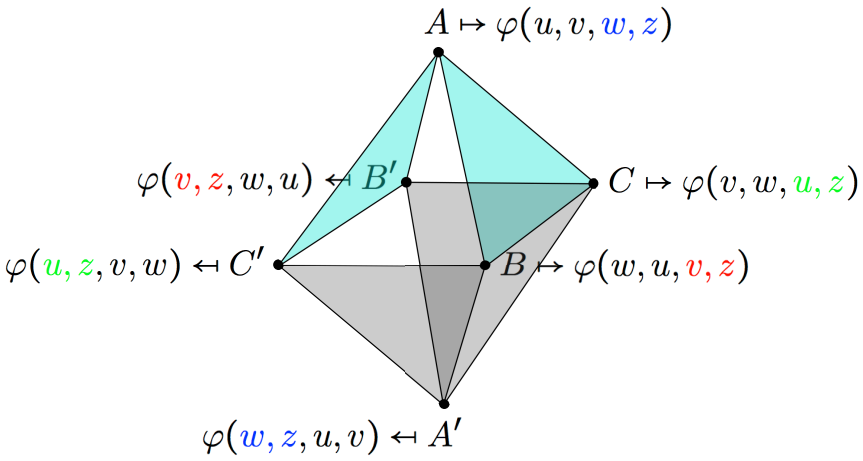

FIGURE 1. *Diagramme de Milnor.*

Soit $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$ ($d \geq 2$) et notons $\varphi_{\sigma\tau\mu\nu} := \varphi(\mathbf{e}_\sigma, \mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu)$. Pour commencer, l'égalité $\mathcal{S}_B(\mathbb{R}^d) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est satisfaite lorsque d est égal à 2 ou à 3 ; en effet, pour tout[5] $1 \leq \mu, \nu, \sigma \leq 3$ nous avons :

$$\begin{aligned}3\varphi_{[\mu\mu\nu]\sigma} = 3\varphi_{[\mu\nu\mu]\sigma} = 3\varphi_{[\nu\mu\mu]\sigma} &= \varphi_{\nu\mu\mu\sigma} + \varphi_{\mu\mu\nu\sigma} + \varphi_{\mu\nu\mu\sigma} = 0\\ 3\varphi_{[\mu\nu\sigma]\mu} = 3\varphi_{[\nu\sigma\mu]\mu} = 3\varphi_{[\sigma\mu\nu]\mu} &= \varphi_{\sigma\mu\nu\mu} + \varphi_{\mu\nu\sigma\mu} + \varphi_{\nu\sigma\mu\mu} = 0\end{aligned}$$

d'où $\varphi_{[\mu\nu\sigma]\tau} = 0$ pour tout $1 \leq \mu, \nu, \sigma, \tau \leq 3$: l'égalité $\mathcal{S}_B(\mathbb{R}^d) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, est donc valable pour $d = 2, 3$. Il se trouve que l'inclusion $\mathcal{S}_B(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est stricte pour $d > 3$. Par exemple pour $d = 4$, notons $(\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*, \mathbf{e}_4^*)$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ (i.e. $\mathbf{e}_\mu^*(\mathbf{e}_\nu) = \delta_{\mu\nu}$), de sorte que $\mathbf{e}_\mu^* \wedge \mathbf{e}_\nu^*(u, v)$ (produit extérieur) désigne le mineur d'indice (μ, ν) du couple de vecteurs (u, v). Alors, il est facile de vérifier que

$$\varphi := (\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*) \otimes (\mathbf{e}_3^* \wedge \mathbf{e}_4^*) + (\mathbf{e}_3^* \wedge \mathbf{e}_4^*) \otimes (\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*)$$

est bien dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$: or $\varphi \notin \mathcal{S}_B(\mathbb{R}^4)$, puisque $\varphi_{[123]4} = \varphi_{1234} = 1$.

5. Soit $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto f(x_1, \ldots, x_k)$ soit une fonction numérique de k indéterminées $x_1, \ldots, x_n$: alors $f([x_1, \ldots, x_k]) = 1/k \sum_\sigma f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$, où σ est une permutation circulaire de $\{1, \ldots, k\}$.

Remarque 2.2. *(1) : Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$: alors pour $(u,v,w,z) \in \times_1^4 \mathbb{R}^2$,*

$$\begin{aligned}\varphi(u,v,w,z) &= u^1v^2w^1z^2\varphi_{1212} + u^2v^1w^1z^2\varphi_{2112} + u^1v^2w^2z^1\varphi_{1221} + u^2v^1w^2z^1\varphi_{2121}\\ &= \big(u^1v^2w^1z^2 - u^2v^1w^1z^2 - u^1v^2w^2z^1 + u^2v^1w^2z^1\big)\varphi_{1212}\\ &= \big(u^1v^2 - u^2v^1\big)\big(w^1z^2 - w^2z^1\big)\varphi_{1212}\end{aligned}$$

Nous en déduisons que l'espace vectoriel $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ est de dimension 1 et que tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ s'écrit

$$\varphi = (\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*) \otimes (\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*)\varphi_{1212} \tag{3}$$

où $\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*$ est le déterminant sur $\mathbb{R}^2$. Dans le cas où $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pour $d \geq 2$, nous utilisons – de même que précédemment – la quadrilinéarité combinée aux symétries $(\mathbf{S1})$ et $(\mathbf{S4})$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}\varphi \;=\; &\sum_{1\leq\mu<\nu\leq d} (\mathbf{e}_\mu^* \wedge \mathbf{e}_\nu^*) \otimes (\mathbf{e}_\mu^* \wedge \mathbf{e}_\nu^*)\varphi_{\mu\nu\mu\nu} +\\ &\sum_{1\leq\mu<\nu\leq\sigma<\tau\leq d} \Big((\mathbf{e}_\mu^* \wedge \mathbf{e}_\nu^*) \otimes (\mathbf{e}_\sigma^* \wedge \mathbf{e}_\tau^*) + (\mathbf{e}_\sigma^* \wedge \mathbf{e}_\tau^*) \otimes (\mathbf{e}_\mu^* \wedge \mathbf{e}_\nu^*)\Big)\varphi_{\mu\nu\sigma\tau}\end{aligned}$$

ce qui nous permet d'obtenir la dimension de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, soit :

$$\dim\big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{d(d-1)}{2}\right)\left(\frac{d(d-1)}{2} + 1\right)$$

On pourra trouver dans [Wei72, Chap. 6, § 7], *la formule*

$$\dim\big(\mathcal{S}_B(\mathbb{R}^d)\big) = \frac{1}{12}d^2(d^2-1)$$

(2) : Soit $(u,v,w) \mapsto \det(u,v,w) = \mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^* \wedge \mathbf{e}_3^*(u,v,w)$ le déterminant sur $\mathbb{R}^3$. Alors, pour $u,v \in \mathbb{R}^3$ fixés, l'application $\det(u,v,\cdot)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$: par définition, le produit vectoriel de u et v est le vecteur noté $u \times w$ t.q. $\det(u,v,w) = \langle u \times v | w\rangle$ (identité du produit mixte). Notons que si $\mathrm{Vec}(u,v)$ est l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ t.q. $\mathrm{Vec}(u,v)w = (u \times v) \times w$, alors :

$$\begin{aligned}&(i) \;:\; \mathrm{Vec}(u,v) = -\mathrm{Vec}(v,u) && \textit{(Antisymétrie du produit vectoriel)}\\ &(ii) \;:\; \mathrm{Vec}(u,v)w + \mathrm{Vec}(w,u)v + \mathrm{Vec}(v,w)u = 0 && \textit{(Identité de Jacobi)}\end{aligned}$$

Considérons maintenant l'application $(u,v,w,z) \mapsto \mathcal{V}(u,v,w,z)$, t.q.

$$\mathcal{V}(u,v,w,z) := \big\langle \mathrm{Vec}(u,v)w \big| z\big\rangle = \det\big(\mathrm{Vec}(u,v), w, z\big)$$

D'après (i) et du fait que le déterminant est une forme trilinéaire alternée, nous avons

$$\mathcal{V}(u,v,w,z) = -\mathcal{V}(v,u,w,z) \quad \textit{et} \quad \mathcal{V}(u,v,w,z) = -\mathcal{V}(u,v,z,w)$$

Or, en prenant le produit scalaire par un vecteur z sur l'identité de Jacobi en (ii), nous obtenons :

$$\mathcal{V}(u,v,w,z) + \mathcal{V}(w,u,v,z) + \mathcal{V}(v,w,u,z) = 0$$

ce qui signifie que $\mathcal{V} \in \mathcal{S}_B(\mathbb{R}^3)$. Nous savons qu'il y a égalité entre $\mathcal{S}_B(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$: par suite $\mathcal{V}$ satisfait la bisymétrie $\mathcal{V}(u,v,z,w) = \mathcal{V}(z,w,u,v)$. Notons que (dans le cas particulier du produit vectoriel) l'identité de Bianchi ainsi que la bisymétrie de $\mathcal{V}$ peuvent être déduites (indépendamment et directement) de l'identité Gibbs, i.e. $\mathrm{Vec}(u,v)w = \langle u|w\rangle\, v - \langle v|w\rangle\, u$.

3. Tenseurs de torsion et de courbure d'une connexion

Dans ce paragraphe, nous donnons la présentation formelle de Koszul des tenseurs de torsion et courbure d'une connexion (c.f. [Kos50]). Étant donnée (M, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension n, rappelons (c.f. [Oli15a]) qu'un (champ de) tenseurs de type (p, q) sur M est une section C^∞ du fibré vectoriel

$$\coprod_X \bigotimes^{p,q} T_X M = \coprod_X \left(\bigotimes_1^p T_X M\right) \otimes \left(\bigotimes_1^q T_X^* M\right)$$

où les p-premiers produits tensoriels portent sur p-copies de l'espace $T_X M$ tangent à M en X et les q-derniers produits tensoriels sont sur q-copies de l'espace cotangent en X (i.e. le dual $T_X^* M$) : nous notons $\mathfrak{T}_q^p(TM)$ l'espace vectoriel des (champs de) tenseurs de type (p, q) sur M. Si les $\partial_i = \partial/\partial \boldsymbol{x}^i$ sont les vecteurs de la base holonôme (base locale des champ de vecteurs) d'un système $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^1, \dots, \boldsymbol{x}^n)$ de coordonnées locales, alors les $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^i$ sont les co-vecteurs de la base duale (base locale des formes différentielles), de sorte que $\mathrm{d}\boldsymbol{x}^\mu(\partial_\nu) = \partial_\nu(\mathrm{d}\boldsymbol{x}^\mu) = \delta^\mu{}_\nu$ (symbole de Kchronecker). Ainsi, la décomposition (en coordonnées) d'un tenseur $F \in \mathfrak{T}_q^p(TM)$ s'écrit (avec les notations sommatoires d'Einstein)

$$F = F^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}^{\mu_p}} \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\nu_q}$$

où les applications $X \mapsto F^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q}(X)$ définies sur le domaine de $\boldsymbol{x}$ sont appelées les $\boldsymbol{x}$-composantes du tenseur F. L'espace $\mathfrak{T}_0^1(TM)$ (resp. $\mathfrak{T}_1^0(TM)$) s'identifie à l'espace des champs de vecteurs (resp. des formes différentielles) sur M ; par convention $\mathfrak{T}_0^0(TM)$ s'identifie à l'espace $\mathcal{C}^\infty(M)$ des champs scalaires sur M. Nous supposerons que (M, g) est munie d'une connexion (ou plus précisément une connexion affine) arbitraire $\boldsymbol{D}$: rappelons (c.f. [Oli15a, Définition 8.1]) que $\boldsymbol{D}$ est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire $(U, V) \mapsto \boldsymbol{D}_U(V)$ sur $\mathfrak{T}_0^1(TM)$ pour laquelle (en coordonnées) chaque application partielle $U \mapsto \boldsymbol{D}_U(V)$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire alors que chaque application $V \mapsto \boldsymbol{D}_U(V)$ satisfait la règle de Leinitz i.e. pour tout champ de vecteur V et tout champ scalaire f

$$\boldsymbol{D}_U(fV) = U(f)V + f\boldsymbol{D}_U(V)$$

Les coefficients de $\boldsymbol{D}$ dans un système de coordonnées locales $\boldsymbol{x}$ sont les fonctions numériques $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ définies uniquement dans le domaine de $\boldsymbol{x}$ et telles que

$$\boldsymbol{D}_{\partial_\mu}(\partial_\nu) = \Gamma^\epsilon{}_{\mu\nu}\partial_\epsilon$$

Enfin, par définition des dérivations partielles covariantes $D_1, \dots, D_n$ associées à $\boldsymbol{D}$:

$$\boldsymbol{D}_U(V) = U^\mu D_\mu(V^\sigma)\partial_\sigma \quad \text{où} \quad D_\mu(V^\sigma) = \partial_\mu(V^\sigma) + V^\epsilon \Gamma^\sigma{}_{\mu\epsilon} \tag{4}$$

Bien que d'un abord relativement simple, la notion de connexion demeure à priori mystérieuse. En fait il s'agit d'une formalisation algébrique de la notion géométrique – bien plus intuitive – de transport parallèle (c.f. § 12 et [Bou92] sur l'histoire des connexions et du transport parallèle). Cependant, un intérêt immédiat de cette notion, est de permettre des définitions *assez claires* des tenseurs de torsion et de courbure.

Proposition 3.1 (Tenseur de torsion)**.** *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension n muni d'une connexion $\boldsymbol{D}$. L'application bilinéaire $(U, V) \mapsto T(U, V)$ de $\mathfrak{T}_0^1(TM) \times \mathfrak{T}_0^1(TM)\times$ et à valeurs dans $\mathfrak{T}_0^1(TM)$ est définie en posant*

$$T(U, W) = \boldsymbol{D}_U(V) - \boldsymbol{D}_V(U) - [U, V]. \tag{5}$$

alors (i) : l'application T est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire suivant ses deux entrées et (ii) : dans la base holonôme $(\partial_1,\dots,\partial_N)$ d'un système de coordonnées locales,

$$T(U,V) = U^\mu V^\nu T^\kappa{}_{\mu\nu}\partial_\kappa \quad \text{où} \quad T^\kappa{}_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa{}_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa{}_{\nu\mu}$$

(iii) : les $T^\kappa{}_{\mu\nu}$ sont les composantes d'un tenseur $(1,2)$ appelé tenseur de torsion de $\boldsymbol{D}$.

Preuve. Les propositions (i) et (ii) se vérifient par calculs directs, la proposition (iii) étant une conséquence de (i) et (ii) [6].

□

Proposition 3.2 (Tenseur de courbure)**.** *Soit (M,g) une variété pseudo-riemannienne de dimension n muni d'une connexion $\boldsymbol{D}$. L'application tri-linéaire $(U,V,W) \mapsto R(U,V,W)$ de $\mathfrak{T}^1_0(TM)\times\mathfrak{T}^1_0(TM)\times\mathfrak{T}^1_0(TM)$ et à valeurs dans $\mathfrak{T}^1_0(TM)$ est définie en posant*

$$R(U,V,W) = \boldsymbol{D}_U\big(\boldsymbol{D}_V(W)\big) - \boldsymbol{D}_V\big(\boldsymbol{D}_U(W)\big) - \boldsymbol{D}_{[U,V]}(W). \tag{6}$$

alors (i) : l'application R est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire suivant ses trois entrées et (ii) : dans la base holonôme $(\partial_1,\dots,\partial_N)$ d'un système de coordonnées locales

$$R(U,V,W) = U^\mu V^\nu W^\sigma R^\kappa{}_{\sigma\mu\nu}\partial_\kappa$$

(attention à l'ordre des indices) où les quantités

$$R^\kappa{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu\big(\Gamma^\kappa{}_{\nu\sigma}\big) - \partial_\nu\big(\Gamma^\kappa{}_{\mu\sigma}\big) + \Gamma^\kappa{}_{\mu\epsilon}\Gamma^\epsilon{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\kappa{}_{\nu\epsilon}\Gamma^\epsilon{}_{\mu\sigma} \tag{7}$$

sont les composantes d'un tenseur $(1,3)$ appelé tenseur de courbure de $\boldsymbol{D}$. ; (iii) : pour $U,V \in \mathfrak{T}^1_0(TM)$ fixés, l'application $W \mapsto R(U,V,W)$ est un endomorphisme linéaire de $\mathfrak{T}^1_0(TM)$, notée (abusivement [7]) $R(U,V)$ et (donc) associée à un tenseur $(1,1)$ dont les composantes sont

$$R(U,V)^\kappa{}_\sigma = U^\mu V^\nu R^\kappa{}_{\sigma\mu\nu}$$

(iv) : La forme quadrilinéaire $U,V,W,Z \in \mathfrak{T}^1_0(TM)$ t.q.

$$\mathcal{R}(U,V,W,Z) := g\big(R(U,V,W),Z\big) \tag{8}$$

est un tenseur de valence $(0,4)$ appelé tenseur de courbure covariant de $\boldsymbol{D}$, dont les composantes sont les $R_{\kappa\sigma\nu\mu} = g_{\kappa\epsilon}R^\epsilon{}_{\sigma\nu\mu}$: ainsi, pour tout $U,V,W,Z \in \mathfrak{T}^1_0(TM)$:

$$\mathcal{R}(U,V,W,Z) = U^\mu V^\nu W^\sigma Z^\kappa R_{\kappa\sigma\mu\nu}$$

Preuve. (i) : Une connexion est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire sur la première entrée et satisfait la règle de Liebniz sur la deuxième entrée. Par suite, pour tout [8] $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_{fU}(\boldsymbol{D}_U(W)) &= f\boldsymbol{D}_U(\boldsymbol{D}_V(W)) \\
\boldsymbol{D}_V(\boldsymbol{D}_{fU}(W)) &= \boldsymbol{D}_V(f\boldsymbol{D}_U(W)) = V(f)\boldsymbol{D}_U(W) + f\boldsymbol{D}_V(\boldsymbol{D}_U(W)) \\
\boldsymbol{D}_{[fU,V]}(W) &= f\boldsymbol{D}_{[U,V]}(W) - V(f)\boldsymbol{D}_U(W)
\end{aligned}$$

6. On pourra aussi remarquer (exercice) que (a) : si $\boldsymbol{D}$ et $\hat{\boldsymbol{D}}$ sont deux connexions quelconques de coefficients respectifs $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ et $\hat{\Gamma}^\sigma{}_{\mu\nu}$ alors les symboles $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^\sigma{}_{\mu\nu}$ sont les composantes d'un tenseur de valence $(1,2)$ et (b) : si les $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ sont les coefficients d'une connexion $\boldsymbol{D}$, alors les $\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$ (permutation des indices μ et ν) sont aussi les coefficients d'une connexion $\hat{\boldsymbol{D}}$; de (a) et (b) nous déduisons que le $T^\sigma{}_{\mu\nu} := \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}$ sont les composantes d'un tenseur $(1,2)$. On retrouve ainsi le tenseur de torsion associé à une connexion $\boldsymbol{D}$.

7. Remarquons que si U et V commutent (et en particulier pour les champs holonômes) alors :

$$R(U,V)W = \boldsymbol{D}_U\big(\boldsymbol{D}_V(W)\big) - \boldsymbol{D}_V\big(\boldsymbol{D}_U(W)\big) = \boldsymbol{D}_{[U}\boldsymbol{D}_{V]}(W)$$

8. Pour la troisième identité, nous utilisons le fait que $[fU,V] = f[U,V] - V(f)U$.

d'où $R(fU,V,W) = fR(U,V,W)$ (et de même $R(U,fV,W) = fR(U,V,W)$). Il nous reste à démontrer que $R(U,V,fW) = fR(U,V,W)$: pour cela, remarquons que

$$\boldsymbol{D}_U(\boldsymbol{D}_V(fW)) = \boldsymbol{D}_U\big(V(f)W + f\boldsymbol{D}_V(W)\big) = \boldsymbol{D}_U\big(V(f)W\big) + \boldsymbol{D}_U\big(f\boldsymbol{D}_V(W)\big)$$

soit encore

$$\boldsymbol{D}_U(\boldsymbol{D}_V(fW)) = U(V(f))W + V(f)\boldsymbol{D}_U(W) + U(f)\boldsymbol{D}_V(W) + f\boldsymbol{D}_U(\boldsymbol{D}_V(W)) \tag{9}$$

et de même (en permutant les rôles des champs de vecteurs U et V)

$$\boldsymbol{D}_V(\boldsymbol{D}_U(fW)) = V(U(f))W + U(f)\boldsymbol{D}_V(W) + V(f)\boldsymbol{D}_U(W) + f\boldsymbol{D}_V(\boldsymbol{D}_U(W)) \tag{10}$$

Par soustraction des identités (9) et (10) nous obtenons

$$\boldsymbol{D}_U(\boldsymbol{D}_V(fW)) - \boldsymbol{D}_U(\boldsymbol{D}_V(fW)) = [U,V](f)W + f\Big(\boldsymbol{D}_U(\boldsymbol{D}_V(W)) - \boldsymbol{D}_U(\boldsymbol{D}_V(W))\Big) \tag{11}$$

Enfin, l'identité $\boldsymbol{D}_{[U,V]}(fW) = [U,V](f)W + f\boldsymbol{D}_{[U,V]}(W)$ permet d'exprimer $[U,V](f)W$; en substituant le résultat obtenu dans (11) nous tirons $R(U,V,fW) = fR(U,V,W)$.

(ii) : Si $(\partial_1,\dots,\partial_n)$ est la base holonôme d'une carte, alors $[\partial_\mu,\partial_\nu] = 0$ et

$$\begin{aligned}
R(\partial_\mu,\partial_\nu,\partial_\sigma) &= \boldsymbol{D}_{\partial_\mu}\big(\boldsymbol{D}_{\partial_\nu}(\partial_\sigma)\big) - \boldsymbol{D}_{\partial_\nu}\big(\boldsymbol{D}_{\partial_\mu}(\partial_\sigma)\big) - \boldsymbol{D}_{[\partial_\mu,\partial_\nu]}(\partial_\sigma)\\
&= \boldsymbol{D}_{\partial_\mu}\big(\Gamma^\kappa{}_{\nu\sigma}\partial_\kappa\big) - \boldsymbol{D}_{\partial_\nu}\big(\Gamma^\kappa{}_{\mu\sigma}\partial_\kappa\big)\\
&= \Big(\partial_\mu\big(\Gamma^\kappa{}_{\nu\sigma}\big)\partial_\kappa + \Gamma^\kappa{}_{\nu\sigma}\boldsymbol{D}_{\partial_\mu}(\partial_\kappa)\Big) - \Big(\partial_\nu\big(\Gamma^\kappa{}_{\mu\sigma}\big)\partial_\kappa + \Gamma^\kappa{}_{\mu\sigma}\boldsymbol{D}_{\partial_\nu}(\partial_\kappa)\Big)\\
&= \Big(\partial_\mu\big(\Gamma^\kappa{}_{\nu\sigma}\big)\partial_\kappa + \Gamma^\kappa{}_{\nu\sigma}\Gamma^\epsilon{}_{\mu\kappa}\partial_\epsilon\Big) - \Big(\partial_\nu\big(\Gamma^\kappa{}_{\mu\sigma}\big)\partial_\kappa + \Gamma^\kappa{}_{\mu\sigma}\Gamma^\epsilon{}_{\nu\kappa}\partial_\epsilon\Big)\\
&= \Big(\partial_\mu\big(\Gamma^\kappa{}_{\nu\sigma}\big)\partial_\kappa + \Gamma^\epsilon{}_{\nu\sigma}\Gamma^\kappa{}_{\mu\epsilon}\partial_\kappa\Big) - \Big(\partial_\nu\big(\Gamma^\kappa{}_{\mu\sigma}\big)\partial_\kappa + \Gamma^\epsilon{}_{\mu\sigma}\Gamma^\kappa{}_{\nu\epsilon}\partial_\kappa\Big) \qquad (\epsilon \leftrightarrow \kappa)\\
&= \Big(\partial_\mu\big(\Gamma^\kappa{}_{\nu\sigma}\big) - \partial_\nu\big(\Gamma^\kappa{}_{\mu\sigma}\big) + \Gamma^\epsilon{}_{\nu\sigma}\Gamma^\kappa{}_{\mu\epsilon} - \Gamma^\epsilon{}_{\mu\sigma}\Gamma^\kappa{}_{\nu\epsilon}\Big)\partial_\kappa
\end{aligned}$$

soit encore (en réordonnant les produits de symboles de Chritoffel)

$$R(\partial_\mu,\partial_\nu,\partial_\sigma) = R^\kappa{}_{\sigma\mu\nu}\partial_\kappa \quad \text{avec} \quad R^\kappa{}_{\sigma\mu\nu} := \partial_\mu\big(\Gamma^\kappa{}_{\nu\sigma}\big) - \partial_\nu\big(\Gamma^\kappa{}_{\mu\sigma}\big) + \Gamma^\kappa{}_{\mu\epsilon}\Gamma^\epsilon{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\kappa{}_{\nu\epsilon}\Gamma^\epsilon{}_{\mu\sigma}$$

Le fait que les $R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}$ sont les composantes d'un tenseur $(1,3)$ découle directement de la partie (i) affirmant que $(U,V,W) \mapsto R(U,V,W)$ est $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéaire en ses trois entrées.

(iii) : est une conséquence directe de (i).

(iv) : Pour montrer que la forme quadrilinéaire définie en(8) est une tenseur $(0,4)$, il suffit de remarquer que pour $U,V,W,Z \in \mathfrak{T}^1_0(TM)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(U,V,W,Z) &= g\big(U^\mu V^\nu W^\sigma R^\epsilon{}_{\sigma\mu\nu}\partial_\epsilon, Z^\kappa\partial_\kappa\big)\\
&= U^\mu V^\nu W^\sigma Z^\kappa g(\partial_\epsilon,\partial_\kappa)R^\epsilon{}_{\sigma\mu\nu} = U^\mu V^\nu W^\sigma Z^\kappa g_{\kappa\epsilon}R^\epsilon{}_{\sigma\mu\nu}
\end{aligned}$$

□

4. **Identités de Ricci**

Revenons maintenant au cas où la variété pseudo-riemannienne (M,g) est munie d'une connexion $\boldsymbol{D}$ dont nous notons (en coordonnées) $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ les coefficients. Étant donné V un champ de vecteur de composantes V^μ, la $\mathcal{C}^\infty(M)$-linéarité de l'application partielle $U \mapsto \boldsymbol{D}_U(V)$ entraîne que les $D_\nu(V^\nu)$ définis en (4) sont les composantes d'un tenseur

$(1,1)$ noté $D(V)$. L'application linéaire $D : \mathfrak{T}^1_0(TM) \to \mathfrak{T}^1_1(TM)$ est par définition la dérivation covariante associée à la connexion $\boldsymbol{D}$ [9], chaque système de coordonnées locales correspondant à un système $(D_1, \ldots, D_n)$ de dérivations partielles covariantes. Intuitivement, D_μ s'interprète comme une *correction* de la dérivation partielle ∂_μ, cette correction lui donnant des propriétés tensorielles adaptées à la structure de variété différentielle. Il faut ici pointer une différence entre les dérivations partielles et les dérivations partielles covariantes : contrairement au lemme de Schwarz pour les dérivées partielles, la composition des dérivations partielles covariantes ne commutent pas : nous allons voir (c.f. Proposition 4.2) comment le *crochet de Lie* $[D_\mu, D_\nu] = D_{\mu\nu} - D_{\nu\mu}$ est liée au tenseur de courbure de $\boldsymbol{D}$. Le point de départ est l'extension de la dérivation covariante D à l'espace complet $\coprod_{p,q} \mathfrak{T}^p_q(TM)$ des champs tenseurs (c.f. [Oli15a, Proposition 14.1]) : si $A^{\tau_1\cdots\tau_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}$ sont les composantes d'un tenseur $A \in \mathfrak{T}^p_q(TM)$ alors la dérivée covariante $D(A)$ est le tenseur de $\mathfrak{T}^p_{q+1}(TM)$ dont les composantes sont :

$$
\begin{aligned}
(12) \qquad D_\mu(A^{\tau_1\cdots\tau_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}) \quad := \quad & \partial_\mu(A^{\tau_1\cdots\tau_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}) + \sum_{r=1}^{p} A^{\tau_1\cdots(\epsilon\leftarrow\tau_r)\cdots\tau_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}\Gamma^{\tau_r}{}_{\epsilon\mu} \\
& - \sum_{s=1}^{q} A^{\tau_1\cdots\tau_p}{}_{\sigma_1\cdots(\epsilon\leftarrow\sigma_s)\cdots\sigma_q}\Gamma^{\epsilon}{}_{\sigma_s\mu}
\end{aligned}
$$

Enfin, pour tout champ de vecteur U, de $\boldsymbol{x}$-composante U^k nous pouvons définir :

$$
\boldsymbol{D}_U(A) := U^\epsilon\Big(D_\epsilon(A^{\tau_1\cdots\tau_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q})\Big)\partial_{\tau_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\tau_p} \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\sigma_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^{\sigma_q}
$$

De même que pour les dérivations partielles nous notons $D_{\tau_1\cdots\tau_p}$ la composition des p dérivations partielles covariances $D_{\tau_1}, \ldots D_{\tau_p}$. Rappelons aussi (lemme de Schwarz) que le crochet de Lie des dérivées partielles s'annule, ce qu'on note $[\partial_\mu, \partial_\nu] \equiv 0$: nous utilisons aussi la notation en *crochet le lie* pour les dérivées partielles covariante en posant :

$$
[D_\mu, D_\nu](A^{\tau_1\cdots\tau_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}) = D_{\mu\nu}(A^{\tau_1\cdots\tau_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q}) - D_{\nu\mu}(A^{\tau_1\cdots\tau_p}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_q})
$$

Le « *crochet de Lie* » des dérivées partielles covariantes est lié à la courbure ainsi qu'a la torsion de la connexion.

Théorème 4.1. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne et $\boldsymbol{D}$ une connexion ; alors pour tout champ de vecteur V de composantes V^μ et toute forme différentielle ξ de composantes ξ_μ :*

$$
[D_\mu, D_\nu](V^\sigma) := V^\epsilon R^\sigma{}_{\epsilon\mu\nu} - D_\epsilon(V^\sigma)T^\epsilon{}_{\mu\nu} \quad \textit{et} \quad [D_\mu, D_\nu](\xi_\sigma) = -\xi_\epsilon R^\epsilon{}_{\sigma\mu\nu} - D_\eta(\xi_\sigma)T^\eta{}_{\mu\nu}
$$

où les $R^\sigma{}_{\epsilon\mu\nu}$ (resp. $T^\epsilon{}_{\mu\nu}$) sont les composantes du tenseur de courbure (resp. de torsion) de $\boldsymbol{D}$.

Preuve. Soit $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ la base holonôme d'un système de coordonnées $\boldsymbol{x}$; pour $V = V^\mu\partial_\mu$ (et de même pour une forme différentielle $\xi = \xi_\mu \mathrm{d}\boldsymbol{x}^\mu$), nous utilisons (12) pour

9. Chaque connexion $(U, V) \mapsto \boldsymbol{D}_U(V)$ sur M est automatiquement associée à une dérivation covariante $D : \mathfrak{T}^1_0(TM) \to \mathfrak{T}^1_1(TM)$ ainsi qu'à un système de dérivation covariante $(D_1, \ldots, D_n)$ défini pour chaque système de coordonnées locales.

écrire

$$\begin{aligned}
& D_\mu\big(D_\nu(V^\sigma)\big) \\
= \;& \partial_\mu(D_\nu(V^\sigma)) - D_\eta(V^\sigma)\Gamma^\eta{}_{\mu\nu} + D_\nu(V^\epsilon)\Gamma^\sigma{}_{\mu\epsilon} \\
= \;& \partial_{\mu\nu}(V^\sigma) + \partial_\mu(V^\epsilon)\Gamma^\sigma{}_{\nu\epsilon} + V^\epsilon\partial_\mu(\Gamma^\sigma{}_{\nu\epsilon}) - D_\eta(V^\sigma)\Gamma^\eta{}_{\mu\nu} + \partial_\nu(V^\epsilon)\Gamma^\sigma{}_{\mu\epsilon} + V^\eta\Gamma^\epsilon{}_{\nu\eta}\Gamma^\sigma{}_{\mu\epsilon} \\
= \;& \Big(\partial_{\mu\nu}(V^\sigma) + \partial_\mu(V^\epsilon)\Gamma^\sigma{}_{\nu\epsilon} + \partial_\nu(V^\epsilon)\Gamma^\sigma{}_{\mu\epsilon}\Big) + \Big(V^\epsilon\partial_\mu(\Gamma^\sigma{}_{\nu\epsilon}) + V^\eta\Gamma^\epsilon{}_{\nu\eta}\Gamma^\sigma{}_{\mu\epsilon}\Big) - D_\eta(V^\sigma)\Gamma^\eta{}_{\mu\nu} \\
= \;& \Big(\partial_{\mu\nu}(V^\sigma) + \partial_\mu(V^\epsilon)\Gamma^\sigma{}_{\nu\epsilon} + \partial_\nu(V^\epsilon)\Gamma^\sigma{}_{\mu\epsilon}\Big) + \Big(V^\epsilon\partial_\mu(\Gamma^\sigma{}_{\nu\epsilon}) + V^\epsilon\Gamma^\eta{}_{\nu\epsilon}\Gamma^\sigma{}_{\mu\eta}\Big) - D_\eta(V^\sigma)\Gamma^\eta{}_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Finalement nous obtenons

$$[D_\mu, D_\nu](V^\sigma) = V^\epsilon\Big(\partial_\mu(\Gamma^\sigma{}_{\nu\epsilon}) - \partial_\nu(\Gamma^\sigma{}_{\mu\epsilon}) + \Gamma^\sigma{}_{\mu\eta}\Gamma^\eta{}_{\nu\epsilon} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\eta}\Gamma^\eta{}_{\mu\epsilon}\Big) - D_\eta(V^\sigma)\Big(\Gamma^\eta_{\mu\nu} - \Gamma^\eta_{\nu\mu}\Big)$$

□

Corollaire 4.2 (Identités de Ricci)**.** *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne et $\boldsymbol{D}$ une connexion sans torsion ; alors pour tout champ de vecteur V et toute forme différentielle*[10] *ξ :*

$$[D_\mu, D_\nu](V^\sigma) := V^\epsilon R^\sigma{}_{\epsilon\mu\nu} \quad \textit{et} \quad [D_\mu, D_\nu](\xi_\sigma) = -\xi_\epsilon R^\epsilon{}_{\sigma\mu\nu}$$

Preuve. Les identités de Ricci découlent directement du Théorème 4.1 du fait que la connexion $\boldsymbol{D}$ est supposée sans torsion (i.e. $T^\sigma{}_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} = 0$).

□

Les identités de Ricci s'appliquent plus généralement sous la forme suivante :

Théorème 4.3 (Identités de Ricci généralisées)**.** *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne et $\boldsymbol{D}$ une connexion sans torsion : si $F^{\sigma_1\cdots\sigma_p}{}_{\tau_1\cdots\tau_q}$ sont les composantes d'un tenseur (p, q) alors :*

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu](F^{\sigma_1\cdots\sigma_p}{}_{\tau_1\cdots\tau_q}) &= \sum_{i=1}^{p} F^{\sigma_1\cdots(\epsilon\leftarrow\sigma_i)\cdots\sigma_p}{}_{\tau_1\cdots\tau_q} R^{\sigma_i}{}_{\epsilon\mu\nu} \\
&= -\sum_{i=1}^{q} F^{\sigma_1\cdots\sigma_p}{}_{\tau_1\cdots(\epsilon\leftarrow\tau_i)\cdots\tau_q} R^{\epsilon}{}_{\tau_i\mu\nu}
\end{aligned}$$

5. Les symétries du tenseur de courbure

Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension n et $\boldsymbol{D}$ une connexion affine (à priori quelconque) de coefficients $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}$ et associée au système de dérivations partielles covariantes $(D_1, \ldots, D_n)$. Le tenseur de courbure associé à la connexion $\boldsymbol{D}$ est le tenseur $(1, 3)$ (abusivement) identifié à l'application $(U, V, W) \mapsto R(U, V, W) = R(U, V)W$ définie par (6) ; ses composantes $R^\tau{}_{\sigma\mu\nu}$ données par (7) s'expriment en fonction des coefficients de la connexion et de leur dérivées premières. De plus pour U, V fixés, $R(U, V)$ s'identifie à un tenseur $(1, 1)$ de composantes $R(U, V)^\tau{}_\sigma = U^\mu V^\nu R^\tau_{\sigma\mu\nu}$. La première antisymétrie du tenseur de courbure est une conséquence directe de la définition du tenseur

10. Nous savons aussi (c.f. [Oli15a, Théorème 14.2]) que la g-compatibilité d'une connexion $\boldsymbol{D}$ est équivalent à la commutation des composantes de la métrique avec les dérivées partielles covariantes : ainsi, en écrivant $\xi^\sigma = g^{\sigma\epsilon}\xi_\epsilon$, il vient $[D_\mu, D_\nu](\xi_\sigma) = [D_\mu, D_\nu](g_{\sigma\epsilon}\xi^\epsilon) = g_{\sigma\epsilon}[D_\mu, D_\nu](\xi^\epsilon)$ et par suite

$$[D_\mu, D_\nu](\xi_\sigma) = g_{\sigma\epsilon}\big(\xi^\eta R^\epsilon{}_{\eta\mu\nu}\big) = \xi^\eta\big(g_{\sigma\epsilon}R^\epsilon{}_{\eta\mu\nu}\big)\big(g^{\eta\tau}\xi_\tau\big)R_{\sigma\eta\mu\nu} = \xi_\tau\big(g^{\tau\eta}R_{\sigma\eta\mu\nu}\big)$$

Or (c.f. (iii)-Proposition 5.1 infra), la compatibilité métrique de $\boldsymbol{D}$ entraîne aussi l'antisymétrie $R_{\sigma\eta\mu\nu} = -R_{\eta\sigma\mu\nu}$: par suite $g^{\tau\eta}R_{\sigma\eta\mu\nu} = -g^{\tau\eta}R_{\eta\sigma\mu\nu} = -R^\tau{}_{\sigma\mu\nu}$ et finalement : $[D_\mu, D_\nu](\xi_\sigma) := -\xi_\tau R^\tau{}_{\sigma\mu\nu}$.

lui même (6) et du fait que $[V,U] = -[U,V]$: ainsi, nous obtenons $R(U,V) = -R(V,U)$, ce qui se traduit en composantes par l'identité :

$$R^{\sigma}{}_{\tau\mu\nu} = -R^{\sigma}{}_{\tau\nu\mu}$$

Maintenant, nous supposons que la connexion $\boldsymbol{D}$ est sans torsion. Étant donnés U,V,W trois champs de vecteurs, nous composons l'équation $\boldsymbol{D}_V(W) - \boldsymbol{D}_W(V) - [V,W] = 0$ par $\boldsymbol{D}_U$: par permutation circulaire de U,V,W, nous obtenons trois équations, soient :

$$\boldsymbol{D}_U\big(\boldsymbol{D}_V(W)\big) - \boldsymbol{D}_U\big(\boldsymbol{D}_W(V)\big) - \boldsymbol{D}_U\big([V,W]\big) = 0 \tag{13}$$

$$\boldsymbol{D}_W\big(\boldsymbol{D}_U(V)\big) - \boldsymbol{D}_W\big(\boldsymbol{D}_V(U)\big) - \boldsymbol{D}_W\big([U,V]\big) = 0 \tag{14}$$

$$\boldsymbol{D}_V\big(\boldsymbol{D}_W(U)\big) - \boldsymbol{D}_V\big(\boldsymbol{D}_U(W)\big) - \boldsymbol{D}_V\big([W,U]\big) = 0 \tag{15}$$

Or, l'abscence de torsion de $\boldsymbol{D}$, nous permet aussi d'écrire successivement

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{D}_U\big([V,W]\big) &= \boldsymbol{D}_{[V,W]}(U) + [U,[V,W]] \\
\boldsymbol{D}_W\big([U,V]\big) &= \boldsymbol{D}_{[U,V]}(W) + [W,[U,V]] \\
\boldsymbol{D}_V\big([W,U]\big) &= \boldsymbol{D}_{[W,U]}(V) + [V,[W,U]]
\end{aligned}$$

Par suite en additionnant membre à membre les équations (13) (14) et (14) nous obtenons

$$R(U,V)W + R(W,U)V + R(V,W)U = [U,[V,W]] + [W,[U,V]] + [V,[W,U]] \tag{16}$$

L'identité de Jacobi du crochet de Lie sur les champs annule membre de gauche de (16) : nous obtenons alors la première identité de Bianchi :

$$R(U,V)W + R(W,U)V + R(V,W)U = 0$$

En composantes, nous pouvons écrire

$$R^{\sigma}{}_{\tau\mu\nu} + R^{\sigma}{}_{\nu\tau\mu} + R^{\sigma}{}_{\mu\nu\tau} = 0$$

La deuxième antisymétrie du tenseur de courbure n'est vérifiée que lorsque la connexion est métrique et sans torsion, i.e. lorsque $\boldsymbol{D}$ coïncide avec la connexion de Levi-Civita ∇. En effet, par application du Théorème 4.3 au tenseur métrique, il vient :

$$\nabla_\alpha\big(\nabla_\beta(g_{\mu\nu})\big) - \nabla_\beta\big(\nabla_\alpha(g_{\mu\nu})\big) = g_{\sigma\nu}R^{\sigma}{}_{\mu\alpha\beta} + g_{\mu\sigma}R^{\sigma}{}_{\nu\alpha\beta} = R_{\nu\mu\alpha\beta} + R_{\mu\nu\alpha\beta} \tag{17}$$

Or la dérivée covariante $\nabla(g)$ (de composantes $\nabla_\sigma(g_{\mu\nu})$) du tenseur métrique (pour la connexion de Levi-Civita) est identiquement nulle et par suite (17) devient

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = -R_{\nu\mu\alpha\beta}$$

Notons enfin que lorsque $\boldsymbol{D} = \nabla$ le tenseur de courbure (i.e. le tenseur de Riemann) satisfait à la fois la première antisymétrie, l'identité de Bianchi et la deuxième antisymétrie : par suite (c.f. Proposition 2.1) le tenseur tenseur de Riemann covariant satisfait aussi la bisymétrie, c'est-à-dire qu'en composantes :

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu}$$

Proposition 5.1. *Soit (M,g) une variété pseudo-riemannienne de dimension n et soit $(U,V,W) \mapsto R(U,V)W$ le tenseur de courbure associé à une connexion $\boldsymbol{D}$ à priori arbitraire. Alors (i) : La première antisymétrie i.e.*

$$R^{\tau}{}_{\sigma[\mu\nu]} = 0$$

est toujours valide ; (ii) : la première identité de Bianchi, soit

$$R^{\tau}{}_{[\sigma\mu\nu]} = 0$$

est satisfaite dès que la connexion $\boldsymbol{D}$ est sans torsion ; (iii) : lorsque la connexion $\boldsymbol{D}$ est métrique et sans torsion (i.e. $\boldsymbol{D}$ coincide avec la connexion de Levi-Civita) le tenseur de courbure satisfait aussi la deuxième antisymétrie, ainsi que la bisymétrie, soient respectivement :

$$R_{[\tau\sigma]\mu\nu} = 0 \quad \textit{et} \quad R_{\tau\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\tau\sigma}$$

Nous avons vu (Proposition 5.1) que la première identité de Bianchi est satisfaite par le tenseur de courbure d'une connexion $\boldsymbol{D}$, du moment que la connexion en question est sans torsion. Nous terminons ce paragraphe en établissant la seconde identité de Bianchi (ou encore identité différentielle de Bianchi) : elle s'exprime à l'aide de la dérivation covariante des tenseurs.

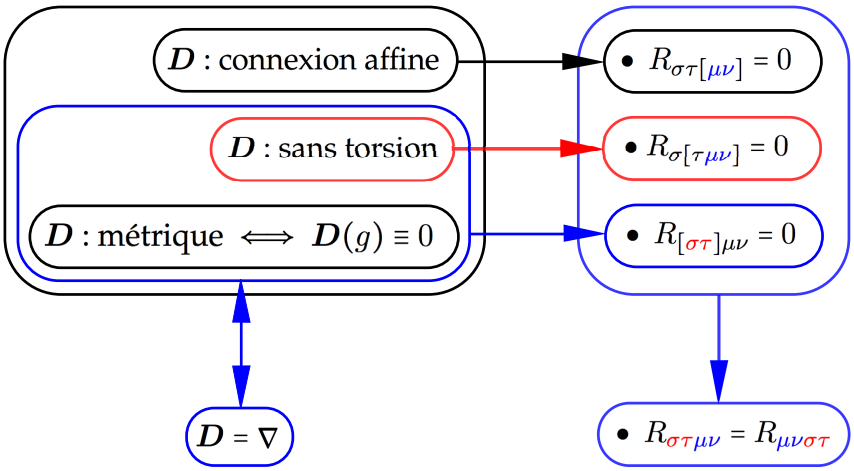

FIGURE 2. *Les propriétés de symétrie du tenseur de courbure d'une connexion $\boldsymbol{D}$ relativement aux propriétés de $\boldsymbol{D}$. Le tenseur de Riemann proprement dit correspond au cas où $\boldsymbol{D}$ est métrique et sans torsion, ce qui signifie (Théorème de Koszul) que $\boldsymbol{D}$ coïncide avec la connexion de Levi-Civita notée ∇.*

Proposition 5.2. *Soit M une variété et $(U,V,W) \mapsto R(U,V)W$ le tenseur de courbure associé à une une connexion $\boldsymbol{D}$, supposée sans torsion. La seconde identité de Bianchi affirme que pour tout triplet (U,V,W) de champ de vecteurs sur M,*

$$\boldsymbol{D}_U\big(R(V,W)\big) + \boldsymbol{D}_V\big(R(W,U)\big) + \boldsymbol{D}_W\big(R(U,V)\big) = 0$$

ce qui en composante s'écrit

$$D_\epsilon(R^{\tau}{}_{\sigma\mu\nu}) + D_\mu(R^{\tau}{}_{\sigma\nu\epsilon}) + D_\nu(R^{\tau}{}_{\sigma\epsilon\mu}) = 0$$

Preuve (d'après [Wal10]**).** En identifiant les dérivées partielles covariantes des deux membres de l'identité de Ricci $[D_\mu, D_\nu](\xi_\sigma) = -\xi_\tau R^{\tau}{}_{\sigma\mu\nu}$ (c.f. Corollaire 4.2), nous obtenons par la règle de Liebniz appliquée au second membre :

$$D_\epsilon[D_\mu, D_\nu](\xi_\sigma) = -D_\epsilon(\xi_\tau)R^{\tau}{}_{\sigma\mu\nu} - \xi_\tau D_\epsilon(R^{\tau}{}_{\sigma\mu\nu})$$

Il vient alors successivement

$$\begin{aligned}
\xi_\tau D_\epsilon(R^\tau{}_{\sigma\mu\nu}) &= -D_\epsilon[D_\mu, D_\nu](\xi_\sigma) - D_\epsilon(\xi_\tau)R^\tau{}_{\sigma\mu\nu} \\
&= -D_\epsilon[D_\mu, D_\nu](\xi_\sigma) + \Big(- D_\epsilon(\xi_\tau)R^\tau{}_{\sigma\mu\nu} - D_\tau(\xi_\sigma)R^\tau{}_{\epsilon\mu\nu}\Big) + D_\tau(\xi_\sigma)R^\tau{}_{\epsilon\mu\nu} \\
&= -D_\epsilon[D_\mu, D_\nu](\xi_\sigma) + [D_\mu, D_\nu]\big(D_\epsilon(\xi_\sigma)\big) + D_\tau(\xi_\sigma)R^\tau{}_{\epsilon\mu\nu}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'identité de Ricci généralisée (c.f. Théorème 4.3) avec le tenseur $(0,2)$ de composante $D_\epsilon(\xi_\tau)$. En développant les crochets des dérivées secondes $[D_\mu, D_\nu]$ et en effectuant les permutations sur les indices ϵ, μ, ν, il vient

$$\begin{aligned}
\xi_\tau D_\epsilon(R^\tau{}_{\sigma\mu\nu}) &= -\Big(D_{\epsilon\mu\nu}(\xi_\sigma) - D_{\epsilon\nu\mu}(\xi_\sigma)\Big) + \Big(D_{\mu\nu\epsilon}(\xi_\sigma) - D_{\nu\mu\epsilon}(\xi_\sigma)\Big) + D_\tau(\xi_\sigma)R^\tau{}_{\epsilon\mu\nu} \\
\xi_\tau D_\mu(R^\tau{}_{\sigma\nu\epsilon}) &= -\Big(D_{\mu\nu\epsilon}(\xi_\sigma) - D_{\mu\epsilon\nu}(\xi_\sigma)\Big) + \Big(D_{\nu\epsilon\mu}(\xi_\sigma) - D_{\epsilon\nu\mu}(\xi_\sigma)\Big) + D_\tau(\xi_\sigma)R^\tau{}_{\mu\nu\epsilon} \\
\xi_\tau D_\nu(R^\tau{}_{\sigma\epsilon\mu}) &= -\Big(D_{\nu\epsilon\mu}(\xi_\sigma) - D_{\nu\mu\epsilon}(\xi_\sigma)\Big) + \Big(D_{\epsilon\mu\nu}(\xi_\sigma) - D_{\mu\epsilon\nu}(\xi_\sigma)\Big) + D_\tau(\xi_\sigma)R^\tau{}_{\nu\epsilon\mu}
\end{aligned}$$

soit encore, en additionnant membres à membres ces trois équations :

$$\xi_\tau\Big(D_\epsilon(R^\tau{}_{\sigma\mu\nu}) + D_\mu(R^\tau{}_{\sigma\nu\epsilon}) + D_\nu(R^\tau{}_{\sigma\epsilon\mu})\Big) = D_\tau(\xi_\sigma)\Big(R^\tau{}_{\epsilon\mu\nu} + R^\tau{}_{\mu\nu\epsilon} + R^\tau{}_{\nu\epsilon\mu}\Big)$$

La conclusion vient de la première identité de Bianchi (c.f. (ii)-Proposition 5.1) et du fait que ξ est une forme différentielle quelconque.

□

Remarque 5.3. *Il existe une notation classique donnant une expression condensée des dérivées covariantes des tenseurs : si $F^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ sont les composantes d'un tenseur (p,q), alors :*

$$F^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q;\epsilon} := D_\epsilon\big(F^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}\big)$$

Ainsi, (lorsque $\boldsymbol{D}$ est sans torsion) nous pouvons écrire la seconde identité de Bianchi

$$R^\tau{}_{\sigma[\mu\nu;\epsilon]} = 0$$

6. Exponentielle de Riemann et coordonnées normales

Dans ce paragraphe, nous considérons que (M, g) est une variété (pseudo)-riemannienne de dimension n. D'après le Théorème de Levi-Civita (c.f. [Oli15a, Théorème 13.1]), nous savons qu'un chemin $t \mapsto \gamma(t)$ dans M est une géodésique inertielle si et seulement si γ transporte parallèlement son propre vecteur vitesse relativement à la connexion de Levi-Civita : cela se traduit – dans un système $\boldsymbol{x}$ de coordonnées locales – par le fait que les composantes cartésiennes γ^μ de γ (i.e. $\gamma = \boldsymbol{X}(\gamma^1, \ldots, \gamma^n)$, avec $\boldsymbol{X}$ la carte associée à $\boldsymbol{x}$) satisfont le système différentiel

$$\ddot{\gamma}^\sigma(t) + \dot{\gamma}^\mu(t)\dot{\gamma}^\nu(t)\mathbb{C}^\sigma{}_{\mu\nu}(\gamma(t)) = 0 \tag{18}$$

où les $\mathbb{C}^\sigma{}_{\mu\nu}$ désignent les symboles de Christoffel pour les coordonnées locales $\boldsymbol{x}$. La géodésique inertielle γ est dite issue d'un point X lorsque $\gamma(0) = X$; une telle géodésique est entièrement déterminée par le vecteur vitesse initial, soit $v = \dot{\gamma}(0)$: pour préciser les paramètres de la géodésique, nous notons $\gamma(t) = \exp_X(tv)$, c'est-à-dire que $(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) = (X, v)$. Si $\mathcal{V}$ est le sous-ensemble de $T_X M$ des v t.q. $\exp(tv)$ soit défini pour tout $0 \leq t \leq 1$, alors l'application $v \mapsto \exp_X(v) =: \exp_X(1v)$ définie pour tout $v \in \mathcal{V}$ est par définition l'exponentielle de Riemann : nous supposerons par la suite que (M, g) est

géodésiquement complète, ce qui signifie que $\exp_X$ est définie sur tout $T_X M$, pour tout $X \in M$. En général, l'exponentielle de Riemann n'est ni injective, ni surjective (penser par exemple à la 2-sphère pour l'injectivité, ou encore à une variété non connexe pour la surjectivité). Cependant (et nous l'admettrons) il existe toujours un voisinage ouvert de 0 dans $T_X M$ pour lequel $\exp_X$ réalise une difféomorphisme sur son image $\mathcal{U}$ (ouvert de M). Supposons que X appartienne au domaine d'un système de coordonnées $\boldsymbol{x} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ et soit $\boldsymbol{X}$ la carte associée à $\boldsymbol{x}$: alors $\boldsymbol{x}$ est dit normal (ou encore inertiel) en X, si la base holonôme $(\partial_1|_X, \dots, \partial_n|_X)$ de $T_X M$ est orthonormée et si de plus il existe un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ t.q. pour tout $(y^1, \dots, y^n)$ dans ce voisinage

$$\exp_X\left(y^i \partial_i|_X\right) = Y \iff \boldsymbol{X}(y^1, \dots, y^n) = Y \iff (y^1, \dots, y^n) = \boldsymbol{x}(Y) \tag{19}$$

Nous admettrons l'existence de systèmes de coordonnées normal en chaque point X de M, ce qui revient à admettre l'existence du voisinage de 0 dans $T_X M$ sur lequel $\exp_X$ réalise un difféomorphisme.

Proposition 6.1. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne de dimension n, de signature*

$$(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = (+1, \dots, +1, -1, \dots, -1)$$

Si $\boldsymbol{x}$ un système de coordonnées normal en X, alors :

$$\boldsymbol{x}(X) = (0, \dots, 0) \quad g_{\mu\nu}(X) = \epsilon_\mu \delta_{\mu\nu} \quad \Gamma^k{}_{\mu\nu}(X) = 0 \quad \partial_\sigma|_X(g_{\mu\nu}) = 0 \quad \partial_\sigma|_X(g^{\mu\nu}) = 0$$

Preuve. Soit X un point du domaine d'un système (quelconque) de coordonnées $\boldsymbol{x}$ et $t \mapsto \gamma(t) \in \mathcal{U}$ une géodésique inertielle issue de X (i.e. $\gamma(0) = X$). Si $\gamma^1(t), \dots \gamma^n(t)$ sont les composantes de $\gamma(t)$ – en ce sens que $\boldsymbol{x}(\gamma(t)) = (\gamma^1(t), \dots \gamma^n(t))$ – alors $\gamma(t) = \exp_X(tv)$ où $v = \dot{\gamma}^i(0)\partial_i|_X$. Alors le chemin $t \mapsto (\gamma^1(t), \dots \gamma^n(t))$ (dans $\mathbb{R}^n$) est un germe de chemin en $\boldsymbol{x}(X)$ solution du système différentiel :

$$(\forall \sigma) \quad \ddot{\gamma}^\sigma(t) + \dot{\gamma}^\mu(t)\dot{\gamma}^\nu(t)\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}\big(\gamma(t)\big) = 0 \tag{20}$$

Soit $\boldsymbol{x}$ un système de coordonnées normal en X : alors, d'une part, $(\partial_1|_X, \dots, \partial_n|_X)$ est (définition) une base orthonormée de $T_X M$; d'autre part, l'identité $\exp_X(0v) = X$ implique d'après (19) que $\boldsymbol{x}(X) = (0, \dots, 0)$. Enfin, (19) entraîne aussi que

$$\exp_X(tv^i \partial_i|_X) = \gamma(t) \iff (tv^1, \dots, tv^n) = \boldsymbol{x}(\gamma(t))$$

en d'autres termes $tv^i = \gamma^i(t)$, pour tout t et tout $1 \le i \le n$ et par suite $(\dot{\gamma}^i(t), \ddot{\gamma}^i(t)) \equiv (v^i, 0)$. D'après (20) il vient $v^\mu v^\nu \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}(\gamma(t)) = 0$. La géodésique considérée en X étant arbitraire, nous obtenons que $v^\mu v^\nu \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}(X) = 0$, pour tout $(v^1, \dots, v^n) \in \mathbb{R}^n$: cela entraîne $\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}(X) = 0$, pour tout triplet d'indices (σ, μ, ν). Or, $\Gamma_{\sigma\mu\nu} = g_{\sigma\epsilon}\Gamma^\epsilon{}_{\mu\nu}$ et comme $\Gamma_{\sigma\mu\nu} + \Gamma_{\nu\mu\sigma} = \partial_\mu(g_{\nu\sigma})$, nous obtenons d'abord $\partial_\mu|_X(g_{\nu\sigma}) = 0$; l'identité $\partial_\mu|_X(g^{\nu\sigma}) = 0$, s'en déduit du fait que $g^{\nu\sigma} g_{\sigma\mu} = \delta^\nu{}_\mu$.

□

Remarque 6.2. *Pour la connexion de Levi-Civita, les composantes $R_{\kappa\sigma\mu\nu} := g_{\kappa\epsilon} R^\epsilon{}_{\sigma\mu\nu}$ du tenseur de courbure déduites de (7) par un calcul direct, s'écrivent :*

$$R_{\kappa\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2}\Big(\partial_{\sigma\nu}(g_{\kappa\mu}) - \partial_{\kappa\nu}(g_{\sigma\mu}) + \partial_{\kappa\mu}(g_{\sigma\nu}) - \partial_{\sigma\mu}(g_{\kappa\nu})\Big) + g_{\epsilon\eta}\Big(\Gamma^\epsilon_{\kappa\mu}\Gamma^\eta{}_{\sigma\nu} - \Gamma^\epsilon_{\kappa\nu}\Gamma^\eta{}_{\sigma\mu}\Big) \tag{21}$$

Il est alors possible de retrouver rapidement les identités de symétrie du tenseur de Riemann (covariant par exemple) en se plaçant dans un système des coordonnées normal en un point X donnée : dans ce cas, nous obtenons par la Proposition 6.1 :

$$R_{\kappa\sigma\mu\nu}(X) = \frac{1}{2}\Big(\partial_{\kappa\mu}|_X(g_{\sigma\nu}) + \partial_{\sigma\nu}|_X(g_{\kappa\mu}) - \partial_{\sigma\mu}|_X(g_{\kappa\nu}) - \partial_{\kappa\nu}|_X(g_{\sigma\mu})\Big) \tag{22}$$

En permutant les indices κ et σ dans (22) il vient :

$$R_{\sigma\kappa\mu\nu}(X) = \frac{1}{2}\Big(\partial_{\sigma\mu}|_X(g_{\kappa\nu}) + \partial_{\kappa\nu}|_X(g_{\sigma\mu}) - \partial_{\kappa\mu}|_X(g_{\sigma\nu}) - \partial_{\sigma\nu}|_X(g_{\kappa\mu})\Big) = -R_{\kappa\sigma\mu\nu}(X) \tag{23}$$

De même, en effectuant les trois permutations circulaires sur les indices (σ, μ, ν) dans (22), et en additionnant membre à membre les identités obtenues, nous retrouvons la première identité de Bianchi, i.e. $R_{\sigma[\kappa\mu\nu]}(X) = 0$. Enfin, en permutant les blocs d'indices $\kappa\sigma$ et $\mu\nu$ dans (22), nous utilisons la symétrie des $g_{\mu\nu}$ et la commutation des dérivations partielles (holonômes : Lemme de Schwarz), ce qui permet de retrouver la bisymétrie $R_{\sigma\kappa\mu\nu}(X) = R_{\mu\nu\sigma\kappa}(X)$.

7. Le tenseur Ricci et l'équation d'Einstein

Le tenseur de Ricci est obtenu (au signe prêt) comme la seule contraction non nulle du tenseur de Riemann. Ainsi, dans des coordonnées normales et réduites en X,

$$R^{\tau}{}_{\mu\nu\sigma} = \partial_\nu\left(\Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma}\right) - \partial_\sigma\left(\Gamma^{\tau}{}_{\mu\nu}\right)$$

et pour $\tau = \mu$, les symboles de Christoffel réduits (c.f. [Oli15a, Lemme 15.2]) s'écrivent

$$R^{\mu}{}_{\mu\nu\sigma} = \partial_\nu\Gamma^{\mu}{}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma\Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu} = \partial_\nu\partial_\sigma\left(\log\sqrt{|\det g|}\right) - \partial_\sigma\partial_\nu\left(\log\sqrt{|\det g|}\right) = 0$$

(où on a utilisé le Lemme de Schwarz). Pour $\tau = \nu$ il vient $R_{\mu\sigma} = R^{\nu}{}_{\mu\nu\sigma} = \partial_\nu(\Gamma^{\nu}{}_{\mu\sigma}) - \partial_\sigma(\Gamma^{\nu}{}_{\mu\nu})$. Enfin, pour $\tau = \sigma$ nous avons $R^{\sigma}{}_{\mu\nu\sigma} = -R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu} = -R_{\mu\nu}$. En résumé,

$$(R^{\mu}{}_{\mu j\sigma}, R^{\nu}{}_{\mu\nu\sigma}, R^{\sigma}{}_{\mu j\sigma}) = (0, R_{\mu\sigma}, -R_{\mu\nu})$$

Le tenseur de Ricci – noté Ric – est le tenseur $(0,2)$ dont les composantes sont

$$R_{\mu\nu} = R^{\sigma}{}_{\mu\sigma\nu}$$

Le scalaire de Ricci R est alors défini comme *la trace* du tenseur de Ricci, en ce sens que

$$R := g^{\mu\nu}R_{\nu\mu} = R^{\mu}{}_{\mu}$$

Enfin, le tenseur d'Einstein – noté Ein – est le tenseur $(0,2)$ dont les composantes sont :

$$E_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$$

Proposition 7.1. *(i) : Le tenseur de Ricci est symétrique, i.e.*

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$$

(ii) : La divergence du tenseur de Ricci est égale à la moitié du gradient du scalaire de Ricci, i.e.

$$\mathrm{div}(\mathrm{Ric})_\nu = \nabla_\mu(g^{\mu\eta}R_{\eta\nu}) = \nabla_\mu(R^{\mu}{}_{\nu}) = \frac{1}{2}\nabla_\nu(R) = \frac{1}{2}\partial_\nu(R)$$

(iii) : La divergence du tenseur d'Einstein est nulle, i.e.

$$\mathrm{div}(\mathrm{Ein})_\nu = \nabla_\mu(g^{\mu\eta}E_{\eta\nu}) = \nabla_\mu(E^{\mu}{}_{\nu}) = 0$$

(iv) : Le tenseur d'Einstein et le tenseur de Ricci s'annule simultanément, i.e. ;

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \iff R_{\mu\nu} = 0$$

Preuve. (i) : La symétrie du tenseur de Ricci découle de la bisymétrie du tenseur de Riemann covariant (c.f. Proposition 5.1-(iii)) : ainsi nous avons successivement

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\beta\mu\alpha\nu} = g^{\beta\alpha} R_{\alpha\nu\beta\mu} = R^{\beta}{}_{\nu\beta\mu} = R_{\nu\mu}$$

(ii) : D'une part (c.f. Proposition 5.2), la connexion de Levi-Civita ∇ étant sans torsion, nous pouvons utiliser la seconde identité de Bianchi soit, sous forme condensée $R^{\tau}{}_{\sigma[\mu\nu;\epsilon]} = 0$ (c.f. Remarque 5.3). D'autre part, ∇ étant aussi métrique, la divergence de la métrique est identiquement nulle (c.f. [Oli15a, Théorème 14.3]) et le relèvement/abaissement des indices commute avec les dérivations partielles covariantes ∇_μ. Ainsi, nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
R^{\tau}{}_{\sigma[\mu\nu;\epsilon]} &= 0 \\
\nabla_\epsilon(R^{\tau}{}_{\sigma\mu\nu}) + \nabla_\nu(R^{\tau}{}_{\sigma\epsilon\mu}) + \nabla_\mu(R^{\tau}{}_{\sigma\nu\epsilon}) &= 0 \\
\nabla_\epsilon(R_{\sigma\nu}) - \nabla_\nu(R_{\sigma\epsilon}) + \nabla_\mu(R^{\mu}{}_{\sigma\nu\epsilon}) &= 0 \qquad \text{(avec } \tau = \mu\text{)} \\
\nabla_\epsilon(g_{\sigma\eta} R^{\eta}{}_{\nu}) - \nabla_\nu(g_{\sigma\eta} R^{\eta}{}_{\epsilon}) + \nabla_\mu(R^{\mu}{}_{\sigma\nu\epsilon}) &= 0 \\
\nabla_\epsilon(R^{\eta}{}_{\nu}) - \nabla_\nu(R^{\eta}{}_{\epsilon}) + \nabla_\mu(g^{\eta\sigma} g^{\mu\rho} R_{\rho\sigma\nu\epsilon}) &= 0 \\
\nabla_\epsilon(R^{\eta}{}_{\nu}) - \nabla_\nu(R^{\eta}{}_{\epsilon}) - \nabla_\mu(g^{\mu\rho} g^{\eta\sigma} R_{\sigma\rho\nu\epsilon}) &= 0 \\
\nabla_\epsilon(R^{\eta}{}_{\nu}) - \nabla_\nu(R^{\eta}{}_{\epsilon}) - \nabla_\mu(g^{\mu\rho} R^{\eta}{}_{\rho\nu\epsilon}) &= 0 \\
\nabla_\epsilon(R^{\nu}{}_{\nu}) - \nabla_\nu(R^{\nu}{}_{\epsilon}) - \nabla_\mu(g^{\mu\rho} R_{\rho\epsilon}) &= 0 \qquad \text{(avec } \eta = \nu\text{)}
\end{aligned}$$

soit encore $\nabla_\epsilon(R) = 2\nabla_\nu(R^{\nu}{}_{\epsilon})$: on conclut du fait que $\nabla_\epsilon(R) = \partial_\epsilon(R)$.

(iii) : L'expression de la divergence du tenseur de Ricci entraîne que

$$\nabla_\mu(R^{\mu}{}_{\nu}) = \frac{1}{2} \delta^{\mu}{}_{\nu} \nabla_\mu(R)$$

Ainsi, nous pouvons calculer la ν-ème composante de la divergence de Ein en écrivant :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(\mathrm{Ein})_\nu = \nabla_\mu(E^{\mu}{}_{\nu}) &= \nabla_\mu(R^{\mu}{}_{\nu}) - \frac{1}{2}\nabla_\mu(\delta^{\mu}{}_{\nu} R) \\
&= \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}\nabla_\mu(R) - \frac{1}{2}\nabla_\mu(g^{\mu\epsilon} g_{\epsilon\nu} R) = \frac{1}{2}\delta^{\mu}{}_{\nu}\nabla_\mu(R) - \frac{1}{2}(g^{\mu\epsilon} g_{\epsilon\nu})\nabla_\mu(R) = 0
\end{aligned}$$

(iv) : Par définition du tenseur d'Einstein $R_{\mu\nu} = 0$ entraîne $E_{\mu\nu} = 0$. Pour la réciproque nous partons de nouveau de la définition de Ein d'où $R^{\mu}{}_{\nu} - 1/2\delta^{\mu}{}_{\nu} R = E^{\mu}{}_{\nu}$: pour $\mu = \nu$ il vient $R/2 = E^{\nu}{}_{\nu} = E$ de sorte que $R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} E + E_{\mu\nu}$. Finalement $E_{\mu\nu} = 0$ entraîne $R_{\mu\nu} = 0$. □

Le travail d'Einstein sur la Relativité Générale, se déroule sur une dizaine d'année et prend sa finale dans son exposée magistral de 1916 [Ein16] (c.f. [Eis02] pour une histoire de la Relativité Générale). Chez Gallilé et Newton, les mouvements inertiels (vus d'un repère inertiel/galliléen) sont rectilignes et uniformes. Comme conséquence de la gravitation universelle de Newton, une distribution de masse ρ (définie en tout point de l'espace) engendre un champ de force conservatif, i.e. dérivant d'un potentiel Φ. La

relation entre la distribution de masse ρ et le potentiel Φ est donnée par l'équation de Poisson, soit

$$\Delta(\Phi) = 4\pi G\rho \tag{24}$$

Ici, Δ est l'opérateur laplacien, $\pi = 3.14\ldots$ est la constante mathématique et G la constante de la gravitation universelle. L'équation de Poisson découle de la version gravitationnelle du Théorème de Gauss et du Théorème du flux-divergence. Dans la Relativité Générale d'Einstein, la gravitation n'est plus considérée comme une force : elle est identifiée à la courbure de l'espace-temps. Les mouvements inertiels suivent (par définition) des géodésiques inertielles de l'espace-temps (variété lorentzienne munie de la connexion de Levi-Civita) dont la courbure est entièrement déterminée par la métrique. Les deux dernières années de mise au point de sa théorie de la gravitation ont été très difficiles pour Einstein. Durant cette période, il correspond régulièrement avec David Hilbert sur ce sujet précis, risquant de se faire doubler au dernier moment, pour la formulation des équations de la gravitation, par le grand mathématicien du moment.

Le tenseur énergie-impulsion [11] T de la Relativité Générale est un tenseur de valence $(0,2)$ décrivant la distribution spatio-temporelle de masse-énergie et dont la définition découle du tenseur énergie-impulsion de l'électrodynamique relativiste (c.f. [Wei72] et [Car13] par exemple). Ainsi (et nous l'admettrons) T est un tenseur symétrique (i.e. $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$), s'annulant uniformément dans les portions d'espace vide de matière-énergie et qui de plus, satisfait le principe de conservation de l'énergie, en ce sens que

$$\mathrm{div}(T)_\nu = \nabla_\mu(g^{\mu\eta}T_{\eta\nu}) = \nabla_\mu(T^\mu{}_\nu) \equiv 0$$

Les équations d'Einstein affirment

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{25}$$

où on reconnaît (à gauche) le tenseur d'Einstein et où (à droite) nous trouvons $\pi = 3.14\ldots$, la constante de la gravitation G et la vitesse de la lumière c. Il est important de remarquer que l'égalité entre le tenseur d'Einstein et le tenseur énergie-impulsion dans (20) est consistante relativement à la symétrie de T et au principe de conservation de l'énergie $\mathrm{div}(T) = 0$ (c.f. Proposition 7.1) : ceci n'est qu'une partie de l'ensemble des justifications du contenu *physique* de cette équation (voir de nouveau [Wei72] pour une analyse systématique de l'équation d'Einstein et [Car13] pour une heuristique très vivante).

Remarquons pour finir que le tenseur énergie-implusion T s'annule dans les portions de l'espace qui sont vides de toute matière-énergie : ainsi, le fait (c.f. (iv)-Proposition 7.1) que le tenseur d'Einstein et le tenseur de Ricci s'annulent simultanément implique que les équations d'Einstein dans le vide se réduisent à

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{26}$$

8. Interprétation géodésique du tenseur de Riemann

Soit X un point de M et U, V deux champs de vecteurs. Nous rappelons que $y \mapsto \exp_X(tU|_X)$ dénote la géodésique de M passant initialement par X à la vitesse $U|_X$. Pour

11. À ne pas confondre avec le tenseur de torsion qui est nul pour la connection de Levi-Civita.

ε fixé (petit), nous notons $H = H(\varepsilon) := \exp_X(\varepsilon U|_X)$, de sorte qu'en composante [12]

$$H^\sigma = X^\sigma + \varepsilon U^\sigma(X) - \frac{\varepsilon^2}{2} U^\mu(X) U^\nu(X) \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}(X) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{27}$$

D'autre part, si $\hat{V}(H)$ est le vecteur de $T_H M$ obtenu par le transport parallèle de $V|_X$ le long de $t \mapsto \exp_X(tU|_X)$ en H, alors :

$$\hat{V}^\sigma(H) = V^\sigma(X) - \varepsilon U^\mu(X) V^\nu(X) \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}(X) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{28}$$

Par suite, pour $I = I(\varepsilon) := \exp_H(\varepsilon \hat{V}(H))$ il vient :

$$\begin{aligned} I^\sigma &= H^\sigma + \varepsilon \hat{V}^\sigma(H) - \frac{\varepsilon^2}{2} \hat{V}^\mu(H) \hat{V}^\nu(H) \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}(H) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ &= H^\sigma + \varepsilon \hat{V}^\sigma(H) - \frac{\varepsilon^2}{2} V^\mu(X) V^\nu(X) \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}(X) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

soit encore, compte tenu (27) et (28) :

$$\begin{aligned} I^\sigma &= X^\sigma + \varepsilon\Big(U^\sigma(X) + V^\sigma(X)\Big) - \varepsilon^2 U^\mu(X) V^\nu(X) \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}(X) \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2}{2}\Big(U^\mu(X) U^\nu(X) + \hat{V}^\mu(X) \hat{V}^\nu(X)\Big) \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}(X) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{29}$$

Maintenant, en renversant les rôles des champs de vecteurs U et V nous définissons $K = K(\varepsilon)$ (de manière analogue à H) et $J = J(\varepsilon)$ (de manière analogue à I), ce qui donne symétriquement à (29)

$$\begin{aligned} J^\sigma &= X^\sigma + \varepsilon\Big(V^\sigma(X) + U^\sigma(X)\Big) - \varepsilon^2 V^\mu(X) U^\nu(X) \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}(X) \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2}{2}\Big(V^\mu(X) V^\nu(X) + \hat{U}^\mu(X) \hat{U}^\nu(X)\Big) \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}(X) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{30}$$

Finalement en combinant (29) et (30), nous obtenons

$$I^\sigma - J^\sigma = \varepsilon^2 U^\mu(X) V^\nu(X) \Big(\Gamma^\sigma{}_{\nu\mu}(X) - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}(X)\Big) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{31}$$

À partir de maintenant, nous supposons que la connexion $\boldsymbol{D}$ est sans torsion : cette hypothèse simplificatrice entraîne par (31) que $I^\sigma - J^\sigma = I^\sigma(\varepsilon) - J^\sigma(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^3)$. En d'autres termes, l'approximation $I(\varepsilon) \approx J(\varepsilon)$ est raisonnable lors d'un calcul au second ordre en ε. Considérons alors un troisième champ de vecteur, soit W. Par définition $\hat{W}(H)$ (resp. $\hat{W}(I)$) est le vecteur de $T_H M$ (resp. $T_I M$) obtenu par le transport parallèle de $W|_X$ (resp. $\hat{W}(H)$) le long de la géodésique $t \mapsto \exp_X(tU|_X)$ (resp. $t \mapsto \exp_H(t\hat{V}(\varepsilon))$). En échangeant les rôles de U et V nous définissons les vecteurs $\hat{W}(K) \in T_K M$ et $\hat{W}(J) \in T_J M$ de manière analogue aux vecteur $\hat{W}(H)$ et $\hat{W}(I)$ respectivement.

Afin de calculer le développement en $\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ de $\hat{W}(I)$ (et symétriquement pour $\hat{W}(J)$) nous notons $\gamma(t) := \exp_X(tU|_X)$, ce qui signifie que

$$(\forall \tau) \quad \ddot{\gamma}^\tau(t) + \dot{\gamma}^\mu(t) \dot{\gamma}^\nu(t) \Gamma^\tau{}_{\mu\nu}\big(\gamma(t)\big) = 0 \quad \text{avec} \quad \big(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)\big) = (X, U|_X) \tag{32}$$

12. Rappelons qu'ici nous supposons que la variété M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et que nous supposons être dans le domaine d'un système de coordonneés locales $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^1 \ldots, \boldsymbol{x}^n)$: ainsi, pour tout point X du domaine des coordonnées locales, nous notons $(X^1, \ldots, X^n)$ les coordonnées cartésiennes de $\boldsymbol{x}(X)$. Par suite si $v = v^\mu \partial_\mu|_X$ est un vecteur de $T_X M \equiv \mathbb{R}^n$ (suffisamment petit), et si $(Y^1, \ldots, Y^n)$ sont les coordonnées cartésiennesde $\boldsymbol{x}(Y)$ pour $Y = X + v$, alors $Y^\mu = X^\mu + v^\mu$ $(\forall \mu)$.

Considérons alors le champ de vecteurs $t \mapsto w(t)$ obtenu par le transport parallèle du vecteur $W|_X = w(0) \in T_X M$ le long de γ : en d'autres termes, nous avons

$$(\forall \tau) \quad \dot{w}^\tau(t) + \dot{\gamma}^\mu(t) w^\nu(t) \Gamma^\tau{}_{\mu\nu}(\gamma(t)) = 0 \quad \text{avec} \quad w^\tau(0) = W^\tau(X) \tag{33}$$

Nous appliquons la méthode d'Euler au second ordre en considérant le développement de Taylor de $w^\tau(t)$ en $t = 0$, soit :

$$w^\tau(t) = w^\tau(0) + t\dot{w}^\tau(0) + \frac{t^2}{2}\ddot{w}^\tau(0) + \mathcal{O}(t^3) \tag{34}$$

Comme $\dot{\gamma}^\tau(0) = U^\tau(X)$ et que $w^\tau(0) = W^\tau(X)$, l'équation différentielle du problème de Cauchy en (33) nous donne directement

$$\dot{w}^\tau(0) = -U^\mu(X) W^\sigma(X) \Gamma^\tau{}_{\mu\sigma}(X) \tag{35}$$

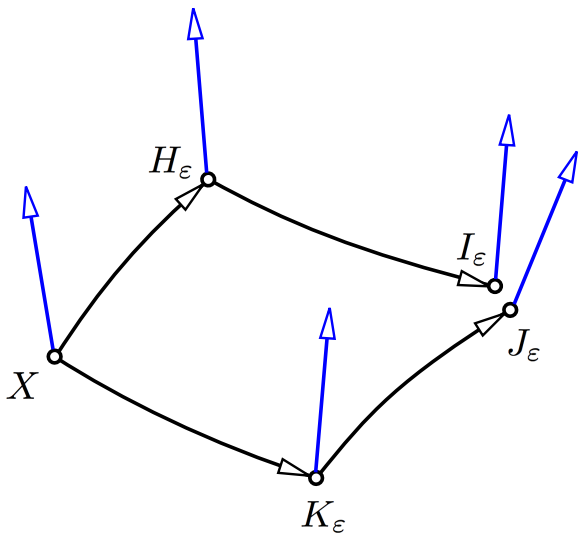

FIGURE 3. *Soient U et V deux champs de vecteurs et X un point de M. Pour ε suffisamment petit fixé, nous définissons les points $H = \exp_X(\varepsilon U|_X)$, $I = \exp_H(\varepsilon \hat{V}(\varepsilon))$, $K = \exp_X(\varepsilon V|_X)$ et $J = \exp_K(\varepsilon \hat{U}(\varepsilon))$: ici $\hat{V}(\varepsilon)$ (resp. $\hat{U}(\varepsilon)$) est obtenu par le transport parallèle de $V|_X$ (resp. $U|_X$) le long de la géodésique issue de X et de vitesse initiale $U|_X$ (resp. $V|_X$). Alors,*

$$I - J = \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

dès que la connexion $\boldsymbol{D}$ est sans torsion. Étant donné W un troisième champ de vecteurs, $\hat{W}(I)$ est obtenu par le transport parallèle de $W|_X$ le long de la géodésique issue de X et de vitesse initiale $U|_X$, suivi du transport parallèle le long de la géodésique issue de H et de vitesse initiale $\hat{V}(\varepsilon)$. Le vecteur $\hat{W}(J)$ étant obtenu symétriquement, en échangeant les rôles de U et V, on peut alors montrer que

$$\hat{W}(I) - \hat{W}(J') = \varepsilon^2 R(U,V) W|_X + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

Nous pouvons utiliser cette dernière expression de $\dot{w}^\tau(0)$ avec une deuxième application de (33), de sorte qu'avec l'expression de $\ddot{\gamma}(0)$ donnée par (32) il vient :

$$\begin{aligned}
\ddot{w}^\tau(0) &= -\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\Big(\dot{\gamma}^\nu(t)w^\sigma(t)\Gamma^\tau{}_{\nu\sigma}\big(\gamma(t)\big)\Big) \\
&= -\Big(-U^\mu(X)U^\epsilon(X)\Gamma^\nu{}_{\mu\epsilon}(X)W^\sigma(X)\Gamma^\tau{}_{\nu\sigma}(X) \\
&\qquad -U^\nu(X)U^\mu(X)\hat{W}^\epsilon(X)\Gamma^\sigma{}_{\mu\epsilon}(X)\Gamma^\tau{}_{\nu\sigma}(X) + U^\nu(X)W^\sigma(X)U^\mu(X)\partial_\mu|_X\left(\Gamma^\tau{}_{\nu\sigma}\right)\Big) \\
&= -U^\mu(X)\Big(-U^\nu(X)\Gamma^\epsilon{}_{\mu\nu}(X)W^\sigma(X)\Gamma^\tau{}_{\epsilon\sigma}(X) \\
&\qquad -U^\nu(X)\hat{W}^\sigma(X)\Gamma^\epsilon{}_{\mu\sigma}(X)\Gamma^\tau{}_{\nu\epsilon}(X) + U^\nu(X)W^\sigma(X)\partial_\mu|_X\left(\Gamma^\tau{}_{\nu\sigma}\right)\Big) \\
&= -U^\mu(X)U^\nu(X)W^\sigma(X)\Big(-\Gamma^\epsilon{}_{\mu\nu}(X)\Gamma^\tau{}_{\epsilon\sigma}(X) - \Gamma^\epsilon{}_{\mu\sigma}(X)\Gamma^\tau{}_{\nu\epsilon}(X) + \partial_\mu|_X\left(\Gamma^\tau{}_{\nu\sigma}\right)\Big)
\end{aligned}$$

soit encore :

$$\ddot{w}^\tau(0) = -U^\mu(X)U^\nu(X)W^\sigma(X)\Theta^\tau{}_{\sigma\mu\nu}(X) \tag{36}$$

où nous avons posé

$$\Theta^\tau{}_{\sigma\mu\nu} = \Big(\partial_\mu\left(\Gamma^\tau{}_{\nu\sigma}\right) - \Gamma^\epsilon{}_{\mu\sigma}\Gamma^\tau{}_{\nu\epsilon}\Big) - \Gamma^\epsilon{}_{\mu\nu}\Gamma^\tau{}_{\epsilon\sigma} \tag{37}$$

À partir du développement de Taylor de w^τ en (34) et compte tenu de la concition initiale sur $w^\tau(0)$ en (33) et des expressions de $\dot{w}^\tau(0)$ et $\ddot{w}^\tau(0)$ en (35) et (36), il vient :

$$\begin{aligned}
\hat{W}^\tau(H) &= W^\tau(X) - \varepsilon U^\mu(X)W^\sigma(X)\Gamma^\tau{}_{\mu\sigma}(X) \\
&\qquad -\frac{\varepsilon^2}{2}U^\mu(X)U^\nu(X)W^\sigma(X)\Theta^\tau{}_{\sigma\mu\nu}(X) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)
\end{aligned} \tag{38}$$

De même (en prenant cette fois $\gamma(t) = \exp_H(t\hat{V}(H))$) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\hat{W}^\tau(I) &= \hat{W}^\tau(H) - \varepsilon\hat{V}^\mu(H)\hat{W}^\sigma(H)\Gamma^\tau{}_{\mu\sigma}(H) \\
&\qquad -\frac{\varepsilon^2}{2}\hat{V}^\mu(H)\hat{V}^\nu(H)\hat{W}^\sigma(H)\Theta^\tau{}_{\sigma\mu\nu}(H) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)
\end{aligned} \tag{39}$$

Pour obtenir le développement de $\hat{W}^\tau(I)$ à partir du point X, nous pouvons d'une part remplacer $\hat{W}^\tau(H)$ par son expression en (38) et d'autre part,

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\hat{V}^\mu(H)\hat{V}^\nu(H)\hat{W}^\sigma(H)\Theta^\tau{}_{\sigma\mu\nu}(H) = -\frac{\varepsilon^2}{2}V^\mu(X)V^\nu(X)\hat{W}^\sigma(X)\Theta^\tau{}_{\sigma\mu\nu}(X) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

Le terme restant s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned}
-\varepsilon\hat{V}^{\mu}(H)\hat{W}^{\sigma}(H)\Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma}(H) &= -\varepsilon V^{\mu}(X)W^{\sigma}(X)\Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma}(X)\\
&\quad -\varepsilon^2\Big(-U^{\nu}(X)V^{\epsilon}(X)\Gamma^{\mu}{}_{\nu\epsilon}(X)W^{\sigma}(X)\Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma}(X)\\
&\qquad -V^{\mu}(X)U^{\nu}(X)W^{\epsilon}(X)\Gamma^{\sigma}{}_{\nu\epsilon}(X)\Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma}(X)\\
&\qquad +V^{\mu}(X)W^{\sigma}(X)U^{\nu}(X)\partial_{\nu}|_X\big(\Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma}(X)\big)\Big)+\mathcal{O}(\varepsilon^3)\\
&= -\varepsilon V^{\mu}(X)W^{\sigma}(X)\Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma}(X)\\
&\quad -\varepsilon^2U^{\nu}(X)\Big(-V^{\mu}(X)\Gamma^{\epsilon}{}_{\nu\mu}(X)W^{\sigma}(X)\Gamma^{\tau}{}_{\epsilon\sigma}(X)\\
&\qquad -V^{\mu}(X)W^{\sigma}(X)\Gamma^{\epsilon}{}_{\nu\sigma}(X)\Gamma^{\tau}{}_{\mu\epsilon}(X)\\
&\qquad +V^{\mu}(X)W^{\sigma}(X)\partial_{\nu}|_X\big(\Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma}(X)\big)\Big)+\mathcal{O}(\varepsilon^3)\\
&= -\varepsilon V^{\mu}(X)W^{\sigma}(X)\Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma}(X)\\
&\quad -\varepsilon^2U^{\nu}(X)V^{\mu}(X)W^{\sigma}(X)\Big(-\Gamma^{\epsilon}{}_{\nu\mu}(X)\Gamma^{\tau}{}_{\epsilon\sigma}(X)-\Gamma^{\epsilon}{}_{\nu\sigma}(X)\Gamma^{\tau}{}_{\mu\epsilon}(X)\\
&\qquad +\partial_{\nu}|_X\big(\Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma}(X)\big)\Big)+\mathcal{O}(\varepsilon^3)
\end{aligned}$$

soit (modulo quelques indices muets et) en utilisant les symboles $\Theta^{\tau}{}_{\sigma\mu\nu}$ définis en (37)

$$\begin{aligned}
-\varepsilon\hat{V}^{\nu}(H)\hat{W}^{\sigma}(H)\Gamma^{\tau}{}_{\nu\sigma}(H) &= -\varepsilon V^{\nu}(X)W^{\sigma}(X)\Gamma^{\tau}{}_{\nu\sigma}(X)\\
&\quad -\varepsilon^2U^{\mu}(X)V^{\nu}(X)W^{\sigma}(X)\Theta^{\tau}{}_{\sigma\mu\nu}(X)+\mathcal{O}(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

Finalement en utilisant le développement en (39) de $\hat{W}^{\tau}(I)$ devient :

$$\begin{aligned}
\hat{W}^{\tau}(I) &= W^{\tau}(X)-\varepsilon\Big(U^{\mu}(X)+V^{\mu}(X)\Big)W^{\sigma}(X)\Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma}(X)\\
&\quad -\frac{\varepsilon^2}{2}\Big(U^{\mu}(X)U^{\nu}(X)-2U^{\mu}(X)V^{\nu}(X)\\
&\qquad +V^{\mu}(X)V^{\nu}(X)\Big)W^{\sigma}(X)\Theta^{\tau}{}_{\sigma\mu\nu}(X)+\mathcal{O}(\varepsilon^3)
\end{aligned}\tag{40}$$

Comme symétriquement

$$\begin{aligned}
\hat{W}^{\tau}(J) &= W^{\tau}(X)-\varepsilon\Big(V^{\mu}(X)+U^{\mu}(X)\Big)W^{\sigma}(X)\Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma}(X)\\
&\quad -\frac{\varepsilon^2}{2}\Big(V^{\mu}(X)V^{\nu}(X)-2V^{\mu}(X)U^{\nu}(X)\\
&\qquad +U^{\mu}(X)U^{\nu}(X)\Big)W^{\sigma}(X)\Theta^{\tau}{}_{\sigma\mu\nu}(X)+\mathcal{O}(\varepsilon^3)
\end{aligned}\tag{41}$$

nous obtenons, par soustraction membre à membre de (40) et (41) :

$$\begin{aligned}
\hat{W}^{\tau}(I)-\hat{W}^{\tau}(J) &= -\varepsilon^2\Big(V^{\mu}(X)U^{\nu}(X)-U^{\mu}(X)V^{\nu}(X)\Big)W^{\sigma}(X)\Theta^{\tau}{}_{\sigma\mu\nu}(X)+\mathcal{O}(\varepsilon^3)\\
&= \varepsilon^2U^{\mu}(X)V^{\nu}(X)W^{\sigma}(X)\Big(\Theta^{\tau}{}_{\sigma\mu\nu}(X)-\Theta^{\tau}{}_{\sigma\nu\mu}(X)\Big)+\mathcal{O}(\varepsilon^3)
\end{aligned}$$

Or, en prenant en compte l'expression des valeurs prises par Θ données en (37), il vient

$$\begin{aligned}
\Theta^{\tau}{}_{\sigma\mu\nu}-\Theta^{\tau}{}_{\sigma\nu\mu} &= \Big(\partial_{\mu}\left(\Gamma^{\tau}{}_{\nu\sigma}\right)-\Gamma^{\epsilon}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\tau}{}_{\nu\epsilon}\Big)-\Gamma^{\epsilon}{}_{\nu\mu}\Gamma^{\tau}{}_{\epsilon\sigma}\\
&\quad -\Big(\partial_{\nu}\left(\Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma}\right)-\Gamma^{\epsilon}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\tau}{}_{\mu\epsilon}\Big)+\Gamma^{\epsilon}{}_{\mu\nu}\Gamma^{\tau}{}_{\epsilon\sigma}\\
&= \Big(\partial_{\mu}\left(\Gamma^{\tau}{}_{\nu\sigma}\right)-\Gamma^{\epsilon}{}_{\mu\sigma}\Gamma^{\tau}{}_{\nu\epsilon}\Big)-\Big(\partial_{\nu}\left(\Gamma^{\tau}{}_{\mu\sigma}\right)-\Gamma^{\epsilon}{}_{\nu\sigma}\Gamma^{\tau}{}_{\mu\epsilon}\Big)=R^{\tau}{}_{\sigma\mu\nu}(X)
\end{aligned}$$

(où nous utilisons l'absence de torsion de $\boldsymbol{D}$ i.e. $\Gamma^{\epsilon}{}_{\mu\nu} = \Gamma^{\epsilon}{}_{\nu\mu}$) et finalement

$$\hat{W}^{\tau}(I) - \hat{W}^{\tau}(J) = \varepsilon^2 U^{\mu}(X) V^{\nu}(X) W^{\sigma}(X) R^{\tau}{}_{\sigma\mu\nu}(X) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \tag{42}$$

9. Courbure de Gauss

9.1. **Rayon de courbure d'une courbe plane.** Soit $(C) := \boldsymbol{r}([a\,;b])$ le support d'une chemin (lisse) $\boldsymbol{r} : [a\,;b] \to \mathbb{R}^2$ (avec $a < 0 < b$) dont le paramétrage est l'abscisse curviligne que nous notons s : en d'autres termes $\langle \dot{\boldsymbol{r}}(s) | \dot{\boldsymbol{r}}(s) \rangle \equiv 1$. La dérivée de $\langle \dot{\boldsymbol{r}}(s) | \dot{\boldsymbol{r}}(s) \rangle$ par rapport à s est donc identiquement nulle, ce qui revient à dire que $2\,\langle \ddot{\boldsymbol{r}}(s) | \dot{\boldsymbol{r}}(s) \rangle \equiv 0$: ainsi, l'accélération $\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$ est toujours normale à la (tangente de la) courbe dirigée par la vitesse $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$. Considérons maintenant que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et que le plan du mouvement de (C) soit celui engendré par $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$: alors, tout paramètre s est associé à la base de Serret-Frenet $(\boldsymbol{\tau}(s), \boldsymbol{n}(s))$ telle que

$$\boldsymbol{\tau}(s) = \dot{\boldsymbol{r}}(s) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{n}(s) = \mathbf{e}_3 \times \boldsymbol{\tau}(s) \tag{43}$$

Par définition, la courbure (algébrique) de (C) en $\boldsymbol{r}(s)$ est le réel[13] $\kappa(\boldsymbol{r}(s)) = \kappa(s)$ t.q.

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(s) = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s) \tag{44}$$

son rayon de courbure (algébrique) valant $1/\kappa(s)$. Notons $\alpha(s)$ une mesure de l'angle orienté $(\mathbf{e}_1, \boldsymbol{\tau}(s))$ de sorte que $\boldsymbol{\tau}(s) = \cos(\alpha(s))\mathbf{e}_1 + \sin(\alpha(s))\mathbf{e}_2$ et $\boldsymbol{n}(s) = -\sin(\alpha(s))\mathbf{e}_1 + \cos(\alpha(s))\mathbf{e}_2$. Il vient alors $d\boldsymbol{\tau}/ds = \dot{\alpha}(s)\boldsymbol{n}_s$ et $d\boldsymbol{n}/ds = -\dot{\alpha}(s)\boldsymbol{\tau}(s)$. Par définition de la courbure, $\kappa(s)$ s'identifie donc à $\dot{\alpha}(s)$, ce qui nous permet de conclure que

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \kappa(s)\boldsymbol{n}(s) \quad \text{et} \quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\kappa(s)\boldsymbol{\tau}(s) \tag{45}$$

Enfin, la dérivée troisième de $\boldsymbol{r}(s)$ s'obtient en dérivant (44) et compte de (45), il vient :

$$\dddot{\boldsymbol{r}}(s) = -\kappa^2(s)\boldsymbol{\tau}(s) + \dot{\kappa}(s)\boldsymbol{n}(s) \tag{46}$$

Pour une interprétation géométrique intuitive de la courbure et du rayon de courbure, nous considérons sans (trop de) pertes de généralités que $\boldsymbol{r}(s)$ est défini sur un voisinage de $t = 0$ avec $\boldsymbol{r}(0) = (0,0)$ et les deux conditions $\dot{\boldsymbol{r}}(0) = (1,0)$ et[14] $\kappa(0) > 0$. Pour comprendre la signification de la courbure $\kappa(0)$ (et du rayon de courbure $1/\kappa(0)$), considérons les cercles tangents, soit (C_a) de centre $(0,a)$ et de rayon a et dont l'équation cartésienne est $X^2 + Y^2 - 2aY = 0$. Si le point $(0,0)$ est un point d'inflexion de (C), alors il n'existe pas de voisinage de $(0,0)$ ni de rayon a pour lesquels la courbe (C) soit à l'intérieur du cercle (C_a). En excluant ce cas, l'idée est justement d'obtenir le minimum des $a > 0$ pour lequel la courbe (C) soit – dans un voisinage de $(0,0)$ – à l'intérieur du cercle (C_a) : si nous notons $(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{y}(s))$ les coordonnées cartésiennes du point de (C) de paramètre s, alors cela est équivalent à minimiser a de sorte que

$$\Psi(s) := \boldsymbol{x}(s)^2 + \boldsymbol{y}(s)^2 - 2a\boldsymbol{y}(s) \geq 0$$

13. Nous notons simplement $\kappa(s)$ au lieu de la notation complète $\kappa(\boldsymbol{r}(s))$, car le paramétrage de $t \mapsto \boldsymbol{r}(s)$ est curviligne : la notation complète (que nous utiliserons par la suite) est plus rigoureuse, car la courbure ponctuelle est un propriété de la courbe qui ne dépend pas du paramétrage choisi.

14. Le cas $\kappa(0) < 0$ est symétrique, le cas d'une courbure nulle en $\boldsymbol{r}(0)$ nécessitant une analyse spéciale (cela arrive par exemple lorsque $\boldsymbol{r}(0)$ est un point d'inflexion de (C), ou encore lorsque $\boldsymbol{r}$ est *approximativement* plat en 0).

pour $|s|$ suffisamment petit. Ici $(\boldsymbol{\tau}(0);\boldsymbol{n}(0)) = (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ et il suit de (43), (44) et (46) que :

$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{x}(0),\dot{\boldsymbol{x}}(0),\ddot{\boldsymbol{x}}(0),\dddot{\boldsymbol{x}}(0)\big) &= \big(0,1,0,-\kappa(0)^2\big)\\ \big(\boldsymbol{y}(0),\dot{\boldsymbol{y}}(0),\ddot{\boldsymbol{y}}(0),\dddot{\boldsymbol{y}}(0)\big) &= \big(0,0,\kappa(0),\dot{\kappa}(0)\big)\end{aligned}$$

En écrivant les développements limités de $\boldsymbol{x}(s)$ et $\boldsymbol{y}(s)$, nous obtenons

$$\Psi(s) = s^2 - 2a\left(\frac{s^2}{2}\kappa(0) + \frac{s^3}{6}\dot{\kappa}(0)\right) + \circ(s^3) = s^2\big(1 - a\kappa(0)\big) - a\frac{s^3}{3}\dot{\kappa}(0) + \circ(s^3)$$

et par suite, $\Psi(s)$ est positif pour $|s|$ suffisamment petit dès que a vérifie $1 \geq a\kappa(0)$: le maximum d'un tel a correspond bien au rayon de courbure de (C) en $\boldsymbol{r}(0)$.

Nous terminons ce paragraphe par le cas particulier de la courbure en un point $(t,\varphi(t))$ du graphe d'une fonction $t \mapsto \varphi(t)$ définie (et lisse) dans un voisinage de 0 (cela nous permettra une interprétation simple de la courbure de Gauss d'une surface en un point). L'abscisse curviligne s étant définie à partir du point $(0,\varphi(0))$ en posant

$$s(t) = \int_0^t (1+\dot{\varphi}^2(x))^{1/2}dx$$

nous pouvons vérifier que la base de Serret-Frenet, vérifie

$$\boldsymbol{\tau}(s(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+\dot{\varphi}^2(t)}}\mathbf{e}_1 + \frac{\dot{\varphi}(t)}{\sqrt{1+\dot{\varphi}^2(t)}}\mathbf{e}_2 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{n}(s(t)) = -\frac{\dot{\varphi}(t)}{\sqrt{1+\dot{\varphi}^2(t)}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{1+\dot{\varphi}^2(t)}}\mathbf{e}_2$$

Alors, d'une part

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}(s(t)) = \frac{d\boldsymbol{\tau}\circ s}{dt} &= -\frac{\dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t)}{(1+\dot{\varphi}^2(t))^{3/2}}\mathbf{e}_1 + \left(\frac{\ddot{\varphi}(t)}{(1+\dot{\varphi}^2(t))^{1/2}} - \frac{\dot{\varphi}(t)^2\ddot{\varphi}(t)}{(1+\dot{\varphi}^2(t))^{3/2}}\right)\mathbf{e}_2\\ &= \frac{\ddot{\varphi}(t)}{(1+\dot{\varphi}^2(t))}\boldsymbol{n}(s(t))\end{aligned}$$

et comme d'autre part $ds = (1+\dot{\varphi}^2(t))^{1/2}dt$ nous pouvons conclure que

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds}(s(t)) = \frac{dt}{ds}\left(\frac{\ddot{\varphi}(t)}{(1+\dot{\varphi}^2(t))}\right)\boldsymbol{n}(s(t)) = \frac{\ddot{\varphi}(t)}{(1+\dot{\varphi}^2(t))^{3/2}}\boldsymbol{n}(s(t))$$

En d'autres termes, la courbure au point $(t,\varphi(t))$ vaut

$$\kappa(t,\varphi(t)) = \frac{\ddot{\varphi}(t)}{(1+\dot{\varphi}^2(t))^{3/2}}.$$

Remarque 9.1. *Si $\dot{\varphi}(0) = 0$ alors nous avons simplement $\kappa(0,\varphi(0)) = \ddot{\varphi}(0)$.*

9.2. **Courbure de Gauss.** Soit $(x^1,x^2) \mapsto f(x^1,x^2)$ une application numérique définie sur un ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}^2$ t.q. $f(0,0) = 0$. Nous considérons que $X = (0,0,0)$ est un point de la surface $\Sigma := \{(x^1,x^2,f(x^1,x^2))\ ;\ (x^1,x^2) \in \mathcal{V}\}$ et, pour simplifier, nous supposons que $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$. L'approximation différentielle de f en $(0,0)$ donne $f(x^1,x^2) \approx x^i x^j H_{ij}$ où H de composantes $H_{ij} := \partial_{ij} f(0,0)$ est appelée la matrice hessienne de f en $(0,0)$. Il n'est pas évident que la courbure de Gauss de Σ en X, définie en posant[15]

$$K := \det(H) \tag{47}$$

15. La demi trace $\mathrm{tr}(H)/2$ est appelée la courbure moyenne de Σ en X : cette notion a été introduite par Sophie Germain à propos des vibrations d'une membrane (cette notion intervient dans l'étude des surfaces minimales).

soit une quantité covariante (voir dans [Spi99] la présentation du Théorème Egregium de Gauss). Commençons avec le changement de variables $(x^1, x^2) = A_\theta(u^1, u^2)$, où A_θ est la rotation d'angle[16] θ (pour l'instant arbitraire) et soit $f_\theta : A_\theta^*(\mathcal{V}) \to \mathbb{R}$ t.q. $f_\theta(u^1, u^2) := f \circ A_\theta(u^1, u^2)$ (de sorte que $f_0 = f$). Alors le hessien H_θ de f_θ en $(0,0)$ s'obtient en écrivant

$$\frac{\partial^2 f_\theta}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial x^\mu}{\partial u^i}\frac{\partial x^\nu}{\partial u^j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \circ A_\theta\right) \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} \partial x^1/\partial u^1 & \partial x^1/\partial u^2 \\ \partial x^2/\partial u^1 & \partial x^2/\partial u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Finalement en $(u^1, u^2) = (0,0)$ nous obtenons la relation matricielle $H_\theta = A_\theta^* H_0 A_\theta$. La matrice A_θ étant orthogonale, le déterminant $\det(H_\theta)$ ne dépend pas du paramètre θ et coïncide donc avec la courbure de Gauss $K = \det(H_0) = \det(H)$ définie en (47). En particulier, la matrice $H = H_0$ étant symétrique, elle possède une base orthonormée directe de vecteurs propres : si κ_{11} et κ_{22} sont les valeurs propres en question, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (déterminée modulo 2π) t.q.

$$H_\theta = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & 0 \\ 0 & \kappa_{22} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \kappa_{ii} = \frac{\partial^2 f_\theta}{\partial u^i u^j}(0,0)$$

Les valeurs propres κ_{11} et κ_{22} sont appelées les courbures principales de Σ en X : d'après la Remarque 9.1, elle coïncident respectivement avec les courbures en 0 des applications partielles $f_\theta(\cdot, 0)$ et $f_\theta(0, \cdot)$. Ainsi, la courbure gaussienne de Σ en X définie en (47) correspond au produit $\kappa_{11}\kappa_{22}$ des courbures principales de f_θ en $(0,0)$. Cette analyse préliminaire montre une covariance *restreinte* de la courbure de Gauss : cependant, elle nous permet d'introduire les systèmes de coordonnées locales dits réduits comme suit.

Nous allons généraliser notre présentation par une localisation : pour cela, considérons maintenant que Σ est une variété de dimension 2, plongée dans $\mathbb{R}^3$: l'heuristique précédente justifie – et nous admettrons – que pour tout $X \in \Sigma$, il existe un système de coordonnées locales $(\mathcal{U}, \boldsymbol{x})$ réduit en X, en ce sens que $X \in \mathcal{U}$ et pour tout $Y \in \mathcal{U}$

$$\boldsymbol{x}(Y) = (u^1, u^2) \iff Y = X + \Phi(u^1, u^2, f(u^1, u^2)) =: \boldsymbol{X}(u^1, u^2)$$

où Φ est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ et où l'application numérique $f : \boldsymbol{x}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ est telle que $f(0,0) = \partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$ et possède un hessien diagonale en $(0,0)$ avec

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^i}(0,0) = \kappa_{ii}$$

Il s'agit maintenant de voir comment la courbure de Gauss en X définie en posant

$$K(X) := \kappa_{11}\kappa_{22}$$

(dont la valeur dépend à priori du système de coordonnées réduit) peut-être interprétée comme une grandeur covariante sur Σ. Sans perte de généralités, nous pouvons d'abord revenir (localement en X) au cas considéré dans l'heuristique préliminaire, en prenant $X = (0,0,0)$, l'isométrie Φ étant supposée réduite à l'identité de $\mathbb{R}^3$. Ici, le point clef est de munir Σ de sa structure riemannienne naturelle – soit g – induite par la structure euclidienne de l'espace ambiant (i.e. $\mathbb{R}^3$). Cette structure riemannienne est caractérisée par le fait que $g(V, W) = \langle V | W \rangle$ pour tout couple (V, W) de champs de vecteurs sur Σ. Afin d'identifier la métrique, nous commençons par remarquer que les vecteurs ∂_1 et ∂_2

16. A_θ est identifiée à sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ d'où les identification $A_\theta^{-1} = A_\theta^*$.

de la base holonôme de $\boldsymbol{x}$, s'expriment simplement dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à l'aide des dérivées partielles usuelles de $f(u^1,u^2)$ en coordonnées cartésiennes. En effet,

$$\partial_1 = \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u^1}\right)\mathbf{e}_3 = \quad \text{et} \quad \partial_2 = \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u^2}\right)\mathbf{e}_3$$

de sorte que pour $V = V^1\partial_1 + V^2\partial_2$ et $W = W^1\partial_1 + W^2\partial_2$ il vient $\langle V|W\rangle = V^iW^jg_{ij}$ avec

$$g_{ii} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)^2 \quad \text{et} \quad g_{12} = g_{21} = \frac{\partial f}{\partial u^1}\frac{\partial f}{\partial u^2} \tag{48}$$

et (c.f. [Oli15a, Appendice 17]) les expressions des symboles de Christoffel sont :

$$\mathsf{C}^k{}_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial u^j}\frac{\partial f}{\partial u^k}\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u^2}\right)^2\right)^{-1}$$

Lemme 9.2. *Soit (Σ, g) une variété riemannienne de dimension 2 plongée isométriquement dans $\mathbb{R}^3$; alors dans un système de coordonnées réduit en X nous avons*

$$(i)\ :\ g_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu} \qquad (ii)\ :\ \partial_k|_X(g_{\mu\nu}) = 0 \qquad (iii)\ :\ \mathsf{C}^k{}_{\mu\nu}(X) = 0$$

Proposition 9.3. *Soit (Σ, g) une variété riemannienne de dimension 2 plongée isométriquement dans $\mathbb{R}^3$ et munie de la connexion de Levi-Civita ; alors, dans un système de coordonnées réduit en X, la courbure de Gauss est reliée au tenseur de Riemann, en ce sens que*

$$K(X) = -R_{1212}(X)$$

Preuve. Soit $(\mathcal{U}, \boldsymbol{x})$ un système de coordonnées locales, supposés réduit en un point X de Σ : sans perte de généralités, nous supposons que $X = (0,0,0) \in \mathcal{U}$ avec

$$\boldsymbol{x}(Y) = (u^1,u^2) \iff Y = (u^1,u^2,f(u^1,u^2)) =: \boldsymbol{X}(u^1,u^2)$$

où l'application numérique $f : \boldsymbol{x}(\mathcal{U}) \to \mathbb{R}$ est telle que $f(0,0) = \partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$ et possède un hessien diagonal en $(0,0)$ avec

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i\partial u^i}(0,0) = \kappa_{ii}(X)$$

de sorte que la courbure de Gauss en X vaut $K = \kappa_{11}\kappa_{22}$. D'autre part, en combinant les composantes du tenseur de Riemann covariant en (21) aux identités du Lemma 9.2 (spécifiques aux coordonnées locales $\boldsymbol{x}$ supposées réduites en X), nous obtenons :

$$R_{1212}(X) = \frac{1}{2}\Big(\partial_{11}|_X(g_{22}) + \partial_{22}|_X(g_{11})\Big) - \partial_{12}|_X(g_{12}) \tag{49}$$

Pour simplifier, notons $G_{ij} := g_{ij} \circ \boldsymbol{X}$; alors, avec (48), il vient :

$$\frac{\partial^2 G_{22}}{\partial u^1\partial u^1} = \frac{\partial^2}{\partial u^1\partial u^1}\left(\frac{\partial f}{\partial u^2}\right)^2 = 2\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\partial f}{\partial u^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^1\partial u^2}\right) = 2\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^1\partial u^2}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u^2}\frac{\partial^3 f}{\partial u^1\partial u^1\partial u^2}\right)$$

et de même

$$\frac{\partial^2 G_{11}}{\partial u^2\partial u^2} = 2\left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2\partial u^1}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial u^1}\frac{\partial^3 f}{\partial u^2\partial u^2\partial u^1}\right)$$

Enfin

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} &= \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2}\left(\frac{\partial f}{\partial u^1}\frac{\partial f}{\partial u^2}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2 \partial u^1}\frac{\partial f}{\partial u^2} + \frac{\partial f}{\partial u^1}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2 \partial u^2}\right)\\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial u^1 \partial u^2 \partial u^1}\frac{\partial f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2 \partial u^1}\frac{\partial^2 f}{\partial u^1 \partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^1 \partial u^1}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2 \partial u^2} + \frac{\partial f}{\partial u^1}\frac{\partial^3 f}{\partial u^1 \partial u^2 \partial u^2}\end{aligned}$$

Utilisant de nouveau les propriétés des coordonnées réduites en X, il vient avec (49)

$$R_{1212}(X) = \partial_{12}|_X(g_{12}) = -\frac{\partial^2 f}{\partial u^1 \partial u^1}(0,0)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2 \partial u^2}(0,0) = -\kappa_{11}(X)\kappa_{22}(X) = -K(X)$$

□

Les propriétés de symétrie du tenseur de Riemann covariant $\mathcal{R}$ définie sur Σ (de dimension 2) assure que pour tout $X \in \Sigma$, la forme quadilinéaire $\mathcal{R}|_X$ appartient à l'espace vectoriel $\mathcal{S}_B(T_X\Sigma)$ (c.f. § 2). Or nous savons (c.f. Remarque 2.2) que $\mathcal{S}_B(T_X\Sigma)$ est de dimension 1 (car $T_X\Sigma$ est de dimension 2). Nous pouvons même dire un peu plus en définissant sur Σ le tenseur $(U,V) \mapsto \Lambda(U,V)$ tel que $\Lambda|_X(U,V)$ soit le déterminant du couple de vecteurs $(U|_X, V|_X)$, alors il existe un champ scalaire $X \mapsto \kappa(X)$ t.q.

$$\mathcal{R} = -\kappa\Lambda \otimes \Lambda$$

Maintenant, nous considérons que $\boldsymbol{x}$ est un système de coordonnées réduit en un point X donné : alors, par définition des coordonnées réduites (c.f. Lemme 9.2), nous savons que $(\partial_1|_X, \partial_2|_X)$ est une base orthonormée de $T_X\Sigma$ et par suite :

$$R_{1212}(X) = \mathcal{R}|_X(\partial_1|_X, \partial_2|_X, \partial_1|_X, \partial_2|_X) = -\kappa(X)\Lambda(\partial_1|_X, \partial_2|_X)\Lambda(\partial_1|_X, \partial_2|_X) = -\kappa(X)$$

Il suit de la Proposition 9.3 que $\kappa(X)$ coïncide avec la courbure gaussienne de Σ en X, i.e. $\kappa(X) = K(X)$. Nous venons de démontrer une forme du Théorème Egregium :

Théorème 9.4 (Gauss)**.** *Soit (Σ, g) une variété riemannienne de dimension 2 plongée isométriquement dans $\mathbb{R}^3$ et munie de la connexion de Levi-Civita ; alors, la courbure de Gauss $X \mapsto K(X)$ définie en (47) est le champ scalaire $X \mapsto \kappa(X)$ tel que*

$$\mathcal{R} = -K\Lambda \otimes \Lambda \tag{50}$$

10. Notes

Riemann généralise la notion de courbure introduite par Gauss dans son mémoire d'habilitation de 1854 [Rie68] (et publié à titre posthume en 1868). On trouve aussi l'expression des *composantes du tenseur de courbure* dans un article de 1861 en latin [17] [Rie92] et consacré à la conduction de la chaleur dans un corps homogène (une traduction commentée se trouve dans [Spi99] ; voir aussi [FK90]). Dans ces travaux, Riemann produit une réflexion d'avant-garde dans un style qui rendra son travail obscur pour beaucoup de géomètres de son temps. Riemann n'aura pas le temps de développer ses idées : il meurt en 1866 à l'age de 39 ans. Il est assez éclairant d'écouter Bishop & Goldberg à ce propos : « *Le travail de Riemann en 1854, était exprimé dans une forme si obscure, que Beltrami en 1869 et Lipschitz en 1872 n'ont utilisé le langage géométrique qu'avec une grande précaution.*

17. Soumis – sans succès – pour un prix de l'Académie des Sciences de Paris.

En fait, les développements étaient si lents que la notion de parallélisme due à Levi-Civita n'est apparue qu'en 1917. » Une mention spéciale doit être faite pour le travail de Spivak [Spi99] où grâce à une analyse détaillée des articles originaux de Gauss et Riemann, l'auteur parvient à faire ressortir les idées originales des deux grands mathématiciens.

Dans [Oli15a] nous couvrons grosso-modo le premier cycle de développement des idées (géométriques) de Rienmann. Cela commence en 1869 (tout juste un an après la publication posthume du mémoire de 1854) avec le papier de Christoffel [Chr69], où est introduit la notion de connexion. Notons aussi comme point de référence le papier de Ricci (1888) [Ric88] sur la covariance et la contravariance, ainsi que le papier de synthèse [RTLC00] écrit avec Levi-Civita et qui est considérée comme l'acte fondateur du calcul tensoriel (c.f. [Bou92]). Comme évoqué par Bishop & Goldberg, l'article 1917 de Levi-Civita [LC17] marque la fin d'un premier cycle de développement des idées de Riemann. Ici nous avons choisi la présentation du tenseur de courbure par l'utilisation systématique de la notion de connexion et où la connexion de Levi-Civita est donnée par le Théorème d'unicité de Koszul (c.f. [Kos50]). Ces résultats/méthodes datent des années 50, soit à peu près un siècle après les travaux Riemann : ils présentent l'avantage d'une redoutable efficacité permettant d'accéder directement aux bases de la théorie. L'inconvénient de cette approche est de sacrifier l'intuition géométrique : pour compléter cette dernière lacune, nous nous référons à l'ouvrage assez extraordinaire de Roger Penrose [Pen04] (Roger Penrose est un des spécialistes incontestés de la Relativité Générale).

L'entrée en scène d'Einstein dans ce concert de mathématiciens tient presque du romanesque, comme en témoigne ce petit mot qu'il écrit à Sommerfeld (1912) [18] : « *Je travaille maintenant exclusivement sur la gravitation et je pense que je peux surmonter toutes les difficultés avec l'aide d'un de mes amis mathématicien. Mais une chose est certaine : de toute ma vie je n'ai presque jamais travaillé aussi durement et je suis désormais pénétré d'un grand respect pour les mathématiques que j'avais jusqu'alors, dans ma simplicité d'esprit, considéré la partie la plus subtile comme un luxe. Comparé à ce problème, la théorie originale de la relativité est un jeu d'enfant.* ». L'ami dont parle Einstein est Marcel Grossmann et les mathématiques en question sont la géométrie de Gauss et Riemann et le calcul tensoriel de Ricci et Levi-Civita. Leur collaboration aboutira à un article en deux parties [EG13] (la partie physique due à Einstein et la partie mathématique due à Grossmann) qui marque une étape importante vers la forme définitive de la Relativité Générale exposée dans [Ein16].

Nous laissons le dernier mot à Jacques Hadamard sur l'importance du travail d'Einstein sur la gravitation dans le développement de la géométrie moderne [19] : « *À mon avis il y avait une crise en géométrie infinitésimale et l'avènement de la relativité venait de la surmonter. Ceci était le début d'un éclairage inattendu sur les précédents travaux en géométrie montrant l'importance du calcul différentiel absolue de Ricci et de Levi-Civita, ce calcul étant resté presque sans éveiller d'intérêt depuis sa création.* »

Références

[Bou92] J.-P. Bourguignon. Transport parallèle et connexions en géométrie et en physique, in "1830-1930 : a century of geometry". *Springer-Verlag, Lect. Notes in Physics*, 402 :150–164, 1992.

18. Citation tirée de [Eis02].
19. Citation tirée de [VM05].

[Car13] S. Carroll. *Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity*. Pearson New International Edition (second edition of the 2003 Addison-Wesley edition), 2013.

[Chr69] E.B. Christoffel. Üeber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. *J. reine angew. Math.*, 70 :46–70, 1869.

[EG13] A. Einstein and M. Grossmann. Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und eine Theorie der Gravitation. I. Physikalischer Teil von A. Einstein II. Mathematischer Teil von M. Grossmann (Outline of a Generalized Theory of Relativity and of a Theory of Gravitation. I. Physical Part by A. Einstein II. Mathematical Part by M. Grossmann. *Z. Math. & Phys.*, 62 :225–244, 245–261, 1913.

[Ein16] A. Einstein. Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie (The Foundation of the General Theory of Relativity). *Annalen der Physik*, 49(IV) :769–822, 1916.

[Eis02] J. Eisensteadt. *Einstein et la relativité générale*. CNRS Édition - Paris, 2002.

[FK90] R. Farwell and C. Knee. The Missing Link : Riemann's "Commentatio," Differential Geometry and Tensor Analysis. *Hist. Math.*, 17 :223–255, 1990.

[Kos50] J. L. Koszul. Homologie et cohomologie des algèbres de Lie. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 78 :65–127, 1950.

[LC17] T. Levi-Civita. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana. *Rend. Circ. Mat. Palermo (1884-1940)*, 42 :173–204, 1917.

[Oli15a] E. Olivier. 100 ans de Relativité Générale I/III : covariance. *Bull. Inf. App. & App.*, 100 :23–63, 2015.

[Oli15b] E. Olivier. 100 ans de Relativité Générale III/III : déflexion de la lumière. *Bull. Inf. App. & App.*, 102 :139–167, 2015.

[Pen04] R. Penrose. *The Road to Reality : A Complete Guide to the Laws of the Universe*. Science : Astrophysics. A.A. Knopf, 2004.

[Ric88] G. Ricci. Delle derivazioni covarianti e contravarianti e del loro uso nella analisi applicata. *Stud. ed. Univ. Padova, Padova*, 3, 12 :23 p., 1888.

[Rie68] B. Riemann. *Üeber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. (Habilitationsschrift – 1854)*, volume XIII. Abhandl. Kgl. Gesell. Wiss. Göttingen, 1868.

[Rie92] B. Riemann. Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Illma Academia Parisiensi propositae (1861). *Riemann's Gesamm. Math. Werke*, XXII :391–423, 1892.

[RTLC00] G. Ricci and Tullio T. Levi-Civita. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Mathematische Annalen (Springer)*, 54 :125–201, 1900.

[Spi99] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Number vol. 2 in A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Publish or Perish, inc. (Sec. Ed.), 1999.

[VM05] T. Shaposhnikova V. Maz'ya. *Jacques Hadamard : Un mathématicien universel (traduction de l'anglais par G. Tronel)*. EDP Science (Ed. originale de l'Am. Math. Soc. - 1998), 2005.

[Wal10] R.M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 2010.

[Wei72] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology – Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley, 1972.