

100 ans de Relativité Générale (III/III) : déflexion de la lumière

Eric OLIVIER ^{1 2}

Résumé. – « Il pourrait n'y avoir aucune déflexion, ce qui signifierait que la lumière n'est aucunement sujette à la gravitation. Ou une *demi-déflexion*, ce qui signifierait que la lumière est sujette à la gravitation, ainsi que Newton l'a suggéré et qu'elle suit la simple loi newtonienne. Ou, il pourrait y avoir une pleine déflexion, confirmant la loi d'Einstein au lieu de celle de Newton. » (Eddington, à propos des mesures de déflexion des rayons lumineux rasant la surface solaire – cité par Chandrasekhar.)

1. Introduction

L'espace est rapporté au repère cartésien $(S; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$; le *principe d'inertie de Newton* affirme que le mouvement d'une particule P , repérée (à l'instant t) par le *rayon vecteur* $\mathbf{r}(t)$ (issu de S), est *causé* par une force proportionnelle à l'accélération $\ddot{\mathbf{r}}(t) = d^2\mathbf{r}/dt^2$ de P : par définition, le coefficient de proportionnalité est appelé la *masse inerte* de P . Nous nous intéressons au cas où la particule P est prise dans le champ de gravitation d'une *masse grave* M concentrée en S . Le *principe d'équivalence* affirmant l'égalité de la *masse inerte* et de la *masse grave* nous permet d'écrire l'équation différentielle vérifiée par $t \mapsto \mathbf{r}(t)$, soit :

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left(\frac{GM}{\rho^2} \right) \frac{\mathbf{r}}{\rho}$$

Ici, G désigne la constante de la gravitation et ρ est la norme euclidienne du rayon vecteur $\mathbf{r}$. Nous insistons sur un point essentiel, conséquence directe du principe d'équivalence : la masse (grave/inerte) de P n'affecte pas la forme de son mouvement dans le champ de gravitation de S . Newton a montré que les mouvements possibles de P dans le champ de gravitation de la masse M en S sont de deux natures : soit l'orbite de P est bornée et P décrit une ellipse – dont S est l'un des foyers – soit l'orbite de P est non bornée et P décrit une parabole ou une hyperbole – S étant toujours un foyer de la conique. Ainsi, la trajectoire parabolique réalise la transition entre le mouvement borné et le mouvement non borné. Pour voir cela, considérons une configuration un peu particulière. Supposons qu'à l'instant $t = 0$ la particule P est dans le plan $(S; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, avec $\mathbf{r}(0) = r_* \mathbf{e}_1$ et $\dot{\mathbf{r}}(0) = v \mathbf{e}_2$. Alors (nous verrons que) l'orbite de P reste dans le plan $(S; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, la *vitesse de libération* de P étant alors

$$(1) \quad c_* := \sqrt{\frac{2GM}{r_*}}$$

Nous nous intéressons uniquement au cas où le point S_* où se trouve P à l'instant $t = 0$ est le *périastre*, c'est-à-dire le point de l'orbite de P qui est le plus proche du foyer S de la trajectoire conique : on peut montrer que cette situation n'a lieu que pour $v \geq c_*/\sqrt{2}$: pour

1. GDAC-I2M UMR 7373 CNRS Université d'Aix-Marseille
2. eric.olivier@univ-amu.fr

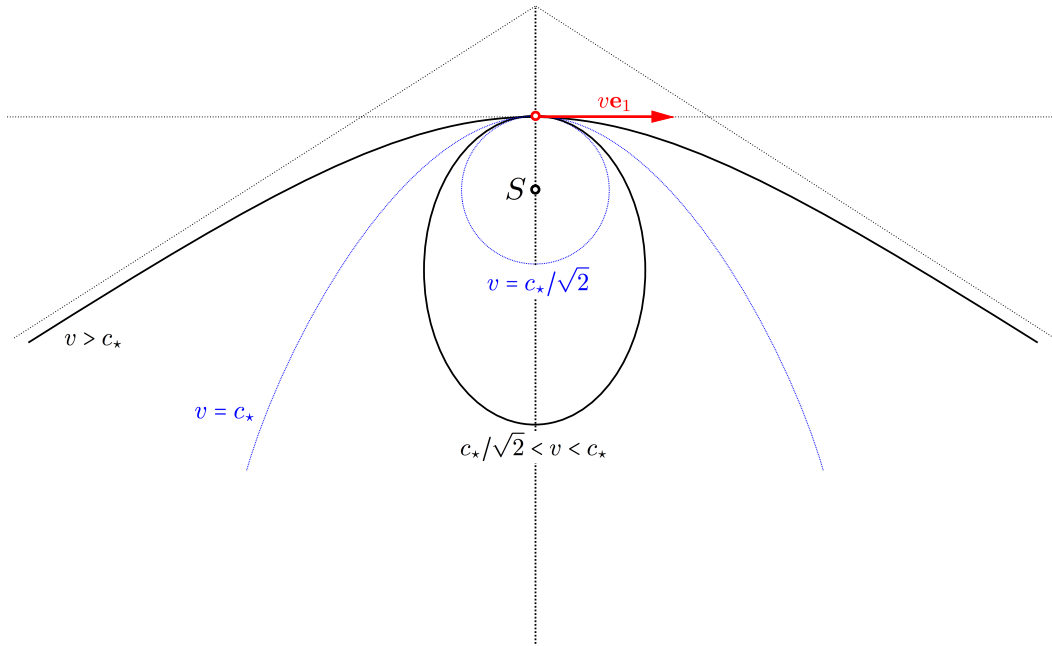


FIGURE 1. Famille des orbites coniques dans le champ de gravitation d'une masse M en fonction de la vitesse v au périastre de l'orbite et de la vitesse de libération $c_* := \sqrt{2GM/r_*}$ (où r_* est périastre); lorsque $v < c_*/\sqrt{2}$ le point initial n'est plus le périastre mais l'apoastre de l'orbite (nécessairement elliptique).

$v = c_*/\sqrt{2}$ l'orbite de P est un cercle et pour $0 \leq v < c_*/\sqrt{2}$, le point S_* devient l'apoastre³, i.e. le point de l'orbite de P qui est le plus éloigné du foyer S . Lorsque $c_*/\sqrt{2} \leq v < c_*$ (resp. $v > c_*$), P décrit une ellipse (resp. une hyperbole) : pour $v = c_*$ l'orbite est exactement une parabole (c.f. Fig 1). Supposons maintenant que la particule P vienne de l'infini avec la vitesse de la lumière – soit $c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s – et que son orbite soit hyperbolique avec $\dot{r}(-\infty) = c\mathbf{u}$ où $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire donné : alors la mesure β (en radians) de l'angle orienté $(\mathbf{u}, \dot{r}(+\infty))$ – l'angle de déflexion – dépend du paramètre d'impact b (i.e. la distance de S à l'asymptote de la trajectoire de P en $t = -\infty$), mais ne dépend pas de la masse de la particule : nous verrons que

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{GM}{bc^2}$$

En 1907 Einstein remarque⁴ que cette formule implique formellement qu'un rayon de lumière – trajectoire d'un corpuscule lumineux sans masse et dont la vitesse c est celle de la lumière – doit être courbée par l'attraction gravitationnelle de la masse M en S : il serait alors possible de mesurer la déflexion d'un rayon lumineux rasant la surface

3. Lorsque le centre du champ gravitationnel S est le Soleil on parle de périhélie et d'aphélie.

4. À l'instar de John Michell (1724-1793) et Pierre-Simon de Laplace (1749-1827). L'histoire de la Relativité générale est exposée dans [Eis02]; on y trouve aussi en particulier beaucoup d'informations sur la déflexion des rayons lumineux (voir aussi [Bro11, Chap. 8 - § 8.9] pour la position de Newton et l'opinion à ce sujet de H. Weil).

solaire, afin de vérifier la valeur newtonienne théorique, soit

$$\beta \simeq \frac{2GM_{\odot}}{c^2 r_{\odot}} \simeq 0.87''$$

Ici $M_{\odot}$ et $r_{\odot}$ désignent respectivement la masse et le rayon solaire (ces quantités étant exprimées en unités du système international des mesures physiques). Cette remarque d'Einstein sur l'action de la gravitation sur la lumière, se situe au moment où il commence à réfléchir sur la Relativité Générale. Il est aussi étonnant de remarquer que plusieurs années plus tard, la Relativité Générale [Ein16] donnera un contexte rigoureux justifiant que le rayon lumineux (rasant le soleil) est bien courbé par la masse solaire $M_{\odot}$, mais que cette déflexion vaut *exactement* le double de la déflexion newtonienne, soit

$$\beta \simeq \frac{4GM_{\odot}}{c^2 r_{\odot}} \simeq 1.75''$$

Cette formule a été obtenue par Schwarzschild en 1916 [Sch16] comme conséquence d'une première résolution explicite des équations d'Einstein de la Relativité Générale. La première vérification expérimentale de cette déflexion a été réalisée par Eddington, lors de l'éclipse de soleil de 1919 observée en Amérique du sud. Mentionnons qu'un point clef du calcul de Schwarzschild est la détermination (dans la relativité générale) d'une constante appelé le **rayon de Schwarzschild** pour une masse M , soit

$$r_{\bullet} = \frac{2GM}{c^2}$$

Étrangement, la formule de la vitesse $c_{\star}$ de libération d'une masse M en (1) entraîne que le rayon $r_{\star}$ pour le quel $c_{\star}$ coïncide avec la lumière, correspond au rayon de Schwarzschild de la masse M : en effet $r_{\bullet}$ coïncide avec la solution en ρ de l'équation

$$\sqrt{\frac{2GM}{\rho}} = c$$

L'interprétation (heuristique) est frappante : si la masse M est concentrées à l'intérieur de la sphère de rayon $r_{\bullet}$, alors un *photon émis* par cet objet ne peut se *libérer* de l'attraction gravitationnelle : John Wheeler a baptisé une telle masse sphérique **un trou noir** (voir les repères historiques au § 10). Le but de cette troisième note sur les 100 ans de la Relativité Générale, est de donner un contexte rigoureux (et raisonnablement abordable) permettant de voir comment la Relativité Générale *explique* le doublement de la valeur de l'angle *newtonien* de déflexion du rayon lumineux rasant la surface solaire.

2. Première constante du mouvement newtonien : l'énergie

Soit (x, y, z) les coordonnées cartésiennes d'un point d'un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^3$ et soit $\Phi(x, y, z)$ la valeur en ce point d'une fonction numérique Φ . On dit que l'accélération $t \mapsto \ddot{\mathbf{r}}(t)$ de P **dérive du potentiel** Φ défini⁵ sur $\mathcal{U}$ lorsque $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ coïncide avec l'opposé du gradient $\text{grad}(\Phi)$ évalué en $\mathbf{r}(t)$. Le signe "-" affectant **le gradient du potentiel** Φ est une convention cohérente avec la définition de l'*énergie lagrangienne* (c.f. Proposition 2.1). Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire associé à la structure euclidienne canonique de $\mathbb{R}^3$; dans la suite,

5. Dans le cas du potentiel newtonien de la force de gravitation nous aurons $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3 \setminus \{S\}$.

nous noterons $v = \langle \dot{\mathbf{r}} | \dot{\mathbf{r}} \rangle^{1/2}$ la vitesse de P , où $\dot{\mathbf{r}} := d\mathbf{r}/dt$ est le vecteur vitesse. La proposition suivante constitue en fait la [description hamiltonienne](#) d'un système mécanique d'un corps soumis à une force dérivant d'un potentiel.

Proposition 2.1. *Si l'accélération de P dérive d'un potentiel Φ alors*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + \Phi(\mathbf{r}) \right) = 0$$

en d'autres termes l'énergie (massique) $E = v^2/2 + \Phi(\mathbf{r})$ est une constante du mouvement.

Preuve. Pour dériver le produit scalaire sur l'orbite de P , nous écrivons

$$\begin{aligned} v^2(t+h) &\simeq \left\langle \dot{\mathbf{r}}(t) + h\ddot{\mathbf{r}}(t) \middle| \dot{\mathbf{r}}(t) + h\ddot{\mathbf{r}}(t) \right\rangle \\ &\simeq \left\langle \dot{\mathbf{r}}(t) \middle| \dot{\mathbf{r}}(t) \right\rangle + 2h \left\langle \dot{\mathbf{r}}(t) \middle| \ddot{\mathbf{r}}(t) \right\rangle \simeq v(t)^2 - 2h \left\langle \dot{\mathbf{r}}(t) \middle| \text{grad} \cdot \Phi(\mathbf{r}(t)) \right\rangle \end{aligned}$$

par suite

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = - \left\langle \dot{\mathbf{r}}(t) \middle| \text{grad}|_{\mathbf{r}(t)}(\Phi) \right\rangle$$

Or, en notant $(r_1(t), r_2(t), r_3(t))$ les composantes cartésiennes de $\mathbf{r}(t)$, la formule de dérivée des fonctions composées donne :

$$\frac{d}{dt} \Phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\mathbf{r}(t)) \dot{r}_1(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(\mathbf{r}(t)) \dot{r}_2(t) + \frac{\partial \Phi}{\partial z}(\mathbf{r}(t)) \dot{r}_3(t) = \left\langle \dot{\mathbf{r}}(t) \middle| \text{grad}|_{\mathbf{r}(t)}(\Phi) \right\rangle$$

□

3. Deuxième constante du mouvement newtonien : le moment cinétique

Un point de $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3 \setminus \{S\}$ est aussi bien repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) que par ses coordonnées sphériques (ρ, θ, ϕ) , la correspondance étant donné par un difféomorphisme local ψ , avec

$$(x, y, z) = (\rho \sin(\phi) \cos(\theta), \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \rho \sin(\phi)) =: \psi(\rho, \theta, \phi)$$

En considérant maintenant que $(x, y, z) \mapsto \Phi(x, y, z)$ est un potentiel sur $\mathcal{U}$, nous définissons le potentiel sphérique⁶ Ψ associé à Φ en posant :

$$(2) \quad \Psi(\rho, \theta, \phi) := \Phi \circ \psi(\rho, \theta, \phi) = \Phi(\rho \sin(\phi) \cos(\theta), \rho \sin(\phi) \sin(\theta), \rho \sin(\phi))$$

De plus, si $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ désigne le repère sphérique mobile en $X = \psi(\rho, \theta, \phi)$, alors

$$(3) \quad \text{grad}|_X(\Phi) = \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho \sin(\theta)} \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

Une idée très générale (et formalisée dans le [Théorème de Noether](#)) est que toute symétrie d'un système mécanique induit une constante du mouvement. Sans entrer dans le détail de ce résultat (fondamental), nous allons en vérifier directement une conséquence. En

6. On peut tout aussi bien considérer qu'il n'y a qu'un seul potentiel – disons Φ – et que c'est le système des coordonnées qui change : ainsi on pourrait tout aussi bien écrire $\Phi(x, y, z)$ dans les coordonnées cartésiennes ou encore $\Phi(\rho, \theta, \phi)$ dans les coordonnées sphériques : cette dernière convention est beaucoup utilisée dans les textes de sciences physiques et donne lieu à pas mal d'ambiguïté d'écriture. Cette pratique trouve cependant une forme très rigoureuse en géométrie différentielle par la définition même de variété différentielle grâce à l'atlas des cartes locales.

plus de notre hypothèse – i.e. le champ d'accélération de P dérive d'un potentiel Φ – **supposons que Φ soit à symétrie sphérique** : cela signifie que *le potentiel sphérique* défini en (2) ne dépend ni de θ ni de ϕ en ce sens que $\partial\Psi/\partial\theta = \partial\Psi/\partial\phi = 0$. Nous déduisons de l'expression du gradient de Φ en coordonnées sphériques en (3) que

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\mathbf{e}_\rho$$

Nous retrouvons le fait (intuitivement évident) qu'à un potentiel à symétrie sphérique correspond un **champ d'accélération centrale**.

Proposition 3.1. *Si la particule P est soumise à un champ d'accélération dérivant d'un potentiel à symétrie sphérique, alors le moment cinétique (massique) $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ est constant sur l'orbite.*

Preuve. Le champ d'accélération dérivant d'un potentiel à symétrie centrale, nous savons que $\ddot{\mathbf{r}}$ est colinéaire à $\mathbf{r}$ et par suite⁷

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = 0$$

□

Dans la suite nous notons $\sigma_0 = \sigma_0\mathbf{e}_3$ (avec $\sigma_0 = |\sigma_0| > 0$) le moment cinétique de P : cela revient à convenir que l'orbite de P se déroule dans le plan $(S; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. En particulier, il est possible de décrire le mouvement de P par ses coordonnées polaires $(\rho(t), \theta(t))$ où $\rho(t)$ est la norme du vecteur position $\mathbf{r}(t)$ et où $\theta(t)$ désigne la mesure (en radians) de l'angle orienté $(\mathbf{e}_1, \mathbf{r}(t))$. Les composantes polaires du mouvement nous permettent d'exprimer la vitesse de P dans le repère mobile polaire, soit $(S; \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$: en effet

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\rho(\cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_2) = \dot{\rho}(\cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_2) + \rho\dot{\theta}(-\sin(\theta)\mathbf{e}_1 + \cos(\theta)\mathbf{e}_2)$$

ce qui donne finalement

$$(4) \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$$

Par suite nous obtenons

$$\sigma_0\mathbf{e}_3 = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times (\dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta) = \rho\dot{\theta}(\mathbf{r} \times \mathbf{e}_\theta) = \rho^2\dot{\theta}(\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\theta) = \rho^2\dot{\theta}\mathbf{e}_3$$

Théorème 3.2 (Loi des aires de Kepler). *Si la particule P est soumise à un champ d'accélération dérivant d'un potentiel à symétrie sphérique, alors la vitesse aréolaire est une constante du mouvement égale à la norme σ_0 du moment cinétique : en d'autres termes*

$$(5) \quad \sigma_0 = \rho^2\dot{\theta}$$

7. Nous utilisons les propriétés algébriques du produit vectoriel (cross product) avec les approximations différentielles pour écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t+h) \times \dot{\mathbf{r}}(t+h) &= \left(\mathbf{r}(t) + h\dot{\mathbf{r}}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{\mathbf{r}}(t) + \dots \right) \times \left(\dot{\mathbf{r}}(t) + h\ddot{\mathbf{r}}(t) + \frac{h^2}{2}\dddot{\mathbf{r}}(t) + \dots \right) \\ &= \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + h(\dot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{r}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)) \\ &\quad + \frac{h^2}{2}(2\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{r}(t) \times \dddot{\mathbf{r}}(t) + \ddot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)) + \dots \\ &= \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + h\mathbf{r}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) + \frac{h^2}{2}(\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{r}(t) \times \dddot{\mathbf{r}}(t)) + \dots \end{aligned}$$

4. Troisième constante du mouvement : le vecteur d'excentricité

Nous considérons maintenant que notre particule P est plongée dans le [champ de gravitation newtonien](#) de la masse M concentrée en S : la particule est donc soumise à un champ de force dérivant du potentiel $(\rho, \theta, \phi) \mapsto \Psi(\rho) = -GM/\rho$. Dans ce cas particulier, il existe un invariant supplémentaire appelé [vecteur d'excentricité](#) (ou encore [vecteur de Runge-Lenz](#)), qui spécifie la forme conique des trajectoires de P (ceci peut aussi être vu comme conséquence du Théorème de Noether).

Proposition 4.1. *Si la particule P d'orbite $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ de vitesse $t \mapsto \dot{\mathbf{r}}(t)$ et de moment cinétique $\boldsymbol{\sigma}_0 = \sigma_0 \mathbf{e}_3$ est plongée dans le [champ de gravitation newtonien](#) d'une masse M centrée en S , alors*

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\sigma}_0}{GM} \right) = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta = \frac{d}{dt} \mathbf{e}_\rho$$

et le vecteur d'excentricité⁸ est par définition :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\sigma}_0}{GM} - \mathbf{e}_\rho$$

Preuve. Rappelons que le moment cinétique (massique) $\boldsymbol{\sigma}_0 = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \sigma_0 \mathbf{e}_3$ est un vecteur constant de direction orthogonale au plan de l'orbite de P . Par dérivation directe

$$\frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\sigma}_0) = - \left(\frac{GM}{\rho^2} \right) \mathbf{e}_\rho \times (\rho^2 \dot{\theta}) \mathbf{e}_3 = GM \dot{\theta} (\mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_3) = GM \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta$$

□

Comme $\langle \boldsymbol{\sigma}_0 | \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle = 0$, le vecteur $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ appartient au plan vectoriel engendré par $\mathbf{e}_\rho$ et $\mathbf{e}_\theta$. On définit alors ω comme la mesure de l'angle orienté $(\mathbf{e}_\rho, \boldsymbol{\varepsilon}_0)$ (noter que $\dot{\theta} = \dot{\omega}$).

Proposition 4.2. (i) : *L'orbite de P dans le champ de gravitation de S de masse M et de moment cinétique $\boldsymbol{\sigma}_0 = \sigma_0 \mathbf{e}_3$ (avec $\sigma_0 = |\boldsymbol{\sigma}_0| > 0$) est une conique dont un foyer est S et d'équation polaire*

$$(6) \quad \rho = \frac{p}{1 + \varepsilon_0 \cos(\omega)}$$

l'excentricité $\varepsilon_0 \geq 0$ est la norme du vecteur de Runge-Lenz $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ et la valeur du [paramètre](#) est

$$(7) \quad p = \frac{\sigma_0^2}{GM}$$

(ii) : *la valeur du [périastre](#) (i.e. le minimum de $\rho(t)$) vaut*

$$(8) \quad r_\star := \frac{p}{1 + \varepsilon_0}$$

Preuve. (i) : Par définition de la norme ε_0 du vecteur de Runge-Lenz $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ et par définition de l'angle polaire ω , il vient $\langle \mathbf{r} | \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle = \rho \varepsilon_0 \cos(\omega)$. Mais d'autre part⁹

$$\langle \mathbf{r} | \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle = \frac{1}{GM} \langle \mathbf{r} | \dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle - \rho = \frac{1}{GM} \langle \boldsymbol{\sigma}_0 | \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \rangle - \rho = \frac{1}{GM} \langle \boldsymbol{\sigma}_0 | \boldsymbol{\sigma}_0 \rangle - \rho = \frac{\sigma_0^2}{GM} - \rho$$

L'identification des deux expressions du produit scalaire $\langle \mathbf{r} | \boldsymbol{\varepsilon}_0 \rangle$ donne l'équation polaire (6) de l'orbite de P autour de S . C'est l'équation d'une conique d'excentricité ε_0 et de paramètre $p = \sigma_0^2/(GM)$, dont le centre de force S occupe l'un des foyers.

(ii) : Par (6) ρ atteint son minimum $r_\star$ lorsque $\omega = 0$ et donc $r_\star = p/(1 + \varepsilon_0)$.

8. Le vecteur de Runge-Lenz proprement dit est $\dot{\mathbf{r}} \times \boldsymbol{\sigma}_0 - GM \mathbf{e}_r$.

9. En utilisant une propriété classique du produit mixte $\det(u, v, w) = [u, v, w] = \langle u | v \times w \rangle$.

□

La valeur de l'excentricité ε_0 détermine la nature conique de l'orbite de P . Si $\varepsilon_0 > 1$ (resp. $0 \leq \varepsilon_0 < 1$), la trajectoire est une hyperbole (resp. une ellipse – l'orbite de P étant circulaire lorsque $\varepsilon_0 = 0$) ; si $\varepsilon_0 = 1$, la trajectoire est une parabole.

Proposition 4.3. *Soit r_* le périastre de l'orbite (conique) de P de paramètre p et d'excentricité $\varepsilon_0 = \langle \varepsilon_0 | \varepsilon_0 \rangle^{1/2}$ et $(\mathbf{e}_{r_*}, \mathbf{e}_{\theta_*} = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_{r_*})$ le repère polaire au(x) moment(s) du périastre : alors*

$$\begin{aligned} (i) : E &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_0}{r_*} \right)^2 - \frac{GM}{r_*} \quad (\text{énergie de la particule}) \\ (ii) : \varepsilon_0 &= \left(\frac{p}{r_*} - 1 \right) = \left(\frac{\sigma_0^2}{GM r_*} - 1 \right) = \left(1 + \frac{2r_* E}{GM} \right) = \sqrt{1 + 2E \left(\frac{\sigma_0}{GM} \right)^2} \\ (iii) : \varepsilon_0 &= \left(\frac{p}{r_*} - 1 \right) \mathbf{e}_{r_*} = \left(\frac{\sigma_0^2}{GM r_*} - 1 \right) \mathbf{e}_{r_*} = \left(1 + \frac{2r_* E}{GM} \right) \mathbf{e}_{r_*} \end{aligned}$$

Preuve. (i) : Rappelons d'abord que l'énergie $E = v^2/2 - MG/\rho$ est une constante du mouvement ; d'autre part, l'expression polaire de la vitesse en (4) et la loi des aires en (5) assurant que $\sigma_0 = \rho^2 \dot{\theta}$ entraînent que $v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 = \dot{\rho}^2 + \sigma_0^2/\rho^2$ et par suite,

$$E = \frac{1}{2} \left(\dot{\rho}^2 + \left(\frac{\sigma_0}{\rho} \right)^2 \right) - \frac{GM}{\rho}$$

Si t_* est un temps de passage au périhélie alors $\dot{\rho}(t_*) = 0$, d'où l'expression de E en (i).

(ii) : L'identité $r_* = p/(1 + \varepsilon_0)$ donnée en (8) entraîne que $\varepsilon_0 = p/r_* - 1$, la deuxième égalité étant obtenue avec la valeur de p donnée par (7). Pour la troisième expression nous l'expression de l'énergie de P en fonction de r_* et donnée en (i). Nous obtenons $\sigma_0^2 = 2r_*^2 E + 2GM r_*$; mais nous avons déjà démontré que $\varepsilon_0 = p/r_* - 1$ et en utilisant l'expression de p en (7), il vient :

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0^2}{GM r_*} - 1 = \frac{2r_* E}{GM} + 1$$

établissant ainsi l'avant dernière expression. Il est alors possible d'écrire

$$(\varepsilon_0 + 1)(\varepsilon_0 - 1) = \left(\frac{\sigma_0^2}{GM r_*} \right) \left(\frac{2r_* E}{GM} \right) = \frac{2\sigma_0^2 E}{G^2 M^2}$$

soit finalement

$$\varepsilon_0 = \sqrt{1 + \frac{2\sigma_0^2 E}{G^2 M^2}}$$

(iii) : Le moment cinétique σ_0 vaut $\sigma_0 \mathbf{e}_3$, où $\sigma_0 = \rho^2 \dot{\theta}$ est la vitesse aréolaire (loi des aires de Kepler). Rappelons que t_* est un instant t pour lequel $r_* = \rho(t)$, ce qui donne $\dot{\rho}(t_*) = 0$. Par suite $\dot{\mathbf{r}}(t_*) = r_* \dot{\theta}(t_*) \mathbf{e}_{\theta_*} = \sigma_0/r_* \mathbf{e}_{\theta_*}$. Le vecteur d'excentricité étant aussi une constante du mouvement

$$\varepsilon_0 = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t_*) \times \sigma_0}{GM} - \mathbf{e}_{r_*} = \frac{(\sigma_0/r_* \mathbf{e}_{\theta_*}) \times (\sigma_0 \mathbf{e}_3)}{GM} - \mathbf{e}_{r_*} = \left(\frac{\sigma_0^2}{GM r_*} - 1 \right) \mathbf{e}_{r_*}$$

(où nous avons utilisé le fait que $\mathbf{e}_{\theta_*} \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{r_*}$). Ceci démontre les deux premières expressions de ε_0 en fonction de la vitesse aréolaire σ_0 , la dernière expressions découlant de (i).

□

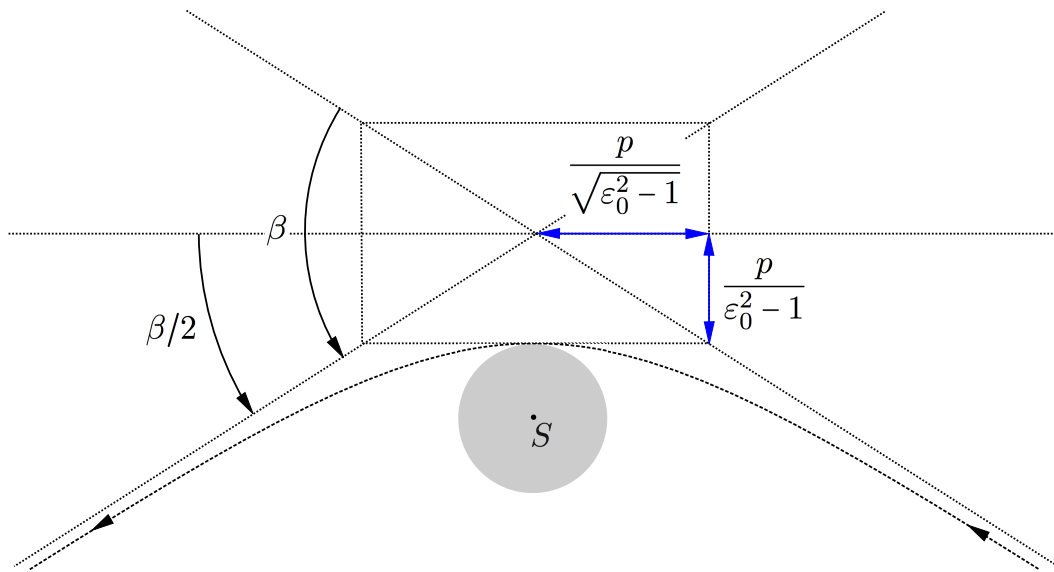


FIGURE 2. Angle de déflexion d'un rayon lumineux hyperbolique : si nous notons β cet angle de déflexion et si ε_0 (reps. p) est l'excentricité (reps. le paramètre) de l'orbite hyperbolique, alors

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{p}{\varepsilon_0^2 - 1} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_0^2 - 1}}{p} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0^2 - 1}}$$

5. Déflexion newtonienne I

À partir de maintenant c'est la masse solaire $M_\odot$ qui est supposée centrée en S . La masse de P n'intervenant pas dans l'analyse de son orbite conique $t \mapsto r(t)$, nous pouvons *formellement* considérer le cas où P est un *photon rasant la surface du soleil*. Plus précisément, la gravitation newtonienne nous autorise à nous placer dans la condition où l'orbite de P est hyperbolique avec un périastre r_* égal rayon solaire $r_\odot$, la *vitesse de P pour $t = \pm\infty$ étant égale à la vitesse de la lumière*¹⁰, i.e. $v(\pm\infty) = c$. Nous nous intéressons à la déflexion angulaire β de la trajectoire de P , i.e. la moitié de la mesure de l'angle orienté $(\dot{r}(-\infty); \dot{r}(+\infty))$: la trajectoire hyperbolique de P étant de paramètre p et d'excentricité ε_0 , nous savons (voir Fig. 2) que

$$(9) \quad \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{p}{\varepsilon_0^2 - 1} \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon_0^2 - 1}}{p} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0^2 - 1}}.$$

Proposition 5.1. Soit P une particule soumise au champ gravitationnel du soleil S et décrivant une trajectoire hyperbolique dont la vitesse à l'infini est la vitesse de la lumière c ; b désigne le paramètre d'impact, i.e. la distance de S à l'une quelconque des deux asymptotes à la trajectoire de P . Si $r_\bullet = 2GM_\odot/c^2$ désigne le rayon de Schwarzschild du soleil et $r_\odot$ le rayon solaire, alors la

10. Dans le cadre de la relativité galiléenne, cela entraîne que la vitesse de P à son passage au périastre est supérieure à la vitesse de la lumière.

déflexion angulaire ¹¹ β de la trajectoire de P rasant la surface solaire vérifie

$$(10) \quad 2 \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{2GM_{\odot}}{c^2 b} = \frac{r_{\bullet}}{b} = \frac{r_{\bullet}}{r_{\odot}} \frac{1}{\sqrt{1 + r_{\bullet}/r_{\odot}}}$$

Preuve. L'hypothèse $(v(+\infty), r(+\infty)) = (c, +\infty)$ donne les valeurs de l'énergie ainsi que de la vitesse aréolaire de P avec respectivement $2E = c^2$ et $\sigma_0 = cb$, où b est le paramètre d'impact. Grâce aux expressions de l'excentricité ε_0 (partie (ii) de la Proposition 4.3) et à l'expression du rayon de Schwarzschild $r_{\bullet}$ de la masse solaire $M_{\odot}$, il vient

$$(11) \quad \varepsilon_0^2 = 1 + \frac{\sigma_0^2(2E)}{(GM_{\odot})^2} = 1 + \left(\frac{bc^2}{GM_{\odot}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{2b}{r_{\bullet}}\right)^2$$

soit encore $\varepsilon_0^2 - 1 = (2b/r_{\bullet})^2$ et d'après (9) :

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0^2 - 1}} = \frac{1}{2} \frac{r_{\bullet}}{b}$$

La déflexion du rayon lumineux rasant la surface solaire étant très faible, il est raisonnable que le paramètre d'impact soit approximativement égal à la périhélie, soit $b \simeq r_{\star} = r_{\odot}$. Pour voir cela, nous partons de l'expression de l'énergie de P (c.f. (i)-Proposition 4.3) : comme $E = c^2/2$ et que $\sigma_0 = cb$, nous obtenons avec $r_{\star} = r_{\odot}$ et $r_{\bullet} = 2GM_{\odot}/c^2$

$$\frac{c^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{c^2 b^2}{r_{\odot}^2} - \frac{c^2}{2} \frac{r_{\bullet}}{r_{\odot}} = \frac{c^2}{2} \left(\frac{b^2}{r_{\odot}^2} - \frac{r_{\bullet}}{r_{\odot}} \right)$$

Après simplification, il vient $b^2 = r_{\odot}^2(1 + r_{\bullet}/r_{\odot})$ et finalement

$$2 \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{r_{\bullet}}{r_{\odot}} \frac{1}{\sqrt{1 + r_{\bullet}/r_{\odot}}}$$

□

5.1. Approximation de la déflexion. Le fait que le rayon de Schwarzschild du soleil soit très petit devant le rayon solaire (avec $r_{\bullet} \simeq 2.5$ km), justifie l'approximation $\beta \simeq r_{\bullet}/r_{\odot}$. Avec les constantes physiques (exprimées dans les unités internationales), soient

- la masse du soleil : $M_{\odot} = 1.9884 \times 10^{30}$ kg
- le rayon du soleil : $r_{\odot} = 6.95800 \times 10^8$ m
- la vitesse de la lumière : $c = 2.99792458 \times 10^8$ m/s
- la constant de gravitation de Newton : $G = 6.67384 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

nous obtenons

$$(12) \quad \frac{r_{\bullet}}{r_{\odot}} = \frac{2GM_{\odot}}{c^2 r_{\odot}} \simeq \frac{2 \times 6.67384 \times 10^{-11} \times 1.9884 \times 10^{30}}{(2.99792458 \times 10^8)^2 \times 6.95800 \times 10^8} \simeq 4,24 \times 10^{-6}$$

ce qui signifie que β vaut approximativement 4.24×10^{-6} rad. Pour la valeur en seconde d'arc, il faut se rappeler que $180 \times 3600''$ (secondes d'arc) valent π radians : ainsi $1''$ (1 seconde) d'arc vaut $4,85 \times 10^{-6}$ rad, et finalement

$$\beta \simeq (4,24/4,85)'' \simeq 0,87''$$

6. Déflexion newtonienne II

La particule P est soumise au champ gravitationnel de la masse solaire $M_\odot$ centrée en S ; son orbite – supposée hyperbolique de centre S – se déroule dans le plan $(S; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Par la symétrie du mouvement hyperbolique de P nous savons que $\mathbf{v}(-\infty) = \mathbf{v}(+\infty)$ et nous supposons que cette vitesse commune est la vitesse de la lumière notée c . Nous notons $\delta(\dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}}(-\infty) - \dot{\mathbf{r}}(+\infty)$ la variation du vecteur vitesse entre les instants $t = -\infty$ et $t = +\infty$ (par passage à la limite) : sans perte de généralité nous pouvons supposer que $\delta(\dot{\mathbf{r}})$ est positivement proportionnel à $\mathbf{e}_1$. Les mesures (en radians) des angles orientés $(-\dot{\mathbf{r}}(+\infty), \delta(\dot{\mathbf{r}}))$ et $(\delta(\dot{\mathbf{r}}), \dot{\mathbf{r}}(-\infty))$ sont égales (modulo 2π) à une valeur commune α : par suite, la position angulaire de P étant spécifiée par la mesure $\theta(t)$ de l'angle orienté $(\delta(\dot{\mathbf{r}}), \mathbf{r}(t)) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{r}(t))$, nous obtenons

$$\theta(+\infty) = -\theta(-\infty) = \pi - \alpha$$

Nous nous intéressons à la déflexion angulaire de la trajectoire de P , c'est-à-dire à la mesure β de l'angle orienté $(\dot{\mathbf{r}}(-\infty), \dot{\mathbf{r}}(+\infty))$ (voir Fig. 3). Nous allons donner une nouvelle démonstration de la Proposition 5.1 affirmant que la déflexion angulaire du rayon lumineux rasant la surface du soleil vérifie $2 \tan(\beta/2) = r_\bullet/b$ (d'où $\beta \simeq r_\bullet/b \simeq r_\bullet/r_\odot$).

Preuve de la Proposition 5.1 (bis). Nous allons déterminer $\tan(\beta/2)$ en calculant $\langle \delta(\dot{\mathbf{r}}) | \mathbf{e}_1 \rangle$ de deux manières différentes. D'abord, par définition de α nous avons d'une part $\delta(\dot{\mathbf{r}}) =$

11. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que $\beta > 0$.

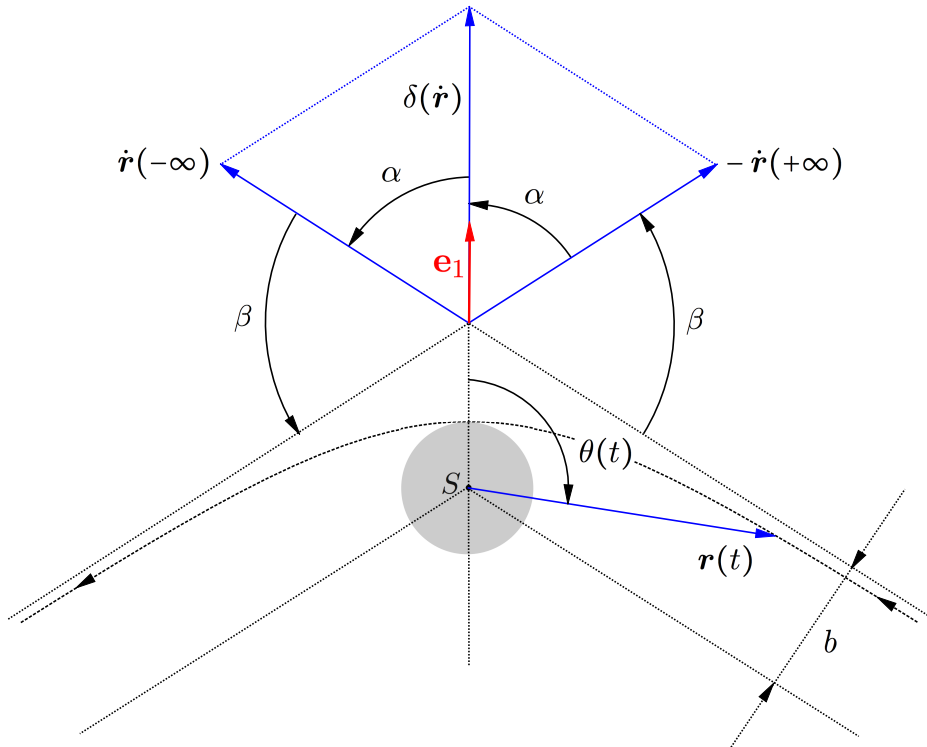


FIGURE 3. Déflexion newtonienne hyperbolique.

$2c \cos(\alpha) \mathbf{e}_1$; comme $\pi = 2\alpha + \beta$ il vient $\alpha = \pi/2 - \beta/2$ (voir Fig. 3). et donc

$$(13) \quad \langle \delta(\dot{\mathbf{r}}) | \mathbf{e}_1 \rangle = 2c \sin(\beta/2)$$

Mais d'autre part, en utilisant le fait $bc = \sigma_0 = \rho^2 \dot{\theta}$, il vient

$$\begin{aligned} \langle \delta(\dot{\mathbf{r}}) | \mathbf{e}_1 \rangle &= - \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{GM_\odot}{\rho^2(t)} \cdot \frac{\mathbf{r}(t)}{\rho(t)} dt \middle| \mathbf{e}_1 \right\rangle \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{GM_\odot}{\rho^2(t)} \cdot \cos(\theta(t)) dt \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{GM_\odot}{\rho^2(t) \dot{\theta}(t)} \dot{\theta}(t) \cos(\theta(t)) dt = - \frac{GM_\odot}{bc} \int_{\pi-\alpha}^{\alpha-\pi} \cos(\theta) d\theta = \frac{2GM_\odot}{cb} \sin(\alpha) \end{aligned}$$

soit encore en utilisant de nouveau le fait que $\alpha = \pi/2 - \beta/2$

$$(14) \quad \langle \delta(\dot{\mathbf{r}}) | \mathbf{e}_1 \rangle = \frac{2GM_\odot}{cb} \cos(\beta/2)$$

Par les identités en (13) et (14), nous pouvons alors conclure que :

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{GM_\odot}{c^2 b} = \frac{1}{2} \frac{r_\bullet}{b}$$

□

7. Déflexion newtonienne III

7.1. Heuristique de l'argument par la méthode Binet. Considérons de nouveau la déflexion de la trajectoire hyperbolique de notre particule P plongée dans le champ de gravitation de la masse solaire $M_\odot$ concentrée en S . Le calcul que nous allons maintenant développer suit les lignes de l'argument analogue dans le cadre de la Relativité Générale et aboutissant à la déflexion double de Schwarzschild – c.f. § 9 infra. Nous changeons légèrement les conditions de repérage du paragraphe précédent : l'orbite hyperbolique de P s'effectue dans le plan $(S; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, le vecteur vitesse de P en $t = -\infty$ étant $\dot{\mathbf{r}}(-\infty) = -c\mathbf{e}_1$. Ainsi $(\rho(t), \theta(t))$ sont les coordonnées polaires de P , où $\rho(t)$ est la norme de $\mathbf{r}(t)$ et où $\theta(t)$ est la mesure de l'angle orienté $(\mathbf{e}_1, \mathbf{r}(t))$. Dans le cas considéré ici (i.e. rayon lumineux rasant la surface solaire), la périhélie $r_\star$ coïncide avec le rayon $r_\odot$ du soleil. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $r_\odot = \rho(0)$ (de sorte que $\dot{\rho}(t) = 0$ ssi $t = 0$) et en posant $\theta_\star := \theta(0)$, nous obtenons $\theta(-\infty) = 0$ et $\theta(+\infty) = 2\theta_\star$ (c.f. Fig. 4). Avec ces conditions de repérage, l'angle de déflexion de P est $\beta := 2\theta_\star - \pi$, ce qui donne :

$$(15) \quad \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} = \theta_\star = \int_0^{\theta_\star} d\theta$$

7.2. Méthode de Binet. La particule P est ici soumise à un champ d'accélération dérivant du potentiel newtonien à symétrie sphérique, soit $(\rho, \theta, \phi) \mapsto \Psi(\rho) = -GM_\odot/\rho$. L'orbite hyperbolique $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ de P , qui s'effectue dans le plan $(S; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, est caractérisée par l'énergie (le hamiltonien) et la vitesse aréolaire, soient :

$$(16) \quad E = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_\odot}{\rho} \quad \text{et} \quad \sigma_0 = \rho^2 \frac{d\theta}{dt}$$

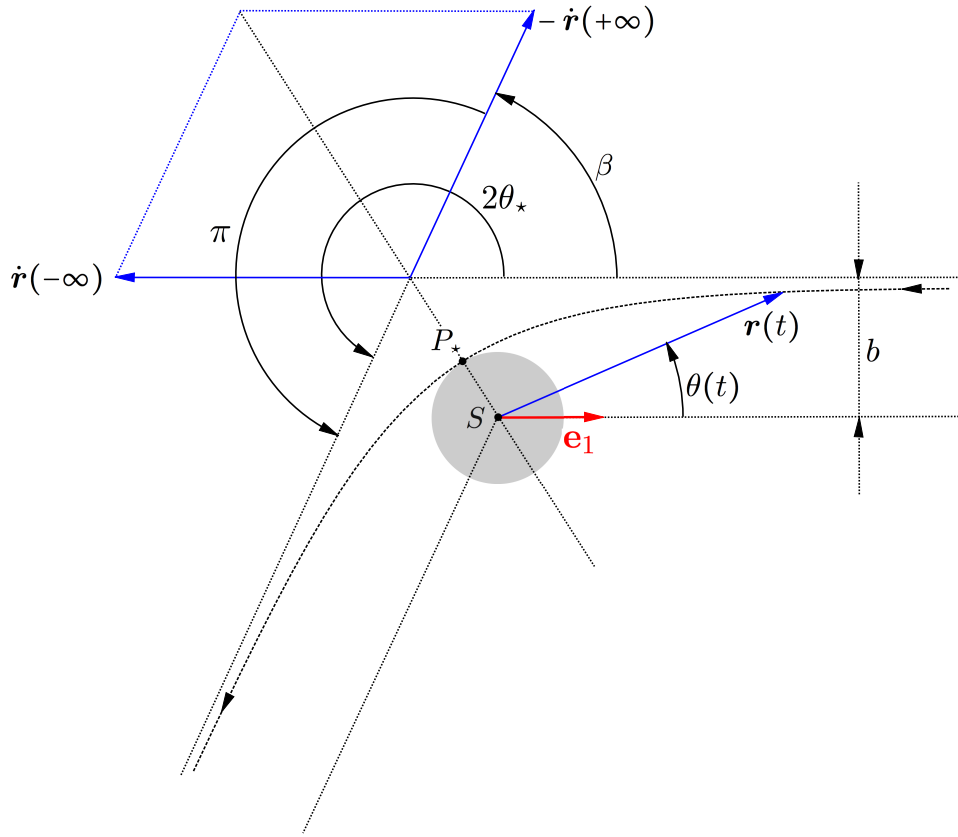


FIGURE 4. Déflexion newtonienne de l'orbite hyperbolique d'une particule P : le point P_* représente la périhélie de l'orbite de P , i.e. le point de l'orbite qui est le plus proche du Soleil.

Lemme 7.1. Soit $t \mapsto (\rho(t), \theta(t))$ le paramétrage polaire de l'orbite hyperbolique de la particule P prise dans le champ de gravitation du soleil, de vitesse $-c\mathbf{e}_1$ en $t = -\infty$ et atteignant sa périhélie au temps $t = 0$ avec $\rho(0) = r_\odot$ (et donc $d\theta/dt = 0$ en $t = 0$) ; alors (i) : l'énergie de P est $E = c^2/2$ et

$$(17) \quad \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = \left(\frac{c}{\sigma_0} \right)^2 - \left(\frac{1}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{c}{\sigma_0} \right)^2 \frac{r_\bullet}{\rho}$$

(ii) : avec le changement de variable de Binet $x := r_\odot/\rho$ nous avons pour $0 \leq \theta \leq \theta_*$

$$(18) \quad d\theta = \left(1 - x^2 + \frac{r_\bullet}{r_\odot} x \right)^{-1/2} dx$$

Preuve. (i) : La base polaire mobile $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta)$ étant orthonormée directe, l'expression polaire de la vitesse en (4) entraîne que $\mathbf{v}^2 = (d\rho/dt)^2 + \rho^2(d\theta/dt)^2$. L'énergie de P dans le champ de gravitation de S donnée en (16) s'écrit alors

$$(19) \quad E = \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{GM_\odot}{\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_0}{\rho} \right)^2 - \frac{c^2 r_\bullet}{2\rho}$$

L'hypothèse du mouvement hyperbolique de P assure que $\rho(\pm\infty) = +\infty$: avec une vitesse $v(+\infty)$ égale à la vitesse de la lumière c , il suit de (16) que $E = c^2/2$ et (19) donne

$$c^2 - \left(\frac{\sigma_0}{\rho}\right)^2 + c^2 \frac{r_\bullet}{\rho} = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{dt} \frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_0}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta}\right)^2$$

ce qui donne (17)

(ii) : Dans notre configuration (rayon lumineux hyperbolique rasant la surface solaire), la périhélie à lieu à $t = 0$ avec $\rho(0) = r_\odot$ (rayon solaire). Nous appliquerons la méthode de Binet pour $-\infty \leq t \leq 0$ en posant $x = r_\odot/\rho$, de sorte que sur l'intervalle de temps considéré, x croît de 0 à 1. Dans ce cas, nous pouvons écrire à l'aide de (17) :

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dx}{d\rho} \frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 \left(\frac{r_\odot}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{cr_\odot}{\sigma_0}\right)^2 - \left(\frac{r_\odot}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{cr_\odot}{\sigma_0}\right)^2 \frac{r_\bullet}{\rho} = \left(\frac{cr_\odot}{\sigma_0}\right)^2 - x^2 + \left(\frac{cr_\odot}{\sigma_0}\right)^2 \frac{r_\bullet}{r_\odot} x$$

Or $\sigma_0 = cb$ et par suite avec l'approximation $b \simeq r_\odot$, nous obtenons finalement :

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 \simeq 1 - x^2 + \frac{r_\bullet}{r_\odot} x$$

Nous obtenons (18) du fait que θ est une fonction croissante de x lorsque $t \leq 0$. □

Proposition 7.2. *L'angle de la déflexion newtonienne d'un rayon de lumière rasant la surface solaire est (approximativement) $\beta \simeq r_\bullet/r_\odot$.*

Preuve. Rappelons que le rayon de Schwarzschild de la masse solaire $M_\odot$ est $r_\bullet = GM_\odot/c^2$: ce rayon est très petit relativement au rayon solaire $r_\odot$: grâce aux valeurs mesurées des grandeurs en question, nous savons – voir (12) – que $r_\bullet/r_\odot \simeq 4,24 \times 10^{-6}$. Il est ainsi possible d'approximer (18) en écrivant :

$$d\theta = \left(1 - \left(x^2 - \frac{r_\bullet}{r_\odot} + \left(\frac{1}{2} \frac{r_\bullet}{r_\odot}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{2} \frac{r_\bullet}{r_\odot}\right)^2\right)^{-1/2} dx \simeq \left(1 - \left(x - \frac{1}{2} \frac{r_\bullet}{r_\odot}\right)^2\right)^{-1/2} dx$$

Comme x varie de 0 à 1 lorsque θ varie de $\theta(-\infty) = 0$ à $\theta(0) = \theta_*$, il vient avec (15) :

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} = \theta_* &= \int_0^{\theta_*} d\theta \simeq \int_0^1 \left(1 - \left(x - \frac{1}{2} \frac{r_\bullet}{r_\odot}\right)^2\right)^{-1/2} dx \\ &\simeq \text{Arcsin}\left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_\bullet}{r_\odot}\right) - \text{Arcsin}\left(-\frac{1}{2} \frac{r_\bullet}{r_\odot}\right) \simeq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \frac{r_\bullet}{r_\odot} \end{aligned}$$
□

8. La métrique de Schwarzschild

Rappelons (c.f. [Oli15b, § 7]) que le $(0, 2)$ -tenseur énergie-impulsion T de la Relativité Générale décrit la distribution spatio-temporelle de matière-énergie. C'est un tenseur symétrique (i.e. en composantes $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$), s'annulant uniformément dans les portions d'espace vide de matière-énergie et dont la divergence est nulle. Les équations d'Einstein s'écrivent en composantes sous la forme suivante :

$$(20) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

À droite, nous reconnaissons les composantes du tenseur d'Einstein, où $R_{\mu\nu}$ sont les composantes du tenseur de Ricci et où R est le scalaire de Ricci. Le fait (c.f. [Oli15b, (iv)-Proposition 7.1]) que le tenseur d'Einstein et le tenseur de Ricci s'annulent simultanément implique que les équations d'Einstein dans le vide se réduisent à

$$(21) \quad R_{\mu\nu} = 0$$

La métrique de Schwarzschild est la première solution exacte du système d'équations (21), pour laquelle la courbure n'est pas identiquement nulle. Elle décrit la géométrie de l'espace-temps courbé par l'effet gravitationnel d'une masse à symétrie sphérique et stationnaire (il n'y a pas d'ondes gravitationnelles) dans le voisinage vide autour de la masse centrale.

Théorème 8.1 (Schwarzschild). *Notons $(t, \rho, \theta, \varphi)$ les coordonnées sphériques de l'espace-temps (d'origine S) et pour $r_0 \geq 0$ donné, soit $\mathcal{U}(r_0)$ l'ouvert défini par la condition $\rho > r_0$: alors*

(i) : *l'équation d'Einstein dans le vide (annulation uniforme du tenseur de Ricci) admet sur $\mathcal{U}(r_0)$ une solution (métrique lorentzienne) à symétrie sphérique stationnaire, et coïncidant asymptotiquement avec la métrique de Minkowski pour $r \rightarrow +\infty$, soit :*

$$(22) \quad ds^2 = -B(\rho)dt^2 + A(\rho)d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad \text{où} \quad B(\rho) = \frac{1}{A(\rho)} = 1 - \frac{r_0}{\rho}$$

Ici, $t = ct$ est le temps renormalisé de l'espace-temps (avec c la célérité de la lumière) et ds est l'intervalle d'espace-temps d'un déplacement infinitésimal $(dt, d\rho, d\theta, d\varphi)$ (le cas $r_0 = 0$ correspond à l'espace-temps sans gravitation, i.e. l'espace de Minkowski) ;

(ii) : *les géodésiques non relativistes de cette métrique s'approximent, dans la limite du champ faible, par les orbites newtoniennes du champ de gravitation créé par une masse ponctuelle M (en S), lorsque r_0 est égal au rayon de Schwarzschild¹², soit :*

$$(23) \quad r_\bullet := \frac{2GM}{c^2}$$

dans ces conditions, la métrique de Schwarzschild sur $\mathcal{U}(r_\bullet)$ est :

$$(24) \quad ds^2 = -\left(1 - \frac{r_\bullet}{\rho}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_\bullet}{\rho}\right)^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

La première solution des équations d'Einstein est l'espace-temps de la Relativité Restreinte, i.e. $\mathbb{R}^4$ muni de la métrique de Minkowski, soit (en coordonnées sphérique)

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi + \rho^2 \sin^2 \theta d\theta^2$$

Il s'agit là d'une solution sans gravitation ! Afin de trouver une solution proche de l'espace Minkowski, mais intégrant de la gravitation, Schwarzschild recherche l'analogue – pour la Relativité Générale – du champ newtonien de gravitation engendré par une masse centrale M (c'est la plus simple des situations imaginables). L'espace temps étant rapporté aux coordonnées sphériques $(t, \rho, \theta, \varphi)$, nous considérons l'ouvert $\mathcal{U}(r_0) := \{\rho > r_0\}$ où $r_0 > 0$ est (pour l'instant) arbitraire. Plus précisément Schwarzschild recherche une solution de la forme

$$(25) \quad ds^2 = -B(\rho) dt^2 + A(\rho) d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

12. Encore appelé l'horizon des événements.

où $\rho \mapsto A(\rho)$ et $\rho \mapsto B(\rho)$ sont des fonctions positives qu'il reste à déterminer (au signe prêt, nous utilisons les notations de Weinberg dans [Wei72, eq-(8.2.1) p. 179]). Nous reviendront sur l'introduction du rayon r_0 , mais disons que le cas limite $r_0 = 0$ doit correspondre à l'espace de Minkowski et que pour $r_0 > 0$, la distribution de matière-énergie (à l'origine de l'effet gravitationnel) est supposée confinée dans le domaine $\{\rho \leq r_0\}$.

8.1. Preuve du Théorème 8.1 – partie (i). Rappelons que (dans le système de coordonnées locales d'une carte) les symboles de Christoffel s'expriment en fonction des dérivées partielles des composantes de la métrique, avec

$$\mathbb{C}^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\epsilon} \left(\partial_\mu (g_{\nu\epsilon}) + \partial_\nu (g_{\mu\epsilon}) - \partial_\epsilon (g_{\mu\nu}) \right)$$

Le tenseur de Ricci s'écrit alors :

$$(26) \quad R_{\mu\nu} = \partial_\sigma (\mathbb{C}^\sigma_{\mu\nu}) - \partial_\nu (\mathbb{C}^\sigma_{\sigma\mu}) + \mathbb{C}^\sigma_{\sigma\eta} \mathbb{C}^\eta_{\mu\nu} - \mathbb{C}^\sigma_{\nu\eta} \mathbb{C}^\eta_{\sigma\mu} = R_{\nu\mu}$$

Grâce à la symétrie des symboles de Christoffel (i.e. $\mathbb{C}^\sigma_{\mu\nu} = \mathbb{C}^\sigma_{\nu\mu}$) l'expression des composantes du tenseur de Ricci en (26) nous donne $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$: la symétrie du tenseur de Ricci est essentielle quant à la cohérence de l'équation d'Einstein (le tenseur énergie-impulsion étant symétrique par définition). La forme spéciale de la métrique recherchée nous permet de calculer explicitement les composantes du tenseur de Ricci. Le fait que $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ réduit le nombre de composantes cherchées à $10 = 4+3+2+1$: ces composantes sont figurées dans la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} R_{tt} & R_{t\rho} & R_{t\theta} & R_{t\varphi} \\ * & R_{\rho\rho} & R_{\rho\theta} & R_{\rho\varphi} \\ * & * & R_{\theta\theta} & R_{\theta\varphi} \\ * & * & * & R_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$$

Les calculs sont assez fastidieux mais pas très difficiles : nous allons par exemple expliciter la composante R_{tt} . Pour cela nous développons l'expression en (26) pour $(\mu, \nu) = (t, t)$ à partir de la métrique sous la forme incomplète donnée en (25). La métrique étant diagonale dans le système de coordonnées sphérique (i.e. $g_{\mu\nu} = 0$ dès que $\mu \neq \nu$) et stationnaire (i.e. $\partial_t (g_{\mu\nu}) = 0$ pour tout μ, ν), nous pouvons utiliser l'expression de la contraction des symboles de Christoffel (i.e. $\mathbb{C}^\sigma_{\sigma\nu} = 1/2 \partial_\nu (g)/g$, où $g = \det(g)$ – c.f. [Oli15a, Lemme 15.2]) pour écrire :

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \partial_\sigma (\mathbb{C}^\sigma_{tt}) - \partial_t (\mathbb{C}^\sigma_{\sigma t}) + \mathbb{C}^\sigma_{\sigma\eta} \mathbb{C}^\eta_{tt} - \mathbb{C}^\sigma_{t\eta} \mathbb{C}^\eta_{\sigma t} \\ &= \partial_\sigma (\mathbb{C}^\sigma_{tt}) - \partial_t \left(\frac{1}{2g} \partial_t (g) \right) + \left(\frac{1}{2g} \partial_\alpha (g) \right) \mathbb{C}^\alpha_{tt} - \mathbb{C}^\sigma_{t\alpha} \mathbb{C}^\alpha_{t\sigma} \\ &= \partial_\sigma (\mathbb{C}^\sigma_{tt}) + \left(\frac{1}{2g} \partial_\rho (g) \right) \mathbb{C}^\rho_{tt} - \mathbb{C}^\sigma_{t\alpha} \mathbb{C}^\alpha_{t\sigma} \end{aligned}$$

Du fait que $g = -\rho^4 AB \sin^2(\theta)$, il vient :

$$\frac{1}{2g} \partial_\rho (g) = \frac{1}{2\rho^4 AB} \left(4\rho^3 AB + \rho^4 \left(\frac{dA}{d\rho} \right) B + \rho^4 A \left(\frac{dB}{d\rho} \right) \right) = \frac{2}{\rho} + \frac{1}{2A} \left(\frac{dA}{d\rho} \right) + \frac{1}{2B} \left(\frac{dB}{d\rho} \right)$$

ce qui donne

$$(27) \quad R_{tt} = \partial_\alpha (\mathbb{C}^\alpha_{tt}) + \left(\frac{2}{\rho} + \frac{1}{2A} \left(\frac{dA}{d\rho} \right) + \frac{1}{2B} \left(\frac{dB}{d\rho} \right) \right) \mathbb{C}^\alpha_{tt} - \mathbb{C}^\sigma_{t\alpha} \mathbb{C}^\alpha_{t\sigma}$$

Pour les symboles de Christoffel restants, nous avons d'une part,

$$\mathbb{C}^{\sigma}_{t\alpha} = \frac{1}{2}g^{\sigma\epsilon}(\partial_t(g_{\alpha\epsilon}) + \partial_{\alpha}(g_{t\epsilon}) - \partial_{\epsilon}(g_{t\alpha})) = \frac{1}{2}g^{\sigma\sigma}(\partial_{\alpha}(g_{t\sigma}) - \partial_{\sigma}(g_{t\alpha}))$$

ce qui donne

$$\mathbb{C}^t_{t\rho} = \frac{1}{2}g^{tt}\partial_{\rho}(g_{tt}) = \frac{1}{2B}\left(\frac{dB}{d\rho}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{C}^{\rho}_{tt} = -\frac{1}{2}g^{\rho\rho}\partial_{\rho}(g_{tt}) = -\frac{1}{2A}\left(\frac{dB}{d\rho}\right)$$

avec $\mathbb{C}^{\sigma}_{t\alpha} = 0$ dès que $(\sigma, \alpha) \notin \{(\rho, t), (t, \rho)\}$. D'autre part,

$$\mathbb{C}^{\alpha}_{tt} = \frac{1}{2}g^{\alpha\epsilon}(\partial_t(g_{t\epsilon}) + \partial_t(g_{t\epsilon}) - \partial_{\epsilon}(g_{tt})) = -\frac{1}{2}g^{\alpha\epsilon}\partial_{\epsilon}(g_{tt}) = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}\left(\frac{dB}{d\rho}\right)$$

soit encore

$$\mathbb{C}^{\rho}_{tt} = \frac{1}{2A(\rho)}\left(\frac{dB}{d\rho}\right)$$

et $\mathbb{C}^{\alpha}_{tt} = 0$ dès que $\alpha \neq \rho$. Finalement, l'équation (27) devient

$$\begin{aligned} R_{tt} &= \frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{A}\left(\frac{dB}{d\rho}\right)\right) + \left(\frac{2}{\rho} + \frac{1}{2A}\left(\frac{dA}{d\rho}\right) + \frac{1}{2B}\left(\frac{dB}{d\rho}\right)\right)\left(\frac{1}{2A}\left(\frac{dB}{d\rho}\right)\right) - \frac{1}{2AB}\left(\frac{dB}{d\rho}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{2A^2}\left(\frac{dA}{d\rho}\right)\left(\frac{dB}{d\rho}\right) + \frac{1}{2A}\left(\frac{d^2B}{d\rho^2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{\rho A}\left(\frac{dB}{d\rho}\right) + \frac{1}{4A^2}\left(\frac{dA}{d\rho}\right)\left(\frac{dB}{d\rho}\right) + \frac{1}{4AB}\left(\frac{dB}{d\rho}\right)^2 - \frac{1}{2AB}\left(\frac{dB}{d\rho}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2A}\left(\frac{d^2B}{d\rho^2}\right) + \frac{1}{\rho A}\left(\frac{dB}{d\rho}\right) - \frac{1}{4A^2}\left(\frac{dA}{d\rho}\right)\left(\frac{dB}{d\rho}\right) - \frac{1}{4AB}\left(\frac{dB}{d\rho}\right)^2 \end{aligned}$$

soit encore

$$R_{tt} = \frac{1}{2A}\left(\frac{d^2B}{d\rho^2}\right) + \frac{1}{\rho A}\left(\frac{dB}{d\rho}\right) - \frac{1}{4A}\left(\frac{dB}{d\rho}\right)\left(\frac{1}{A}\left(\frac{dA}{d\rho}\right) + \frac{1}{B}\left(\frac{dB}{d\rho}\right)\right)$$

Les autres composantes du tenseur de Ricci s'obtiennent par un calcul analogue nécessitant la liste complète des expressions des symboles de Christoffel. Nous pouvons énoncer la proposition suivantes (c.f. Weinberg in [Wei72, eq. (8.1.13) p. 178]).

Proposition 8.2. *Soit g une métrique – définie sur un ouvert de l'espace-temps à symétrie sphérique – dont l'élément de volume associé s'écrit sous la forme*

$$ds^2 = -B(\rho) dt^2 + A(\rho) d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

Alors (dans la carte des coordonnées sphériques) (i) : les symboles de Christoffel non nuls sont :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{\rho}_{\rho\rho} &= \frac{1}{2A(\rho)}\frac{dA}{d\rho} & \mathbb{C}^{\rho}_{\theta\theta} &= -\frac{\rho}{A(\rho)} \\ \mathbb{C}^{\rho}_{\varphi\varphi} &= -\frac{\rho \sin^2(\theta)}{A(\rho)} & \mathbb{C}^{\rho}_{tt} &= \frac{1}{2A(\rho)}\frac{dB}{d\rho} \\ (28) \quad \mathbb{C}^{\theta}_{\rho\theta} = \mathbb{C}^{\theta}_{\theta\rho} &= \frac{1}{\rho} & \mathbb{C}^{\theta}_{\varphi\varphi} &= -\sin(\theta)\cos(\theta) \\ \mathbb{C}^{\varphi}_{\rho\varphi} = \mathbb{C}^{\varphi}_{\varphi\rho} &= \frac{1}{\rho} & \mathbb{C}^{\varphi}_{\theta\varphi} &= \mathbb{C}^{\varphi}_{\varphi\theta} = -\cos(\theta) \\ \mathbb{C}^t_{\rho t} = \mathbb{C}^t_{t\rho} &= \frac{1}{2B(\rho)}\frac{dB}{d\rho} \end{aligned}$$

et (ii) : $R_{\mu\nu} = 0$ dès que $\mu \neq \nu$, les valeurs des composantes diagonales étant

$$(29) \quad R_{tt} = \frac{1}{2A} \left(\frac{d^2 B}{d\rho^2} \right) + \frac{1}{\rho A} \left(\frac{dB}{d\rho} \right) - \frac{1}{4A} \left(\frac{dB}{d\rho} \right) \left(\frac{1}{A} \left(\frac{dA}{d\rho} \right) + \frac{1}{B} \left(\frac{dB}{d\rho} \right) \right)$$

$$(30) \quad R_{\rho\rho} = -\frac{1}{2B} \left(\frac{d^2 B}{d\rho^2} \right) + \frac{1}{\rho A} \left(\frac{dA}{d\rho} \right) + \frac{1}{4B} \left(\frac{dB}{d\rho} \right) \left(\frac{1}{A} \left(\frac{dA}{d\rho} \right) + \frac{1}{B} \left(\frac{dB}{d\rho} \right) \right)$$

$$(31) \quad R_{\theta\theta} = 1 + \frac{\rho}{2A} \left(\frac{1}{A} \left(\frac{dA}{d\rho} \right) - \frac{1}{B} \left(\frac{dB}{d\rho} \right) \right) - \frac{1}{A}$$

$$(32) \quad R_{\varphi\varphi} = \sin^2(\theta) \left(1 + \frac{\rho}{2A} \left(\frac{1}{A} \left(\frac{dA}{d\rho} \right) - \frac{1}{B} \left(\frac{dB}{d\rho} \right) \right) - \frac{1}{A} \right) = \sin^2(\theta) R_{\theta\theta}$$

Les équations d'Einstein dans l'ouvert $\mathcal{U}(r_0)$ (considéré par hypothèse comme un espace vide de matière-énergie), se réduisent à $R_{\mu\nu} = 0$. Si de plus, nous nous plaçons dans les coordonnées sphériques, alors d'après la Proposition 8.2, nous savons que la matrice $(R_{\mu\nu})$ est diagonale, ce qui nous laisse avec quatre équations dont une est redondante. En résumé, il nous reste le système des trois équations suivantes (les équations (33) et (34) sont respectivement obtenues en multipliant (29) et (30) par ρA^2 et ρAB) :

$$(33) \quad 0 = \frac{\rho A}{2} \left(\frac{d^2 B}{d\rho^2} \right) + A \left(\frac{dB}{d\rho} \right) - \frac{\rho A}{4} \left(\frac{dB}{d\rho} \right) \left(\frac{1}{A} \left(\frac{dA}{d\rho} \right) + \frac{1}{B} \left(\frac{dB}{d\rho} \right) \right)$$

$$(34) \quad 0 = -\frac{\rho A}{2} \left(\frac{d^2 B}{d\rho^2} \right) + B \left(\frac{dA}{d\rho} \right) + \frac{\rho A}{4} \left(\frac{dB}{d\rho} \right) \left(\frac{1}{A} \left(\frac{dA}{d\rho} \right) + \frac{1}{B} \left(\frac{dB}{d\rho} \right) \right)$$

$$(35) \quad 0 = 1 + \frac{\rho}{2A} \left(\frac{1}{A} \left(\frac{dA}{d\rho} \right) - \frac{1}{B} \left(\frac{dB}{d\rho} \right) \right) - \frac{1}{A}$$

La somme de (33) et (34) donne $A(dB/d\rho) + (dA/d\rho)B = 0$, d'où $A(\rho)B(\rho) = K$ avec K une constante non-nulle ; or la coïncidence à l'infini de la métrique de Schwarzschild avec celle de Minkowski entraîne que $A(+\infty) \sim 1 \sim B(+\infty)$, ce qui assure que $K = 1$ et par suite

$$(36) \quad A(\rho)B(\rho) = 1$$

Il découle de (36) que $AdB/d\rho + BdA/d\rho = 0$ et (35) se transforme en une équation différentielle en B , soit $1 - \rho dB/d\rho - B = 0$, i.e.

$$\frac{d}{d\rho}(\rho B(\rho)) = 1$$

Nous en déduisons qu'il existe une constante réelle r_0 t.q.

$$B(\rho) = \left(1 - \frac{r_0}{\rho} \right)$$

et (25) devient :

$$(37) \quad ds^2 = - \left(1 - \frac{r_0}{\rho} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_0}{\rho} \right)^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2$$

8.2. Preuve du Théorème 8.1 – partie (ii). Il reste à déterminer la constante r_0 . C'est un point délicat car il s'agit d'interpoler la théorie de la gravitation de Newton, la Relativité Restreinte et la Relativité Générale. Disons grossièrement que si $\rho \mapsto \Phi(\rho)$ est la fonction telle que $-g_{tt} = \exp(2\Phi(\rho)/c^2)$, alors l'approximation du champ faible affirme (c.f. Remarque 9.4 infra) que dans la limite $\rho \rightarrow +\infty$ la valeur de $\Phi(\rho)$ s'approche du potentiel

newtonien engendré par la masse M concentrée au centre de symétrie : en d'autres termes $\Phi(\rho) \simeq -GM/\rho$ quand $\rho \rightarrow +\infty$ et l'approximation linéaire de l'exponentielle donne

$$1 - \frac{r_0}{\rho} = \exp\left(\frac{2\Phi(\rho)}{c^2}\right) \simeq \exp\left(-\frac{2GM}{c^2\rho}\right) \simeq 1 - \frac{2GM}{c^2\rho}$$

Ceci n'est possible que si r_0 coïncide avec le rayon de Schwarzschild $r_\bullet = 2GM/c^2$.

Le point (ii) du Théorème 8.1 représente – ici – le trait d'union entre la gravitation selon Newton et Einstein ; de plus il fait apparaître le rayon de Schwarzschild $r_\bullet$ comme une singularité (apparente : c.f. [Wei72, Chap 8.8]) de la métrique. Cette question doit être approfondie : pour cela nous nous référons à [Ton64, eq VI-42][Wei72, Chap 3.4 & 8.2][Car13, eq. 5.22].

9. Déflexion de la lumière pour la Relativité Générale

9.1. Équation des géodésiques inertielles. Nous nous intéressons aux géodésiques inertielle donc la projection spatiale se trouve dans le plan $\varphi = \pi/2$ de $\mathcal{U}(r_\bullet)$. Nous sommes alors ramenés à un espace-temps à 3 dimensions avec une dimension temporelle t et deux dimensions spatiales (ρ, θ) en paramétrisation polaires. La métrique de Schwarzschild se réduit alors à

$$(38) \quad ds^2 = -B(\rho)dt^2 + A(\rho)d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

avec $B(\rho) = 1 - r_\bullet/\rho$ et $A(\rho) = 1/B(\rho)$. Une géodésique $u \mapsto \gamma(u) = (\gamma^t(u), \gamma^\rho(u), \gamma^\theta(u))$ pour cette métrique doit satisfaire le système des trois équations suivantes :

$$(39) \quad \frac{d^2\gamma^t}{du^2} + \mathbf{C}^t_{\mu\nu}(\gamma(u)) \frac{d\gamma^\mu}{du} \frac{d\gamma^\nu}{du} = 0$$

$$(40) \quad \frac{d^2\gamma^\rho}{du^2} + \mathbf{C}^\rho_{\mu\nu}(\gamma(u)) \frac{d\gamma^\mu}{du} \frac{d\gamma^\nu}{du} = 0$$

$$(41) \quad \frac{d^2\gamma^\theta}{du^2} + \mathbf{C}^\theta_{\mu\nu}(\gamma(u)) \frac{d\gamma^\mu}{du} \frac{d\gamma^\nu}{du} = 0$$

Par exemple, pour l'équation (40) – et compte tenu des expressions des symboles de Christoffel données en (28) – nous obtenons (avec les termes non nuls) :

$$\begin{aligned} (40) \quad &\iff \frac{d^2\gamma^\rho}{du^2} + \mathbf{C}^\rho_{\mu\nu}(\gamma(u)) \frac{d\gamma^\mu}{du} \frac{d\gamma^\nu}{du} = 0 \\ &\iff \frac{d^2\gamma^\rho}{du^2} + \mathbf{C}^\rho_{\rho\rho}(\gamma(u)) \frac{d\gamma^\rho}{du} \frac{d\gamma^\rho}{du} + \mathbf{C}^\rho_{\theta\theta}(\gamma(u)) \frac{d\gamma^\theta}{du} \frac{d\gamma^\theta}{du} + \mathbf{C}^\rho_{tt}(\gamma(u)) \frac{d\gamma^t}{du} \frac{d\gamma^t}{du} = 0 \\ &\iff \frac{d^2\gamma^\rho}{du^2} + \frac{1}{2A(\gamma^\rho(u))} \frac{dA}{d\rho}(\gamma^\rho(u)) \frac{d\gamma^\rho}{du} \frac{d\gamma^\rho}{du} \\ &\quad + \frac{\gamma^\rho(u)}{A(\gamma^\rho(u))} \frac{d\gamma^\theta}{du} \frac{d\gamma^\theta}{du} \\ &\quad + \frac{1}{2A(\gamma^\rho(u))} \frac{dB}{d\rho}(\gamma^\rho(u)) \frac{d\gamma^t}{du} \frac{d\gamma^t}{du} = 0 \end{aligned}$$

Les équations (41) et (39) s'établissent d'une manière analogue ; dans la proposition suivante, nous notons simplement $\rho(u) := \gamma^\rho(u)$, $\theta(u) := \gamma^\theta(u)$ et $t(u) := \gamma^t(u)$.

Proposition 9.1. *Le système des équations d'une géodésique $u \mapsto (t(u), r(u), \theta(u))$ de l'espace-temps de Schwarzschild est formé des trois équations suivantes*

$$(42) \quad \frac{d^2 t}{du^2} + \frac{1}{B} \frac{dB}{d\rho} \frac{d\rho}{du} \frac{dt}{du} = 0$$

$$(43) \quad \frac{d^2 \rho}{du^2} + \frac{1}{2A} \frac{dA}{d\rho} \left(\frac{d\rho}{du} \right)^2 - \frac{\rho}{A} \left(\frac{d\theta}{du} \right)^2 + \frac{c^2}{2A} \frac{dB}{d\rho} \left(\frac{dt}{du} \right)^2 = 0$$

$$(44) \quad \frac{d^2 \theta}{du^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d\rho}{du} \frac{d\theta}{du} = 0$$

9.2. **Trois constantes de l'orbite géodésique.** En multipliant (44) par ρ^2 il vient

$$\rho^2 \frac{d^2 \theta}{du^2} + 2\rho \frac{d\rho}{du} \frac{d\theta}{du} = 0 \iff \frac{d}{du} \left(\rho^2 \frac{d\theta}{du} \right) = 0$$

et nous obtenons une première constante du mouvement (le moment cinétique), soit

$$(45) \quad \omega_0 = \rho^2 \frac{d\theta}{du}$$

Pour la deuxième constante, nous multiplions (42) par B , ce qui donne

$$B \frac{d^2 t}{du^2} + \left(\frac{dB(\rho)}{d\rho} \frac{d\rho}{du} \right) \frac{dt}{du} = 0 \iff \frac{d}{du} \left(B \frac{dt}{du} \right) = 0$$

d'où une première constante du mouvement, soit

$$(46) \quad \kappa_0 = B \frac{dt}{du}$$

Nous utilisons le fait qu'il est licite d'effectuer un changement linéaire du paramètre de l'équation d'une géodésique inertielle : ainsi, nous pouvons fixer $\kappa_0 = 1$ dans (46) de sorte que cette dernière équation devient simplement :

$$(47) \quad \frac{dt}{du} = \frac{1}{B(r(u))} \quad \text{i.e.} \quad \frac{dt}{du} = \frac{c}{B(r(u))}$$

Ainsi, pour les paramètres u t.q. $r(u) \simeq +\infty$, l'approximation $B(r(u)) \simeq 1$ combinée l'équation (47) entraîne que $t \simeq u$, i.e. $t \simeq cu$.

Finalement, en partant de l'équation (43) multipliée par $2A dr/du$ il vient avec (45) :

$$\begin{aligned} 2A \frac{d\rho}{du} \left(\frac{d^2 \rho}{du^2} + \frac{1}{2A} \frac{dA}{d\rho} \left(\frac{d\rho}{du} \right)^2 - \frac{2}{2A} \frac{\omega_0^2}{\rho^3} + \frac{1}{2AB^2} \frac{dB}{d\rho} \right) &= 0 \\ A \left(2 \frac{d\rho}{du} \left(\frac{d^2 \rho}{du^2} \right) + \left(\frac{dA}{d\rho} \frac{d\rho}{du} \right) \left(\frac{d\rho}{du} \right)^2 - \frac{2\omega_0^2}{\rho^3} \frac{d\rho}{du} + \frac{1}{B^2} \frac{dB}{d\rho} \frac{d\rho}{du} \right) &= 0 \\ \frac{d}{du} \left(A \left(\frac{d\rho}{du} \right)^2 + \frac{\omega_0^2}{\rho^2} - \frac{1}{B} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une troisième constante du mouvement (l'énergie), soit

$$(48) \quad \mathcal{E} = \frac{c^2}{2} \left(\left(\frac{d\rho}{du} \right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{\rho} \right)^2 B - 1 \right) \frac{1}{B}$$

Remarque 9.2. Le facteur $c^2/2$ est (artificiellement) introduit afin de décomposer l'énergie $\mathcal{E}$ suivant ses contributions radiale (énergie potentielle effective) et co-radiale, en écrivant

$$\mathcal{E} = \frac{c^2}{2} \left(\frac{d\rho}{du} \right)^2 \frac{1}{B} + \mathcal{E}_r(\rho) \quad \text{où} \quad \mathcal{E}_r(\rho) := \frac{c^2}{2} \left(\left(\frac{\omega_0}{\rho} \right)^2 B - 1 \right) \frac{1}{B}$$

Nous verrons (c.f. Remarque 9.4) comment utiliser cette remarque pour justifier l'identité entre la constante $r_\odot$ de la métrique de Schwarzschild donnée en (37) et le rayon de Schwarzschild $r_\bullet$.

9.3. Paramétrage spatial de l'orbite géodésique. Soit $(S; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ le repère cartésien de la partie spatiale de l'espace-temps, où S est sensé représenter le soleil. Rappelons que la projection spatiale $u \mapsto \mathbf{r}(u)$ de la géodésique $u \mapsto \gamma(u) = (t(u), \mathbf{r}(u))$ est supposée se dérouler le plan $(S; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Nous admettons que cette projection est une quasi-hyperbole, i.e. une perturbation du mouvement hyperbolique newtonien déjà étudié : en particulier, nous admettons l'existence et l'unicité de la périhélie spatiale et nous notons $P_\star$ le point de $(S; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ correspondant. Le système de repérage spatial est identique à celui utilisé au § 7 (méthode de Binet pour la déflexion newtonienne des rayons lumineux) où $(\rho(u), \theta(u))$ désigne les coordonnées polaires de la position $\mathbf{r}(u)$ (i.e. $\rho(u)$ est la norme de $\mathbf{r}(u)$ et $\theta(u)$ est la mesure de l'angle orienté $(\mathbf{e}_1, \mathbf{r}(u))$: voir Fig. 4). Dans le cas considéré ici (i.e. modélisation d'un rayon lumineux rasant la surface solaire) nous avons $(\rho(u), \theta(u)) = (+\infty, 0)$ lorsque $u \rightarrow -\infty$. Par analogie avec l'orbite hyperbolique du cas newtonien, il est aussi raisonnable¹³ d'admettre la symétrie (géométrique et dynamique) de l'orbite spatiale $u \mapsto \mathbf{r}(u)$ par rapport à l'axe de $(SP_\star)$ de la périhélie $P_\star$: nous supposons $\mathbf{r}(0) = P_\star$, de sorte que $\rho(u)$ décroît de $+\infty$ jusqu'à la valeur minimale $\rho(0) = r_\odot$ (rayon solaire) puis croît de $r_\odot$ à $+\infty$. De même pour $\theta_\star := \theta(0)$, l'angle $\theta(u)$ varie de $\theta(-\infty) = 0$ à $\theta(+\infty) = 2\theta_\star$ (c.f. Fig. 4). Alors, l'angle de déflexion β de la géodésique par rapport à sa direction initiale vérifie

$$(49) \quad \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} = \theta_\star = \int_0^{\theta_\star} d\theta$$

L'estimation de $\theta_\star$ – et donc de β – sera obtenu par une adaptation de la méthode d'intégration de Binet utilisée dans le cas newtonien (c.f. § 7).

9.4. Estimation de l'angle de déflexion. L'analyse de l'orbite spatiale $u \mapsto \mathbf{r}(u)$ est basée sur l'existence (supposée) du paramètre d'impact (fini, non nul), c'est-à-dire (compte tenu de notre système de repérage) la valeur de la limite b de $\rho \sin \theta = \langle \mathbf{r} | \mathbf{e}_2 \rangle$ lorsque $u \rightarrow -\infty$. Nous pouvons supposer (sans perte de généralité) que $b > 0$ (voir Fig. 4).

Proposition 9.3. Soit b le paramètre d'impact de l'orbite spatiale $u \mapsto \mathbf{r}(u)$ et v_0 la vitesse initiale, i.e. $d\mathbf{r}/du = -v_0 \mathbf{e}_1$ lorsque $u \rightarrow -\infty$; alors (i) : $2/c^2 \mathcal{E} = v_0^2 - 1$ et (ii) : $\omega_0 = bv_0$.

Preuve. (i) : Soit $(\mathbf{e}_\rho(u), \mathbf{e}_\theta(u))$ la base mobile polaire associée à $\mathbf{r}(u)$, i.e. $\mathbf{e}_\rho := \cos(\theta) \mathbf{e}_1 + \sin(\theta) \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_\theta := -\sin(\theta) \mathbf{e}_1 + \cos(\theta) \mathbf{e}_2$. Alors, d'une part, d'après (45) :

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{du} = \frac{d\theta}{du} \frac{d\mathbf{e}_\rho}{d\theta} = \frac{\omega_0}{\rho^2} \mathbf{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = \frac{d\theta}{du} \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\frac{\omega_0}{\rho^2} \mathbf{e}_\rho$$

13. En fait cela n'a rien d'évident dans l'absolue : en particulier, si le paramètre d'impact est inférieur ou égal au rayon de Schwarzschild, l'orbite spatiale semble posséder une évolution irréversible : on pourrait imaginer que le rayon lumineux est absorbé par le trou noir (l'inversion du temps ne permettrait pas alors au rayon lumineux de ressortir du trou noir). Le paradoxe – bien que lié à la gravitation – est analogue à celui des jumeaux de Langevin de la relativité restreinte : il disparaît en réalisant que le rayon lumineux met – dans le référentiel du laboratoire – un temps infini pour rentrer dans le trou noir : cela s'explique si on garde à l'esprit que l'orbite spatiale correspond à la projection d'une géodésique inertielle de l'espace-temps.

Mais d'autre part, comme $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_\rho$ il vient

$$(50) \quad \frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{d\rho}{du}\mathbf{e}_\rho + \frac{\omega_0}{\rho}\mathbf{e}_\theta$$

Comme $\mathbf{r}(0)$ est le point de la périhélie, l'application $u \mapsto \rho(u)$ est une fonction décroissante pour $u < 0$. Une conséquence de (50) est que $-d\rho/du$ vaut v_0 pour $u = -\infty$, de sorte qu'en partant de (48) et du fait que $B(\rho) \rightarrow 1$ lorsque $\rho \rightarrow +\infty$:

$$2/c^2\mathcal{E} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(\left(\frac{d\rho}{du} \right)^2 + B\left(\frac{\omega_0}{\rho}\right)^2 - 1 \right) \frac{1}{B} = v_0^2 - 1$$

(ii) : Rappelons que le paramètre d'impact de l'orbite spatiale $u \mapsto \mathbf{r}(u)$ correspond à la limite b de $\langle \mathbf{r} | \mathbf{e}_2 \rangle$, lorsque $u \rightarrow -\infty$; par une deuxième application (50)

$$\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{du} = \rho\mathbf{e}_\rho \times \left(\frac{d\rho}{du}\mathbf{e}_\rho + \frac{\omega_0}{\rho}\mathbf{e}_\theta \right) = \omega_0\mathbf{e}_3$$

Du fait que $d\mathbf{r}/du = -v_0\mathbf{e}_1$ (resp. $\langle \mathbf{r} | \mathbf{e}_2 \rangle = b$) lorsque $u \rightarrow -\infty$ nous tirons alors

$$\omega_0\mathbf{e}_3 = \lim_{u \rightarrow -\infty} \mathbf{r}(u) \times \frac{d\mathbf{r}}{du} = \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(\langle \mathbf{r} | \mathbf{e}_1 \rangle \mathbf{e}_1 + \langle \mathbf{r} | \mathbf{e}_2 \rangle \mathbf{e}_2 \right) \times \frac{d\mathbf{r}}{du} = -bv_0\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 = bv_0\mathbf{e}_3$$

□

Remarque 9.4. L'heuristique de l'identification entre, d'une part la constante $r_\circ$ de la métrique de Schwarzschild donnée en (37) et d'autre part, le rayon de Schwarzschild $r_\bullet$ est classiquement basée sur l'approximation (newtonienne) du champ faible engendré par la matière-énergie concentrée au centre de la symétrie sphérique (c.f. § 8.2). Une autre manière de voir cela est de repartir de la forme initiale de la métrique en (37) et de comparer l'énergie potentielle effective d'orbites (spatiales) analogues – i.e. rayon lumineux (quasi)-hyperboliques ayant le même paramètre d'impact b – dans le cas newtonien et pour la Relativité Générale, lorsqu'on se trouve loin du centre de symétrie. Dans le cas newtonien, $\sigma_0 = cb$ de sorte que l'énergie totale du système donnée en (19) s'écrit

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{d\rho}{dt} \right)^2 + E_r(\rho) \quad \text{où} \quad E_r(\rho) = \frac{c^2}{2} \left(-\frac{r_\bullet}{\rho} + \frac{b^2}{\rho^2} \right)$$

Mais d'autre part, pour que la Relativité Générale (c.f. Remarque 9.2), l'énergie du système est

$$\mathcal{E} = \frac{c^2}{2} \left(\frac{d\rho}{du} \right)^2 \frac{1}{B} + \mathcal{E}_r(\rho)$$

où en utilisant le fait que $\omega_0 = b$ (c.f. (ii)-Proposition 9.3)

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r(\rho) &= \frac{c^2}{2} \left(-1 + \frac{b^2}{\rho^2} \left(1 - \frac{r_\circ}{\rho} \right) \right) \left(1 - \frac{r_\circ}{\rho} \right)^{-1} \\ &= \frac{c^2}{2} \left(-1 + \frac{b^2}{\rho^2} - \frac{b^2 r_\circ}{\rho^3} \right) \left(1 + \frac{r_\circ}{\rho} + \frac{r_\circ^2}{\rho^2} + \dots \right) = \frac{c^2}{2} \left(-1 - \frac{r_\circ}{\rho} + \frac{b^2}{\rho^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

Par suite l'identité $r_\circ = r_\bullet$ est la condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\mathcal{E}_r(\rho) = -\frac{c^2}{2} + E_r(\rho) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^3}\right)$$

Lemme 9.5. Si $v_0 = 1$ (cas du rayon lumineux) alors (i) : $\mathcal{E} = 0$, de sorte que

$$(51) \quad \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} \right)^2 = \frac{B(r_\circ)}{r_\circ^2} - \frac{B(\rho)}{\rho^2}$$

(ii) : avec le changement de variable de Binet $x := r_{\odot}/\rho$ nous avons pour $0 \leq \theta \leq \theta_*$

$$(52) \quad d\theta = \left(1 - \frac{r_{\bullet}}{r_{\odot}} \left(x + \frac{1}{1+x}\right)\right)^{-1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{1/2}}$$

(iii) : pour $0 \leq \theta \leq \theta_*$ nous avons $0 \leq x := r_{\odot}/\rho \leq 1$ et en posant $x := \cos(\xi)$ il vient :

$$(53) \quad d\theta = - \left(1 - \frac{r_{\bullet}}{r_{\odot}} \left(\cos(\xi) + \frac{1}{1+\cos(\xi)}\right)\right)^{-1/2} d\xi$$

Preuve. (i) : Partant de (48) avec $\mathcal{E} = 0$ et (45) affirmant que $d\theta/du = \omega_0/\rho^2$ il vient :

$$(48) \iff \left(\frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{du}\right)^2 = 1 - \frac{B\omega_0^2}{\rho^2} \iff \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{\omega_0^2} - \frac{B}{\rho^2}$$

Nous obtenons (51) du fait que $d\rho/d\theta = 0$ pour $\theta = \theta_*$ et $r_{\odot} = \rho(\theta_*)$ donne $1/\omega_0^2 = B(r_{\odot})/r_{\odot}^2$.

(ii) : Nous effectuons un changement de variable du type Binet en posant $x := r_{\odot}/\rho$; alors, avec $B(\rho) = 1 - r/r_{\bullet}$ il vient, grâce à (51)

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 &= \left(\frac{r_{\odot}}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_{\bullet}}{r_{\odot}}\right) - \left(1 - \frac{r_{\bullet}}{r_{\odot}}x\right)x^2 \\ &= (1-x^2) - \frac{r_{\bullet}}{r_{\odot}}(1-x^3) = \left(1 - \frac{r_{\bullet}}{r_{\odot}} \left(\frac{1-x^3}{1-x^2}\right)\right)(1-x^2) \end{aligned}$$

ce qui donne (52) du fait que $x \mapsto \theta(x)$ est une application décroissante pour $\theta_* \leq \theta \leq 2\theta_*$.

(iii) : Le fait que $x = r_{\odot}/\rho$ varie de 0 à 1 lorsque ρ varie de $-\infty$ à $r_{\odot}$ nous autorise à poser $x = \cos(\xi)$ pour ξ variant de $\pi/2$ à 0, ce qui donne (53).

□

Proposition 9.6. Pour la Relativité Générale, l'angle β de déflexion d'un rayon de lumière rasant la surface solaire est le double de l'angle de déflexion newtonien i.e. $\beta \simeq 2r_{\bullet}/r_{\odot}$.

Preuve. Rappelons que le rayon de Schwarzschild de la masse solaire $M_{\odot}$ est $r_{\bullet} = GM_{\odot}/c^2$: ce rayon est très petit relativement au rayon solaire $r_{\odot}$: grâce aux valeurs mesurées des grandeurs en question, nous savons – voir (12) – que $r_{\bullet}/r_{\odot} \simeq 4,24 \times 10^{-6}$. Il est ainsi possible d'approximer (53) en écrivant (pour $0 \leq \xi \leq \pi/2$) :

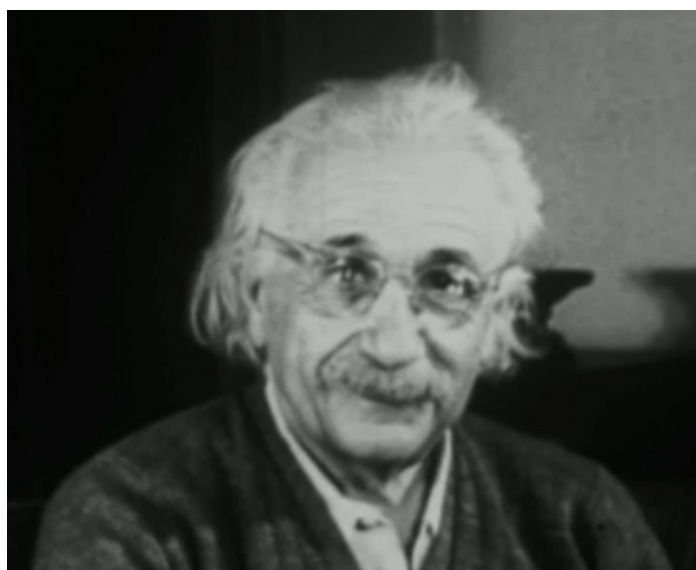
$$d\theta \simeq - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_{\bullet}}{r_{\odot}} \left(\cos(\xi) + \frac{1}{1+\cos(\xi)}\right)\right) d\xi$$

Par suite, en partant de (49) il vient :

$$\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} = \theta_* = \int_0^{\theta_*} d\theta = \int_{\pi/2}^0 \frac{d\theta}{d\xi} d\xi \simeq \left[\xi + \frac{1}{2} \frac{r_{\bullet}}{r_{\odot}} \left(\sin(\xi) + \tan\left(\frac{\xi}{2}\right)\right) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \frac{r_{\bullet}}{r_{\odot}}$$

□

L'application numérique donne $\beta \simeq 1.75''$.



10. Notes

Au début des années 30, l'étude de la structure des étoiles s'est développée parallèlement aux recherches sur la mécanique interne des noyaux atomiques et des réactions de fusion/fission nucléaires. Il faut noter que l'ensemble des travaux portant sur les corps célestes massifs ont une teneur très spéculative du fait qu'ils se trouvent à la frontière entre la mécanique quantique et la relativité générale – deux théories dont l'incompatibilité est un des défis de la physique théorique actuelle. En 1931 (c.f. [Cha31a, Cha31c, Cha31b] et [Cha35]), Subrahmanyan Chandrasekhar, jeune étudiant indien de 20 ans, en route vers Cambridge, aboutit à la conclusion troublante qu'une naine blanche¹⁴ dont la masse excède une certaine masse limite (la masse de Chandrasekhar) doit – selon ses calculs – s'effondrer sous l'effet de la seule gravitation, jusqu'à atteindre une densité infinie. Au même moment (février-mars 1931) à Copenhague, le physicien soviétique Lev Landau évoque, avec Niels Bohr et Léon Rosenfeld, la possible existence d'étoiles dont la matière serait si comprimée que les noyaux atomiques fusionneraient pour ne former plus qu'un seul noyau (énorme !) de densité comparable à celle des noyaux d'atomes. Landau publie ses résultats en 1932 [Lan32], au moment même de la découverte du neutron par James Chadwick : le savant soviétique est en fait sur la piste d'un nouveau type de corps céleste qu'on appellera bientôt les étoiles à neutrons. Oppenheimer n'est pas convaincu par le modèle de Landau et propose à son étudiant George Volkoff d'étudier un modèle d'un astre à symétrie sphérique. L'analyse d'Oppenheimer et Volkoff publiée en 1939 [OV39] donne une estimation de la masse maximale d'un cœur de neutrons stable, celle-ci s'avérant être de l'ordre de la moitié de la masse de Chandrasekhar. De même que dans le scénario de Chandrasekhar, au-delà de la masse critique d'Oppenheimer-Volkoff, une étoile en fin de vie s'effondrerait inéluctablement sur elle-même pour donner un corps

14. Objet céleste très dense issu de l'effondrement d'une étoile d'une masse inférieure à 10 masses solaires.

céleste très dense dont le champ de gravitation s'approcherait de celui décrit dans le modèle de Schwarzschild. La terminologie de *trou noir* pour décrire ces objets singuliers, a été introduite dans les années 60 par John Wheeler. L'histoire de l'astronomie moderne (post Einsteinienne) est magnifiquement racontée par K. Thorne [Tho01] (élève de Wheeler) ; on pourra aussi trouver de belles histoires dans les ouvrages de vulgarisation de haut niveau de J. P. Luminet [Lum87, Lum14], tout comme dans l'analyse décapante que fait J.P. Petit de la cosmologie moderne dans son petit livre [Pet01]. Pour garder la tête froide, mentionnons la critique des dérives de la sciences (particulièrement en cosmologie) faite par C. Magnan dans son livre [Mag05] ; notons au passage que le site-web ¹⁵ de C. Magnan regorge de belles *leçons* de physique, parmi lesquelles la déviation des rayons lumineux et la précession de la périhélie de Mercure en Relativité Générale.

Les *trous noirs* restent des objets théoriques d'ordre spéculatif (Einstein lui même n'était pas convaincu de leur existence). En 1975 [Haw75] Stefen Hawking utilise des effets quantiques pour montrer comment un trou noir pourrait émettre un rayonnement entraînant son *évaporation* : un tel rayonnement – appelé rayonnement de Hawking – serait tellement faible qu'il serait noyé dans le rayonnement fossile du Big-Bang à 3 Kelvin et donc – pour l'heure – indétectable. Beaucoup de progrès théoriques et observationnels ont été réalisés quant à la recherche de preuves d'existence de trous noirs et il existe aujourd'hui des centaines de candidats potentiel. Un des résultats les plus marquants dans cette direction est celui de Reinhard Genzel, Andrea Ghez et collaborateurs [EG96, GMB99, GDM⁺03] : en étudiant les trajectoires d'une série d'étoiles dans le voisinage (proche) du centre de notre galaxie (sur une quinzaine d'années) ils ont prouvé l'existence d'une masse centrale de l'ordre de 3 millions de masses solaire et n'émettant aucun rayonnement, c'est-à-dire d'un trou noir *super-massif*. Pour leur *découverte* du trou noir central de la Voie Lactée Genzel et Ghez ont reçu le prix Crafoord 2012.

RÉFÉRENCES

- [BG68] R.L. Bishop and S.I. Goldberg. *Tensor Analysis on Manifolds*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1968.
- [Bro11] K. Brown. *Reflections on Relativity*. Lulu Enterprises Incorporated, 2011.
- [Car13] S. Carroll. *Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity*. Pearson New International Edition (second edition of the 2003 Addison-Wesley edition), 2013.
- [Cha31a] S. Chandrasekhar. The density of white dwarf stars. *Philosophical Magazine (7th series)*, 11 :592–596, 1931.
- [Cha31b] S. Chandrasekhar. The highly collapsed configurations of a stellar mass. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 91 :456–466, 1931.
- [Cha31c] S. Chandrasekhar. The maximum mass of ideal white dwarfs. *Astrophysical Journal*, 74 :81–82, 1931.
- [Cha35] S. Chandrasekhar. The highly collapsed configurations of a stellar mass (second paper). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 95 :207–225, 1935.
- [EG96] A. Eckart and R. Genzel. Observations of stellar proper motions near the galactic centre. *Nature*, 383 :415 – 417, 1996.
- [Ein16] A. Einstein. Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie (The Foundation of the General Theory of Relativity). *Annalen der Physik*, 49(IV) :769–822, 1916.
- [Eis02] J. Eisensteadt. *Einstein et la relativité générale*. CNRS Édition - Paris, 2002.

15. <http://www.lacosmo.com/>

- [GDM⁺03] A. M. Ghez, G. Duchêne, K. Matthews, S. D. Hornstein, A. Tanner, J. Larkin, M. Morris, E. E. Becklin, S. Salim, T. Kremenek, D. Thompson, B. T. Soifer, G. Neugebauer, and I. McLean. The first measurement of spectral lines in a short-period star bound to the galaxy's central black hole : A paradox of youth. *The Astrophysical Journal Letters*, 586(2) :L127–L131, 2003.
- [GMB99] A. M. Ghez, M. Morris, and E. E. Becklin. High proper motion stars in the vicinity of sgr a* : Evidence for a supermassive black hole at the center of our galaxy. *The Central Parsecs of the Galaxy, ASP Conference Series – Edited by Heino Falcke, Angela Coter, Wolfgang J. Duschl, Fulvio Melia, and Marcia J. Rieke*, 186 :18–22, 1999.
- [Haw75] S. W. Hawking. Particle creation by black holes (erratum *ibid.*, 46, 206 (1976)). *Communications in Mathematical Physics*, 43 :199–220, 1975.
- [Haw03] S. W. Hawking. *Sur les épaules des géants*. Dunod, 2003.
- [Lan32] L. Landau. On the theory of stars. *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, 2 :285–288, 1932.
- [Lum87] J.-P. Luminet. *Les trous noirs*. Pierre Belfond, 1987.
- [Lum14] J.P. Luminet. *L'Invention Du Big Bang*. Collection Points. Série Sciences. Éd. Points, 2014.
- [Mac83] E. Mach. The science of mechanics, Trans. by T. J. McCormack (2nd ed.), Open Course Publishing Co., 1883.
- [Mag05] C. Magnan. *La science pervertie*. Épistémologie et philosophie des sciences. Editions L'Harmattan, 2005.
- [Nak03] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*. Graduate student series in physics. Taylor & Francis, 2003.
- [Oli15a] E. Olivier. 100 ans de Relativité Générale I/III : covariance. *Bull. Inf. App. & App.*, 100 :23–63, 2015.
- [Oli15b] E. Olivier. 100 ans de Relativité Générale II/III : courbure. *Bull. Inf. App. & App.*, 101 :97–123, 2015.
- [OV39] J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff. On massive neutron cores. *Physical Review*, 55 no 4 :374–381, 1939.
- [Pet01] J.P. Petit. *On a perdu la moitié de l'univers*. Collection Pluriel. Hachette Littératures, 2001.
- [Sch16] K. Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld eines massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzber. Deut. Akad. Wiss.*, pages 189–196, 1916.
- [Tho01] K.S. Thorne. *Trous noirs et distorsions du temps : l'héritage sulfureux d'Einstein (traduit de l'anglais par A. Bouquet)*. Nouvelle bibliothèque scientifique. Flammarion, 2001.
- [Ton64] M.A. Tonnelat. *Les vérifications expérimentales de la relativité générale*. Masson et Cie, 1964.
- [VM05] T. Shaposhnikova V. Maz'ya. *Jacques Hadamard : Un mathématicien universel (traduction de l'anglais par G. Tronel)*. EDP Science (Ed. originale de l'Am. Math. Soc. - 1998), 2005.
- [Wei72] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology – Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley, 1972.

11. Postscriptum : Textes choisis

Galileo Galilei – 1632

Dialogue sur les deux grands systèmes du Monde

« Le mouvement est mouvement et agit comme mouvement pour autant qu'il est en rapport avec des choses qui en sont dépourvues ; mais pour toutes les choses qui y participent également, il n'agit pas, il est comme s'il n'était pas. »

Galileo Galilei – 1636

*Discours et démonstrations
concernant deux sciences nouvelles*

« Une vitesse quelconque imprimée à un corps se conserve rigoureusement aussi longtemps que les causes extérieures d'accélération ou de ralentissement sont écartées, condition qui se réalise seulement dans le plan horizontal ; car dans les plans déclives il existe déjà une cause d'accélération, tandis que dans les plans qui montent il existe une cause de ralentissement. D'où il suit que le mouvement sur le plan horizontal est perpétuel. »

René Descartes

Principes philosophiques – 1644

« Chaque chose, en tant qu'elle est simple et indivisible, demeure, pour autant qu'il est en elle, toujours dans le même état, à moins que des causes extérieures ne la changent. Que tout mouvement est par lui-même droit ; et ainsi, ce qui se meut en cercle, tendra toujours à s'éloigner du centre du cercle qu'il décrit. »

René Descartes

Principes philosophiques – 1644

« Dieu de sa toute puissance a créé la matière avec le mouvement et le repos et conserve maintenant en l'Univers, par son concours ordinaire, autant de mouvement et de repos qu'il y en a mis en le créant. »

Blaise Pascal

Pensées

« Je ne puis pardonner à Descartes ; il aurait bien voulu, dans toute sa philosophie, se pouvoir passer de Dieu ; mais il n'a pas pu s'empêcher de lui faire donner une chiquenaude, pour mettre le monde en mouvement ; après cela, il n'a plus que faire de Dieu. »

Johan Kepler

Première loi (1609) – « Les planètes décrivent autour du soleil des orbites elliptiques dont le soleil est un foyer. »

Deuxième loi (1609) – « Quand une planète parcourt son orbite, le rayon Soleil-planète balaie des aires égales en des intervalles de temps égaux. »

Troisième loi (1618) – « Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube de la distance au Soleil. »

Halley et Newton – 1684

Anecdote retranscrite par S. Hawking dans [Haw03]

« Hooke déclara qu'il avait déduit de la loi de Kepler sur les ellipses la preuve que la gravité était une force, mais qu'il ne la dévoilerait à Halley et Wren que lorsqu'il serait prêt à rendre cette information publique. Furieux, Halley se rendit à Cambridge, raconta à Newton les prétentions de Hooke, et proposa la problème suivant : « *Quelle serait la forme de l'orbite d'une planète autour du Soleil, si elle était causée par une force dirigée vers le Soleil, et variant inversement au carré de la distance ?* » La réponse de Newton fût renversante. « *Ce serait une ellipse* » répondit-il immédiatement, et il raconta à Halley qu'il avait résolu le problème quatre ans auparavant, mais qu'il avait égaré la preuve dans son bureau. »

Isaac Newton

Principia Mathematica (1687)

« 1. Tout corps persévère dans son état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme, sauf si des forces imprimées le contraignent d'en changer. »

« 2. Le changement du mouvement est proportionnel à la force exercée sur lui, et orienté dans la direction de la ligne droite sur laquelle cette force s'exerce. »

« 3. À chaque action est toujours opposée une réaction égale ; autrement dit, les actions mutuelles de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales, et orientées en sens contraire. »

Isaac Newton

Principia Mathematica (1687) – Trad. EO

« À cause de l'analogie entre la propagation des rayons de lumière et le mouvement des corps, j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile d'ajouter la proposition suivante pour le traitement de l'optique ; non pas dans le but de considérer la nature de la lumière, ou encore d'essayer de déterminer sa possible composition corpusculaire, mais simplement pour noter que les trajectoires des corps sont très similaires aux trajectoires des rayons lumineux. »

Gottfried Leibnitz

« Un corps n'est jamais mu naturellement que par un autre corps qui le pousse en le touchant. Toute autre opération sur les corps est ou miraculeuse ou imaginaire. »

Pierre Louis de Maupertuis -1744*(Principe de la moindre quantité d'action pour la mécanique)*

« L'Action est proportionnelle au produit de la masse par la vitesse et par l'espace. Maintenant, voici ce principe, si sage, si digne de l'Être suprême : lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'Action employée pour ce changement est toujours la plus petite qu'il soit possible. »

Pierre Simon de Laplace - 1796*(Exposition du système du monde)*

« Il existe donc dans les espaces célestes des corps obscurs aussi considérables, et peut-être en aussi grand nombre que les étoiles. Un astre lumineux de même densité que la Terre, dont le diamètre serait deux cent cinquante fois plus grand que celui du Soleil, ne laisserait en vertu de son attraction parvenir aucun de ses rayons jusqu'à nous ; il est donc possible que les plus grands corps lumineux de l'univers soient par cela même invisibles. »

Ernst Mach - 1883*(extrait de [Mac83] : tiré de [Wei72, p. 16])*

« Newton's experiment with the rotating vessel of water simply informs us, that the relative rotation of water with respect to the sides of the vessel produces no noticeable centrifugal forces, but that such forces are produced by its relative motion with respect to the mass of the Earth and the other celestial bodies. No one is competent to say how the experiment would turn out if the sides of the vessel increased in thickness and mass, until they were several leagues thick. »

Albert Einstein - 1912*(Lettre à Sommerfeld - extrait : tiré de [Eis02])*

« Je travaille maintenant exclusivement sur la gravitation et je pense que je peux surmonter toutes les difficultés avec l'aide d'un de mes amis mathématicien^(*). Mais une chose est certaine : de toute ma vie je n'ai presque jamais travaillé aussi durement et je suis désormais pénétré d'un grand respect pour les mathématiques que j'avais jusqu'alors, dans ma simplicité d'esprit, considéré la partie la plus subtile comme un luxe. Comparé à ce problème, la théorie originale de la relativité est un jeu d'enfant. »
(*) Marcel Grossmann.

Mikio Nakahara*(À propos de l'équation d'Einstein [Nak03] – Trad. EO)*

« Historiquement, quand Einstein proposa la première formulation de la relativité générale, il écrivit d'abord la proportionnalité du tenseur de Ricci et du tenseur énergie-impulsion. Plus tard, il réalisa que la divergence du tenseur énergie-impulsion était nulle, ce qui n'était pas le cas du tenseur de Ricci. »

David Hilbert*(À propos de la contribution d'Albert Einstein en relativité générale – tiré de [Tho01, p. 121])*

« N'importe quel enfant dans les rues de Göttingen en connaît plus qu'Einstein sur la géométrie à quatre dimensions. Malgré tout, c'est Einstein qui fit le travail [Formulation des lois de la gravité en Relativité Générale] et non les mathématiciens. »

Bishop & Goldberg – 1968*(Tiré de [BG68] – Trad. EO)*

« Les prémices de l'analyse tensorielle remontent à Lagrange avec sa présentation générale des systèmes dynamiques, puis à Riemann qui est le premier à considérer la géométrie en dimension quelconque. Le travail de Riemann en 1854, était exprimé dans une forme si obscure, que Beltrami en 1869 et Lipschitz en 1872 n'ont utilisé le langage géométrique qu'avec une grande précaution. En fait, les développements étaient si lents que la notion de parallélisme due à Levi-Civita n'est apparue qu'en 1917. »

Jacques Hadamard - 1922*(Tiré de [VM05])*

« À mon avis il y avait une crise en géométrie infinitésimale et l'avènement de la relativité venait de la surmonter. Ceci était le début d'un éclairage inattendu sur les précédents travaux en géométrie montrant l'importance du calcul différentiel absolue de Ricci et de Levi-Civita, ce calcul étant resté presque sans éveiller d'intérêt depuis sa création. Quelle que soit l'opinion qu'on puisse avoir sur le bien fondé des nouvelles hypothèses, elles donnent à la géométrie un rôle nouveau et lui ouvre une période nouvelle, non une brève nouveauté qui trop souvent influence le mathématicien rivié à ses propres préoccupations, mais une nouveauté infiniment féconde qui jaillit sur la nature des choses. »

Albert Einstein - 1919*(Conceptions scientifiques : trad. M. Solovine)*

« Le théorie évite tous les défauts internes que nous avons reprochés au fondements de la mécanique classique. Elle est suffisante, autant que nous sachions, pour la représentation des faits observés de la mécanique céleste. Mais elle ressemble à un édifice dont une aile est bâtie de marbre fin (premier membre de l'équation) et l'autre de bois de qualité inférieure (second membre de l'équation). »

Arthur Eddington - 1919*(Cité par Chandrasekhar : tiré de [Eis02])*

« Il pourrait n'y avoir aucune déflexion, ce qui signifierait que la lumière n'est aucunement sujette à la gravitation. Ou une *demi-déflexion*, ce qui signifierait que la lumière est sujette à la gravitation, ainsi que

Newton l'a suggéré et qu'elle suit la simple loi newtonienne. Ou, il pourrait y avoir une pleine déflexion, confirmant la loi d'Einstein au lieu de celle de Newton. »

Albert Einstein - 1921

(Article dans *Nature* - extrait : tiré de [Eis02])

« Les champs électriques et gravitationnels ont-ils des caractéristiques réellement si différentes qu'il n'y ait aucune unité formelle à laquelle il puissent être réduits ? Les champs gravitationnels jouent-ils un rôle dans la constitution de la matière et, à l'intérieur du noyau atomique, le continuum doit-il être de façon appréciable considéré comme non euclidien ? »

Albert Einstein - 1939

(À propos de la solution de Schwarzschild tiré de [Tho01, p. 123])

« Le principal résultat de cette étude [écrivait Einstein dans un article technique de 1939] est une compréhension claire de la raison pour laquelle les "singularités de Schwarzschild" n'existent pas dans la réalité physique. »

Albert Einstein

(*Conceptions scientifiques* : trad. M. Solovine)

« La conception esquissée plus haut [modification de la solution de Schwarzschild] correspond à priori, à la structure atomique de la matière, parce que le « pont^(*) » est par sa nature un élément discret. Nous voyons de plus que la constante m de la masse de la particule neutre doit nécessairement être positive, puisque aucune solution sans singularité ne peut correspondre à la solution de Schwarzschild pour une valeur négative de m . Seul l'examen du problème à plusieurs ponts peut montrer si, oui ou non, cette méthode théorique fournit une explication de l'égalité, empiriquement démontrée, des masses de particules qu'on trouve dans la nature, et si elle rend compte des faits que la mécanique quantique a si merveilleusement saisis.

[...] Elle [la théorie des ponts] constitue néanmoins – c'est un fait certain – la première tentative d'élaborer d'une manière cohérente une théorie du champ qui offre une possibilité pour expliquer les propriétés de la matière. En faveur de cette tentative, il faut aussi ajouter qu'elle est basée sur les équations du champ relativistes les plus simples connues aujourd'hui. »

(*) dit aussi *Pont d'Einstein-Rosen* ou encore appelé *trou de ver* (J. Wheeler).

Subrahmanyan Chandrasekhar

(Extrait de la conférence Nobel - 1983)

« A black hole partitions the three-dimensional space into two regions : an inner region which is bounded by a smooth two-dimensional surface called the event horizon ; and an outer region, external to the

event horizon, which is asymptotically flat ; and it is required (as a part of the definition) that no point in the inner region can communicate with any point of the outer region. This incommunicability is guaranteed by the impossibility of any light signal, originating in the inner region, crossing the event horizon. The requirement of asymptotic flatness of the outer region is equivalent to the requirement that the black hole is isolated in space and that far from the event horizon the space-time approaches the customary space-time of terrestrial physics.(...)

Black holes are macroscopic objects with masses varying from a few solar masses to millions of solar masses. To the extent they may be considered as stationary and isolated, to that extent, they are all, every single one of them, described exactly by the Kerr solution. This is the only instance we have of an exact description of a macroscopic object. Macroscopic objects, as we see them all around us, are governed by a variety of forces, derived from a variety of approximations to a variety of physical theories. In contrast, the only elements in the construction of black holes are our basic concepts of space and time. They are, thus, almost by definition, the most perfect macroscopic objects there are in the universe. And since the general theory of relativity provides a single unique two-parameter family of solutions for their descriptions, they are the simplest objects as well. »

Steven Weinberg - 1971

(Extrait de la préface de [Wei72])

« In learning general relativity, and then teaching it to classes at Berkeley and M.I.T., I became dissatisfied with what seemed to be the usual approach to the subject. I found that in most textbooks geometric ideas were given a starring role, so that a student who asked why the gravitational field is represented a metric tensor or why freely falling particles move on geodesics, or why the field equations are generally covariant, would come away with an impression that this had some thing to do with the fact that space-time is Riemannian manifold.

Of course, this *was* Einstein's point of view, and his preeminent genius necessarily shapes our understanding of the theory he created. However, I believe that the geometrical approach has driven a wedge between general relativity and the theory of elementary particles. As long long as it could be hopped, as Einstein did hope, that matter would eventually be understood in geometrical terms, it made sense to give a Riemannian geometry a primary role in describing the theory of gravitation. But the passage of time has taught us not to expect that the strong, weak, and electromagnetic interactions can be understood in geometrical terms, and to great emphasis on geometry can only obscure the deep connection between gravitation and the rest of physics. »

Carlo Rovelli

(Le Monde : Hors série juillet 2010)

« Aujourd’hui nous appelons photons les quanta de lumière introduits par Einstein en 1905. Ils forment la base conceptuelle de la mécanique quantique, la

théorie qui décrit le mieux, actuellement, la dynamique de la matière et de la lumière. La relativité générale trouve ses limites à chaque fois que les phénomènes quantiques deviennent assez importants pour interférer avec la courbure de l’espace : le centre d’un trou noir et le Big Bang sont deux exemples de ces situations. »