(2016) B.I.A.A. no **104** BULLETIN D'INFORMATIQUE APPROFONDIE ET APPLICATIONS
ISSN 0291-5413 (Université d'Aix-Marseille)

Le nombre d'or, π et la pyramide de Khéops : une analyse arithmétique

Christian FAIVRE[1 2]

Résumé. – Le nombre d'or et π sont présents partout dans la grande pyramide de Khéops ainsi que dans la coudée (l'unité de mesure des anciens Egyptiens). En effet, de nombreuses proportions (issues de mesures de la grande pyramide) donnent des valeurs très proches de π ou bien du nombre d'or. Le but de cet article sera d'expliquer ces diverses relations.

1. Deux approximations de π

Nous allons débuter cette étude par deux approximations de π (dont l'une au moins est très connue) qui permettront de mettre en évidence la méthodologie générale qui sera explicitée par la suite.

Tout le monde connait la célèbre approximation $\frac{355}{113}$ de π d'Adrien Métius. C'est une fraction simple mais remarquablement proche de π. En fait les six premières décimales de $\frac{355}{113}$ sont exactement les mêmes que celles de π. En effet

$$\frac{355}{113} = 3.14159292\cdots$$

alors que

$$\pi = 3.14159265\cdots$$

Donnons un autre exemple (toujours une approximation de π) due au génial mathématicien Indien S. Ramanujan mort prématurément à l'âge de 33 ans. L'approximation de Ramanujan de π est

$$\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}$$

Cette approximation est encore meilleure que celle d'Adrien Métius car cette fois les huit premières décimales sont les mêmes que celles de π :

$$\sqrt[4]{\frac{2143}{22}} = 3.1415926525\cdots$$

alors que

$$\pi = 3.1415926535\cdots \tag{1}$$

Il est naturel (à la lumière de ces deux exemples) de se demander comment on peut trouver de telles approximations. Est-ce simplement en cherchant plus ou moins au hasard ou bien y-a-t-il un moyen plus systématique d'y parvenir ? Cela pourrait être envisageable pour l'approximation d'Adrien Métius mais semble difficilement crédible pour celle de Ramanujan (comment penser à une approximation faisant intervenir la racine quatrième d'une fraction). C'est ce que nous allons voir dans la section suivante.

1. Université d'Aix-Marseille
2. christian.faivre@univ-amu.fr

2. Le développement en fraction continue

En fait il existe un outil pour trouver de telles approximations : c'est le développement en fraction continue. Celui-ci est l'outil de base pour trouver les meilleures fractions qui approchent un nombre donné. Le début du développement en fraction continue de π est (voir l'annexe A pour une introduction aux fractions continues) :

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, \ldots]$$

On constate que le quatrième quotient partiel est un nombre assez élevé (292), en fait un nombre inhabituellement grand pour un quatrième quotient partiel. Donc la fraction $[3, 7, 15, 1]$ va être une bonne approximation de π. Calculons donc cette fraction. On a

$$[3, 7, 15, 1] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}}$$

Donc

$$\begin{aligned} [3, 7, 15, 1] &= 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16}} \\ &= 3 + \frac{16}{7 \times 16 + 1} \\ &= 3 + \frac{16}{113} \\ &= \frac{339 + 16}{113} \\ &= \frac{355}{113} \end{aligned}$$

c'est-à-dire précisément l'approximation d'Adrien Métius. Il est intéressant de regarder les autres fractions que l'on déduit du début du développement en fraction continue de π, c'est-à-dire

$$[3, 7], \qquad [3, 7, 15], \qquad [3, 7, 15, 1, 292]$$

On a

$$[3, 7] = 3 + \frac{1}{7}, \qquad [3, 7, 15] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}}$$

et

$$[3, 7, 15, 1, 292] = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}}$$

Après calcul, on trouve

$$[3,7] = \frac{22}{7}, \qquad [3,7,15] = \frac{333}{106}, \qquad [3,7,15,1,292] = \frac{103993}{33102}$$

(voir l'annexe A4 pour une méthode de calcul plus rapide de ces fractions). La fraction $\frac{22}{7}$ est une fraction classique très simple proche de π (cela peut se deviner à cause du quotient partiel 15 modérément grand) puisque

$$\frac{22}{7} = 3.1428\cdots$$

Quant à $\frac{333}{106}$, c'est une fraction du même ordre de complexité que $\frac{355}{113}$ mais moins bonne que celle d'Adrien Métius puisque

$$\frac{333}{106} = 3.141509\cdots$$

(quatre décimales exactes au lieu de six avec A. Métius). Quant à la fraction $\frac{103993}{33102}$, c'est une approximation meilleure que celle d'Adrien Métius puisque

$$\frac{103993}{33102} = 3.1415926530\cdots$$

(neuf décimales exactes avec π, voir (1)) mais c'est une fraction nettement plus complexe. Ainsi, on peut dire que l'approximation d'Adrien Métius réalise le meilleur compromis approximation-complexité.

Après avoir constaté la présence d'un grand quotient partiel dans le début du développement de π, il est assez naturel de se demander si le même phénomène se produit dans les puissances de π. En ce qui concerne l'approximation de Ramanujan, il faut regarder le développement en fraction continue de π^4. On a

$$\pi^4 = [97,2,2,3,1,16539,1,\ldots]$$

Là encore, on remarque un très grand quotient partiel (16539) parmi les tous premiers quotients partiels (c'est le cinquième quotient partiel) et donc la fraction $[97,2,2,3,1]$ sera une excellente approximation de π^4 i.e.

$$\pi^4 \simeq [97,2,2,3,1]$$

Mais

$$[97,2,2,3,1] = \frac{2143}{22}$$

après un calcul élémentaire comme plus haut, d'où l'approximation

$$\pi^4 \simeq \frac{2143}{22}$$

et donc

$$\pi \simeq \sqrt[4]{\frac{2143}{22}}$$

Il est à noter qu'un phénomène aussi net de grand quotient partiel (parmi les tous premiers quotients partiels) ne donne un résultat vraiment intéressant que pour π et π^4 (et dans une moindre mesure pour π^3) au moins si l'on examine les dix premières puissances de π comme le montrent les développements en fraction continue :

$$\begin{aligned}
\pi &= [3, 7, 15, 1, 292, \ldots] \\
\pi^2 &= [9, 1, 6, 1, 2, 47, 1, \ldots] \\
\pi^3 &= [31, 159, 3, 7, \ldots] \\
\pi^4 &= [97, 2, 2, 3, 1, 16539, 1, \ldots] \\
\pi^5 &= [306, 50, 1, 4, 60, 1, \ldots] \\
\pi^6 &= [961, 2, 1, 1, 3, \ldots] \\
\pi^7 &= [3020, 3, 2, 2, 3, 2, \ldots] \\
\pi^8 &= [9488, 1, 1, 7, 1, 1, \ldots] \\
\pi^9 &= [29809, 10, 14, 1, 9, \ldots] \\
\pi^{10} &= [93648, 21, 15, 1, 4, 2, \ldots]
\end{aligned}$$

Le développement de π^3 montre donc que 31 est une bonne approximation de π^3. En fait

$$\pi^3 = 31,0063\cdots$$

Il est très raisonnable d'imaginer que le grand quotient partiel 292 dans le développement en fraction continue de π a dû inciter Ramanujan à regarder si un phénomène analogue avait lieu dans les puissances de π. La mise en évidence claire de ce phénomène dans π^4 l'a donc conduit à proposer l'approximation de π, soit

$$\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}$$

3. A la recherche de relations simples entre π et le nombre d'or

Rappelons que le nombre d'or (noté ici G) est égal à :

$$G = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

On va essayer ici de mettre en évidence des relations entre π et G en utilisant la même méthodologie, c'est-à-dire des développements en fraction continue et la présence de grands quotients partiels dans le début du développement.

3.1. **Relation entre π et G^2.** La première relation sera une relation entre π et G^2. Si on regarde le développement en fraction continue de π/G^2, on a

$$\frac{\pi}{G^2} = [1, 5, 2175, 2, 8, 60, \ldots]$$

On voit un grand quotient partiel (2175), donc la fraction $[1, 5]$ sera une bonne approximation de π/G^2 :

$$\frac{\pi}{G^2} \simeq [1, 5]$$

Mais

$$[1, 5] = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

donc on en déduit

$$\pi \simeq \frac{6}{5} G^2$$

A titre de vérification, comparons les développements décimaux de π et $\frac{6}{5}G^2$:

$$\pi = 3.14159\cdots \simeq 3.1416$$

alors que

$$\frac{6}{5}G^2 = 3.14164\cdots$$

3.2. **Relation entre $\sqrt{G}$ et π.** Essayons maintenant de trouver une relation entre π et $\sqrt{G}$. Si on regarde le développement en fraction continue de $\pi\sqrt{G}$ on a

$$\pi\sqrt{G} = [3, 1, 259, 1, 13, \ldots]$$

La présence du grand quotient partiel 259 implique donc que

$$\pi\sqrt{G} \simeq [3, 1]$$

Comme

$$[3, 1] = 3 + \frac{1}{1} = 4$$

on a donc

$$\pi\sqrt{G} \simeq 4$$

d'où

$$\sqrt{G} \simeq \frac{4}{\pi}$$

A titre de vérification, comparons ici aussi les développements décimaux de $\sqrt{G}$ et $\frac{4}{\pi}$.

$$\sqrt{G} = 1.2720\cdots \simeq 1.272$$

alors que

$$\frac{4}{\pi} = 1.2732\cdots \simeq 1.273$$

3.3. **Autres relations en entre π et G.** Nous avons également cherché s'il existait d'autres relations du type

$$\pi \simeq \frac{p}{q}G^\alpha$$

où $\frac{p}{q}$ est une fraction simple. Remarquons que les deux approximations obtenues précédemment, c'est-à-dire

$$\pi \simeq \frac{6}{5}G^2 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{G} \simeq \frac{4}{\pi}$$

correspondent respectivement à $\alpha = 2$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$ puisque

$$\sqrt{G} \simeq \frac{4}{\pi}$$

est équivalente à

$$\pi \simeq \frac{4}{\sqrt{G}} = 4\,G^{-1/2}$$

Nous avons étudié cela pour toutes les valeurs α suivantes

$$-3 \quad -2 \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad 2 \quad 3$$

Comme plus haut nous avons utilisé le développement en fraction continue de π/G^α.

En conclusion cela n'a rien donné, sauf pour les valeurs déjà citées plus haut, c'est-à-dire $\alpha = 2$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$. Par exemple pour $\alpha = 3$ on obtient

$$\frac{\pi}{G^\alpha} = [0, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 1, 8, \ldots]$$

4. Quelques applications

4.1. π, G et la valeur de la coudée. L'unité de mesure des anciens Egyptiens est la coudée qui vaut approximativement 52 cm. Il existe d'ailleurs une règle en bois d'une longueur d'une coudée exposée au musée du Louvre à Paris (figure 1). Cette règle date du pharaon Toutankhamon (qui a régné entre 1336–1327 av. JC, 18e dynastie) et a appartenu à Mâya son ministre des finances. Cette règle a une longueur indiquée de 52.3 cm. Il est à

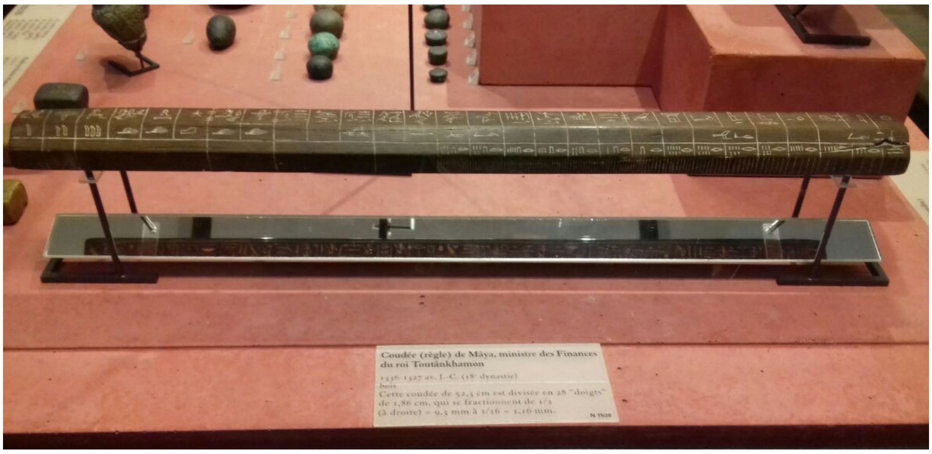

FIGURE 1. Une coudée égyptienne (Musée du Louvre).

noter que la valeur de la coudée a légèrement varié au cours de l'histoire. Essayons de déterminer la valeur qu'elle avait lors de la construction de la pyramide de Khéops.

Tous les auteurs s'accordent sur les dimensions idéales de la pyramide : 280 coudées pour la hauteur et 440 coudées pour le côté de sa base. Les mesures réelles des quatre cotés de sa base faites par le Survey Department of Egypt donne les valeurs suivantes (en mètres)

$$230.391 \quad 230.357 \quad 230.253 \quad 230.454$$

La meilleure estimation de la valeur théorique du coté est alors de prendre la moyenne de ces quatre valeurs, ce qui donne 230.3637. Si on divise cette valeur par 440, on obtient une approximation précise de la valeur de la coudée égyptienne et cela donne 0.5236 en fait plus précisément

$$0.5235539\cdots$$

Ainsi 52.36 cm semble être une estimation très précise de la coudée de la pyramide de Khéops. Certains auteurs (comme par exemple J.P Lauer) optent pour la valeur 52.36 cm pour la coudée alors que d'autres (comme par exemple J. Dorner) ont proposé 52.35 cm. C'est d'ailleurs la valeur utilisée par l'architecte G. Dormion ([Dor04] p.48) dans son livre sur la pyramide de Khéops.

La coudée n'est pas une unité propre aux anciens Egyptiens mais se retrouve aussi chez les bâtisseurs de cathédrales. On emploie aussi l'empan et le pied ainsi que la palme et la paume (voir figure 2). Toutes ces mesures sont censées être dans les proportions du nombre d'or, c'est-à-dire que le pied est égal au produit de G par l'empan, et la coudée est égale au produit de G par le pied i.e.

$$\text{pied} = G \times \text{empan}, \quad \text{coudée} = G \times \text{pied}$$

Ainsi

$$\text{coudée} = G^2 \times \text{empan}$$

Or la valeur standard de l'empan est de 20 cm. Avec cette valeur cela donne pour la coudée (en centimètres)

$$20G^2 = 52.3606\cdots$$

c'est-à-dire 52.36 cm avec une très bonne précision. Il semblerait donc évident que la coudée égyptienne est reliée au nombre d'or. Mais d'une manière étonnante cette coudée est aussi reliée à π car

$$\frac{\pi}{6} \simeq 0.5236$$

En effet

$$\frac{\pi}{6} = 0.5235987\cdots$$

donc une coudée vaut approximativement $\pi/6$ mètres. Mais ceci peut s'expliquer par la relation

$$\pi \simeq \frac{6}{5}G^2$$

que l'on a déjà vue. En effet, on a alors

$$\frac{\pi}{6} \simeq \frac{G^2}{5}$$

d'où

$$\frac{\pi}{6} \simeq \frac{20\,G^2}{100}$$

comme $20\,G^2$ est approximativement la valeur de la coudée (en centimètres), on a donc que $\frac{\pi}{6}$ est approximativement la valeur de la coudée en mètres.

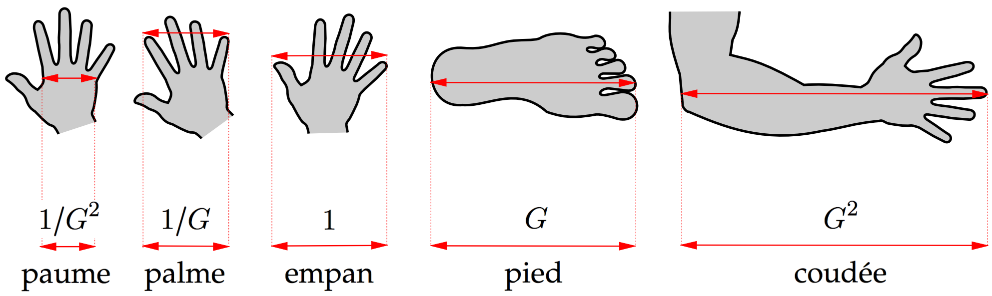

FIGURE 2. Les unités basées sur le corps humain

4.2. **Une autre relation célèbre.** Il existe aussi une autre relation étonnante reliant π, le nombre d'or et la coudée, c'est

$$\pi - G^2 \simeq \text{la coudée en mètres}$$

En effet

$$\pi - G^2 = 0.523558\cdots$$

Mais cette relation peut encore se déduire facilement de

$$\pi \simeq \frac{6}{5} G^2.$$

En effet, on en déduit alors

$$\begin{aligned} \pi - G^2 &\simeq \frac{6}{5} G^2 - G^2 \\ &\simeq \frac{1}{5} G^2 \end{aligned}$$

Mais comme on l'a déjà vu plus haut $\frac{1}{5} G^2$ est une approximation de la valeur de la coudée en mètres :

$$\frac{1}{5} G^2 = \frac{20\, G^2}{100}$$

Ainsi

$$\pi - G^2 \simeq \text{la coudée en mètres}$$

4.3. **La pente de la pyramide de Khéops.** Comme on l'a déjà dit, la plupart des auteurs s'accordent sur les dimensions initiales de la pyramide : la base est un carré de 440 coudées de côté et la hauteur est égale à 280 coudées. Tout au moins ce sont très vraisemblablement ces dimensions que les anciens Egyptiens avaient en tête lorsqu'ils ont bâti cette pyramide (notons cependant qu'il n'existe aucun document mentionnant les dimensions initiales de la pyramide de Khéops). Ce qui donne une pente (pour les faces) égale à

$$\frac{280}{220}$$

c'est-à-dire après simplification

$$\frac{14}{11}$$

Si la pyramide est construite suivant le nombre d'or, sa pente devrait être égale à $\sqrt{G}$ car ce serait la pente dans le triangle rectangle de côtés 1, $\sqrt{G}$ et d'hypoténuse G (voir figure 3). Nous rappelons que le nombre d'or vérifie la relation

$$G^2 = G + 1$$

et que c'est cette relation qui montre que le triangle de côtés 1, $\sqrt{G}$ et d'hypoténuse G est bien rectangle (la pente est ici le rapport entre le côté opposé et le côté adjacent). Or il se trouve que la fraction $14/11$ est assez proche de $\sqrt{G}$ puisque

$$\frac{14}{11} \simeq 1.2727\cdots, \qquad \sqrt{G} \simeq 1.2720\cdots$$

En fait ce n'est pas une coincidence et le lien entre $14/11$ et $\sqrt{G}$ est encore plus évident si on regarde le développement en fraction continue de $\sqrt{G}$. On a alors

$$\sqrt{G} = [1, 3, 1, 2, 11, 3, 5, 1, \ldots]$$

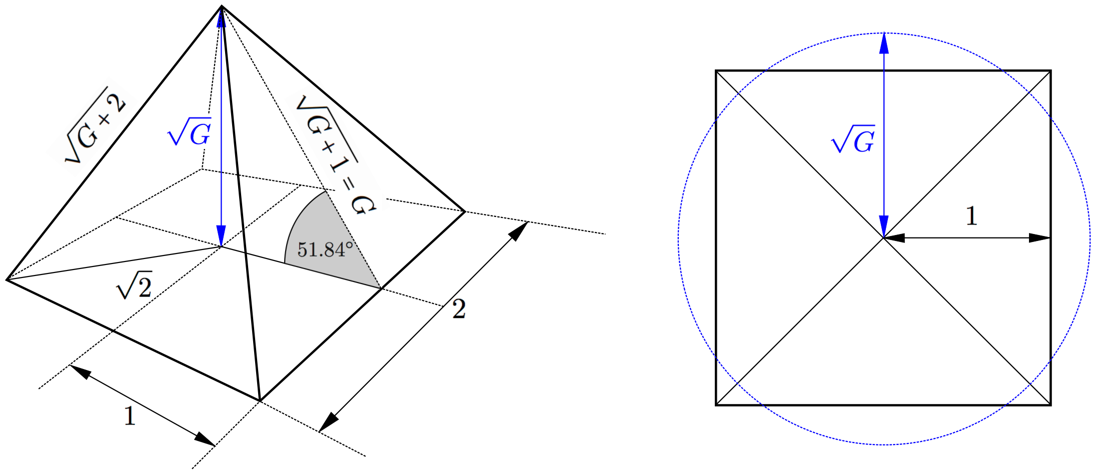

FIGURE 3. Proportions suivant le nombre d'or

Les premières fractions déduites de ce développement sont

$$[1,3] = \frac{4}{3}, \qquad [1,3,1] = \frac{5}{4}, \qquad [1,3,1,2] = \frac{14}{11}$$

On voit donc que $14/11$ est la troisième réduite du développement en fraction continue de $\sqrt{G}$. La réduite suivante approche mieux mais la fraction est moins simple :

$$[1,3,1,2,11] = \frac{159}{125}$$

Notons que $4/3$ est la pente utilisée dans la pyramide de Khéphren et que $5/4$ est celle de la pyramide de Mykérinos.

4.4. **La pyramide du Louvre.** Voici la méthode utilisée par Pei (l'architecte de la pyramide du Louvre) pour déterminer la hauteur de sa pyramide. Si la base de la pyramide est un carré de côté a alors on considère le cercle ayant même périmètre que le carré (voir figure 3). Le rayon de ce cercle est la valeur qu'il faut prendre pour la hauteur de la pyramide. Dans son livre [Goy90, p. 88], l'égyptologue G. Goyon donne cet argument faussement attribué à Hérodote. En fait c'est simplement un argument géométrique pour faire apparaitre une pente égale à $\frac{4}{\pi}$. En effet, essayons de traduire cela mathématiquement. Si R désigne le rayon de ce cercle, alors on a

$$4a = 2\pi R$$

soit

$$R = \frac{2a}{\pi}$$

La valeur de la pente est alors égale à :

$$\frac{R}{a/2} = \frac{2a/\pi}{a/2} = \frac{4}{\pi}$$

Comme on l'a vu $\frac{4}{\pi}$ est proche de $\sqrt{G}$ donc on obtient quasiment la même pente (et donc la même hauteur) par cette méthode qu'avec celle basée sur le triangle d'or.

4.5. **Autres remarques.** Si une pyramide à base carré est construite suivant un triangle d'or, alors on en déduit de nombreuses égalités faisant intervenir π ou G. Cela n'a rien de surprenant et découle du choix du triangle d'or et/ou des relations entre π et G vues plus haut. On se contentera d'en citer deux.

a) L'aire formée par les quatre faces de la pyramide divisée par l'aire de la base est égale à G. En effet, comme on le constate facilement si on prend comme unité la demi-base, alors la hauteur du triangle formée par une face est égale à G (voir figure 3) ; donc l'aire de la face est

$$\frac{2 \times G}{2} = G$$

(rappelons que l'aire d'un triangle est égale à la base multipliée par la hauteur et divisé par 2). Donc pour les quatre faces, on obtient une aire totale égale à $4G$. Par ailleurs l'aire de la base est égale à $2 \times 2 = 4$, d'où l'on obtient

$$\frac{4 \times G}{4} = G$$

b) Le demi-périmètre de la base divisé par la hauteur de la pyramide vaut (approximativement) π. En effet, la hauteur est égale à $\sqrt{G}$ (voir figure 3), le demi-périmètre vaut 4, d'où l'on obtient

$$\frac{4}{\sqrt{G}}$$

Mais comme $\sqrt{G} \simeq \frac{4}{\pi}$ on a

$$\frac{4}{\sqrt{G}} \simeq \frac{4}{\frac{4}{\pi}} = \pi$$

Pour la pyramide de Khéops, les relations décrites dans a) et b) sont vérifiées approximativement : tout cela découle du choix de la pente de $14/11$ (qui est proche de $\sqrt{G}$) et qui fait que cette pyramide est approximativement construite suivant un triangle d'or.

5. **Conclusion**

Dans ce qui précède, nous avons vu les approximations :

$$\pi \simeq \frac{6}{5}G^2 \qquad \sqrt{G} \simeq \frac{4}{\pi} \tag{2}$$

Ces approximations sont des particularités arithmétiques entre π et le nombre d'or (et l'on a vu comment on pouvait les obtenir naturellement avec le développement en fraction continue) et elles n'ont rien à voir avec la pyramide de Khéops.

En revanche on retrouve G dans ce monument : la valeur de la coudée, ses dimensions, notamment sa pente égale à 14/11 qui est une approximation de $\sqrt{G}$ (la pente du triangle d'or). Ceci n'est pas vraiment étonnant car on retrouve le nombre d'or dans de nombreuses constructions de l'Antiquité (ainsi que dans les cathédrales) et ces constructions nous paraissent harmonieuses.

Une question récurrente est de savoir si les Egyptiens de l'Ancien Empire connaissaient le nombre d'or. Pour ma part j'en suis convaincu. On pourrait penser que la présence du nombre d'or dans la pyramide de Khéops n'est qu'une coïncidence : les Egyptiens auraient choisi la pente 14/11 parce ce qu'elle conduisait à un monument harmonieux et qu'il s'agissait d'une fraction simple. Or la fraction 14/11 n'est pas seulement une approximation de $\sqrt{G}$ mais elle apparaît dans le développement de $\sqrt{G}$ en fraction continue (elle fait partie en quelque sorte de l'ADN de $\sqrt{G}$). Par ailleurs, les Egyptiens de cette époque ne connaissaient peut-être pas le nombre π mais on le retrouve souvent dans la pyramide de Khéops du fait de la présence de G et des approximations (2) citées plus haut. On peut résumer cela simplement en disant

« Quand il y a G, il y a π et réciproquement »

D'autre part, il existe peu de traces sur les connaissances mathématiques des Egyptiens de cette époque et cela nous amène à rester prudent. Cependant quelques problèmes issus du papyrus Rhind peuvent laisser perplexe. Citons en particulier le problème 56 (voir par exemple [Goy90] p. 96) où l'on demande le résultat de la division de 180 par 250. Le résultat est donné (sans démonstration) sous la forme

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$$

C'est ce que l'on appelle maintenant la décomposition égyptienne de la fraction $\frac{180}{250}$:

$$\frac{180}{250}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$$

C'est exactement ce que l'on obtient en utilisant l'algorithme classique pour obtenir ce type de décomposition. Il semblerait donc que les Egyptiens connaissaient cet algorithme bien qu'ils n'aient aucun symbole (selon la thèse officielle) pour représenter les fractions générales de la forme p/q, mais seulement les fractions du type $1/q$.

Annexe A : introduction aux fractions continues

Cette annexe donne une introduction (sans démonstration) à la théorie des fractions continues pour permettre au lecteur non familier avec cette théorie de lire ce qui précède. Une fraction continue est une expression de la forme

$$a+\frac{1}{b}$$

ou bien de la forme

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}}$$

ou bien de la forme

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}}$$

et ainsi de suite... Ici a,b,c,d sont tous des nombres entiers ≥ 1 sauf éventuellement le premier a pour lequel on exige $a\in\mathbb{Z}$. Comme ces expressions sont trop encombrantes, on emploie usuellement la notation suivante

$$[a,b]=a+\frac{1}{b}$$

$$[a, b, c] = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$$

$$[a, b, c, d] = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}$$

et ainsi de suite... Dans une fraction continue, comme par exemple $[a, b, c, d]$, les nombres a, b, c, d sont appelés les *quotients partiels* pour une raison que l'on expliquera par la suite.

A1 : développement des nombres rationnels. Tout d'abord toute fraction de nombres entiers (i.e. un nombre rationnel) peut s'écrire sous la forme d'une fraction continue, c'est-à-dire que si $\frac{p}{q}$ est une fraction en nombre entiers, alors il existe $m \geq 0$, $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_1, \ldots, a_m \geq 1$ entiers tels que

$$\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \ldots, a_m]$$

Par exemple si l'on considère la fraction $\frac{10}{17}$, alors on a

$$\frac{10}{17} = [0, 1, 1, 2, 3]$$

Pour trouver le développement en fraction continue d'une fraction on emploie l'algorithme d'Euclide qui permet de trouver les quotients partiels par une succession de divisions en nombres entiers (encore appelées divisions euclidiennes). Exposons-la sur un exemple (le cas général est identique).

Soit à décomposer par exemple $\frac{39}{14}$ en fraction continue. On effectue tout d'abord la division euclidienne de 39 par 14. Si on pose cette division le quotient est 2 et le reste 11 donc

$$39 = 14 \times 2 + 11$$

Ensuite on divise le diviseur de cette division (c'est-à-dire 14) par le reste (c'est-à-dire 11). On obtient un quotient de 1 et le reste est 3 donc

$$14 = 11 \times 1 + 3$$

Ensuite on recommence avec en faisant à chaque fois la division du diviseur par le reste de la division précédente et on continue jusqu'à obtenir un reste égal à 0. Ici cela continue par la division de 11 par 3, on obtient $11 = 3 \times 3 + 2$, puis la division de 3 par 2 donc $3 = 2 \times 1 + 1$ et enfin on divise 2 par 1 ce qui donne un quotient égal à 2 et un reste nul i.e. $2 = 1 \times 2 + 0$. En résumé, on a

$$\begin{array}{rcl} 39 & = & 14 \times 2 + 11 \\ 14 & = & 11 \times 1 + 3 \\ 11 & = & 3 \times 3 + 2 \\ 3 & = & 2 \times 1 + 1 \\ 2 & = & 1 \times 2 + 0 \end{array}$$

On en déduit comme on va le voir qu'alors

$$\frac{39}{14} = [2, 1, 3, 1, 2]$$

i.e. les quotient partiels sont les quotients des divisions successives, ce qui justifie la dénomination de quotients partiels. En effet, on déduit des égalités plus haut (en divisant à chaque fois par le diviseur) que :

$$\begin{aligned}
\frac{39}{14} &= 2 + \frac{11}{14} \\
\frac{14}{11} &= 1 + \frac{3}{11} \\
\frac{11}{3} &= 3 + \frac{2}{3} \\
\frac{3}{2} &= 1 + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Alors de proche en proche :

$$\begin{aligned}
\frac{39}{14} &= 2 + \frac{11}{14} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{3}{11}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2}{3}}} \\
&= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{39}{14} = [2, 1, 3, 1, 2]$$

A2 : développement des nombres irrationnels. Si x est un nombre irrationnel, c'est-à-dire un nombre qui ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction d'entiers (il est connu par exemple que π, e (la base des logarithmes népériens) ou encore le nombre d'or G sont des nombres irrationnels), alors on peut le représenter de manière *unique* sous la forme d'une fraction continue *infinie*, c'est-à-dire qu'il existe une unique suite de nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots$ (avec toujours $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_k \geq 1$ entier pour tout $k \geq 1$) telle que

$$x = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$$

où $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ a ici la signification suivante :

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots] = \lim_{n \to \infty} [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$$

Dans une telle représentation a_0 est forcément la partie entière de x.

Le développement le plus simple est celui du nombre d'or qui est donné par

$$G = [1, 1, 1, \dots]$$

c'est-à-dire que le développement en fraction continue de G est constitué uniquement de 1. On peut le trouver par exemple à l'aide du raisonnement suivant : comme $G^2 = G+1$, on a après division par G :

$$G = 1 + \frac{1}{G}$$

Or écrivons le développement en fraction continue de G i.e. $G = [a_0, a_1, a_2, \dots]$. On a alors en remplaçant

$$[a_0, a_1, a_2, \dots] = 1 + \frac{1}{[a_0, a_1, a_2, \dots]} = [1, a_0, a_1, a_2, \dots]$$

Par unicité du développement en fraction continue, on en déduit

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_0, \quad a_2 = a_1, \quad \dots$$

donc $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1, \dots$ c'est-à-dire

$$G = [1, 1, 1, \dots]$$

Un autre développement connu (mais plus difficile à démontrer) est celui du nombre e (la base des logarithmes népériens) et qui est donné explicitement par

$$e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, \dots]$$

faisant apparaitre les blocs $(1, 2, 1)$, $(1, 4, 1)$, $(1, 6, 1)$ etc... à partir du rang 1. En revanche le développement en fraction continue de π n'est pas connu dans son ensemble (au sens où l'on ne connait pas actuellement de "formule" qui permettrait de décrire l'ensemble des quotients partiels comme c'est le cas pour e ou bien G par exemple). En règle générale on se contente de calculer un certain nombre de quotients partiels et pour cela on passe par le développement décimal de x. Plus précisément à partir d'un certain nombre de décimales de x on va pouvoir obtenir un certain nombre de quotient partiels. La méthode sera expliquée à l'annexe A6.

A3 : grands quotients partiels et approximation. Soit x un nombre irrationnel et soit

$$x = [a_0, a_1, a_2, \dots]$$

son développement en fraction continue. Dans cet article nous avons plusieurs fois utilisé l'argument suivant : si a_n est un grand quotient partiel alors

$$x \simeq [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$$

i.e. $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$ est une fraction qui est une bonne approximation de x. Essayons maintenant de justifier cet argument. Pour simplifier, on va supposer par exemple que a_3 est un grand quotient partiel. On peut écrire

(3) $$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + A}}$$

avec

$$A = \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}} = \frac{1}{a_3 + B}$$

avec

$$B = \frac{1}{a_4 + \ddots} = [0, a_4, a_5, \dots]$$

Comme $0 < B < 1$, on a donc

$$\frac{1}{a_3 + 1} < A < \frac{1}{a_3}$$

Si a_3 est grand, alors $\frac{1}{a_3} \simeq 0$ et $\frac{1}{a_3+1} \simeq 0$ donc $A \simeq 0$. D'après l'égalité (3), on aura alors

$$x \simeq a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = [a_0, a_1, a_2]$$

A4 : autres résultats sur l'approximation par des fractions continues. Si x est un nombre irrationnel, écrivons son développement en fraction continue

$$x = [a_0, a_1, a_2, \dots]$$

Pour tout $n \geq 0$, considérons alors la fraction continue

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$$

et écrivons–là sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p_n}{q_n}$ avec $q_n > 0$:

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$$

D'après la définition du développement en fraction continue de x, on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{q_n} = x$$

donc les fractions $\frac{p_n}{q_n}$ s'approchent de plus en plus de x lorsque n devient grand. On peut même donner un estimation de l'erreur. En effet on démontre que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

On démontre aussi que les p_n et q_n peuvent se calculer de proche en proche à partir des quotients partiels par les formules suivantes : on pose $p_{-1} = 1$, $p_0 = a_0$ et $q_{-1} = 0$ $q_0 = 1$. Alors pour tout $n \geq 1$, on a

$$p_n = a_n\, p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{et} \quad q_n = a_n\, q_{n-1} + q_{n-2}$$

Il est plus facile de calculer les fractions $\frac{p_n}{q_n}$ de cette manière que de les déduire de

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$$

en calculant à chaque fois la fraction continue $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$. A titre d'illustration prenons le cas de π. On a vu dans le texte que $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, \ldots]$. On en déduit donc

$$\begin{aligned}
p_{-1} &= 1\\
p_0 &= 3\\
p_1 &= 7 \times 3 + 1 = 22\\
p_2 &= 15 \times 22 + 3 = 333\\
p_3 &= 1 \times 333 + 22 = 355\\
p_4 &= 292 \times 355 + 333 = 103993
\end{aligned}$$

puis avec $q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$

$$\begin{aligned}
q_{-1} &= 0\\
q_0 &= 1\\
q_1 &= 7 \times 1 + 0 = 7,\\
q_2 &= 15 \times 7 + 1 = 106\\
q_3 &= 1 \times 106 + 7 = 113\\
q_4 &= 292 \times 113 + 106 = 33102
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{22}{7}, \qquad \frac{p_2}{q_2} = \frac{333}{106}, \qquad \frac{p_3}{q_3} = \frac{355}{113}, \qquad \frac{p_4}{q_4} = \frac{103993}{33102}$$

A5 : qualité de l'approximation par des fractions continues. On démontre que les fractions $\frac{p_n}{q_n}$ déduites du développement en fraction continue d'un nombre irrationnel x sont les meilleures fractions qui approchent x au sens suivant : si $\frac{p}{q}$ (avec $q > 0$) est une fraction telle que $q \leq q_n$ et $\frac{p_n}{q_n} \neq \frac{p}{q}$ alors

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| x - \frac{p}{q} \right|$$

c'est-à-dire que $\frac{p_n}{q_n}$ est plus proche de x que $\frac{p}{q}$. Ainsi par exemple pour π, l'approximation d'Adrien Métius est la meilleure approximation de π parmi toutes les fractions $\frac{p}{q}$ avec $0 < q \leq 355$.

A6 : développer en fraction continue un nombre irrationnel. Cette section expose une méthode pour trouver une partie du développement en fraction continue d'un nombre irrationnel x si l'on connait une partie de son développement décimal. Dans la section sur le développement en fraction continue d'un nombre rationnel nous avons vu que l'on pouvait obtenir son développement en faisant uniquement des divisions euclidiennes en nombres entiers. Ceci peut se programmer facilement sur une machine. Afin d'illustrer la méthode pour un nombre irrationnel supposons par exemple que l'on connaisse jusqu'au trois premières décimales de x. Par exemple supposons que

$$x = 13.203\cdots$$

On considère alors les approximations décimales par défaut 13.203 et par excès 13.204 et l'on écrit ces approximations sous la forme d'une fraction, c'est-à-dire

$$\frac{13203}{1000}, \qquad \frac{13204}{1000}$$

Ensuite on développe ces deux fractions en fraction continue comme on l'a vu dans la section A1. Après calcul, on trouve

$$13.203 = [13, 4, 1, 12, 1, 1, 7], \qquad 13.204 = [13, 4, 1, 9, 5]$$

La plus grande plage de quotients partiels (à partir du début) commune aux deux développements est alors le début du développement en fraction continue de x, c'est-à-dire ici

$$x = [13, 4, 1, \ldots]$$

Prenons un autre exemple, celui de $\pi = 3.14159265\cdots$. On a suivant le même démarche

$$3.141 = [3, 7, 10, 1, 5, 2], \qquad 3.142 = [3, 7, 23, 1, 2]$$

Ainsi $\pi = [3, 7, \ldots]$. Donc on n'obtient qu'un seul quotient partiel en utilisant les trois premières décimales de π. Même avec six décimales on n'obtient toujours qu'un seul quotient partiel car

$$3.141592 = [3, 7, 15, 1, 84, 6, 2], \qquad 3.141593 = [3, 7, 16, 983, 4, 2]$$

En revanche avec 7 décimales, on a

$$\begin{aligned} 3.1415926 &= [3, 7, 15, 1, 243, 1, 1, 9, 1, 1, 4] \\ 3.1415927 &= [3, 7, 15, 1, 354, 2, 6, 1, 4, 1, 2] \end{aligned}$$

donc cette fois on obtient trois quotients partiels et donc

$$\pi = [3, 7, 15, 1, \ldots]$$

Pour récupérer le quatrième quotient partiel (c'est-à-dire 292) il faudrait utiliser les dix premières décimales de π.

A7 : quelques compléments. Donnons quelques compléments récents. Si l'on connait les n premières décimales d'un nombre irrationnel x, la méthode précédente permet donc de déterminer avec certitude un certain nombre de quotients partiels. Notons $k_n(x)$ ce nombre de quotients partiels. Il y a eu récemment plusieurs travaux autour de cette fonction k_n. Premièrement on connait son comportement asymptotique lorsque $n \to \infty$ et cela pour presque tous les nombres irrationnels x (le terme de "presque tout" a un sens précis en mathématique mais on ne cherchera pas à le définir ici car cet exposé se veut élémentaire). C'est un résultat dû à Lochs [Loc64]. Pour presque tout nombre irrationnel x, on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{k_n(x)}{n} = \frac{6 \log 2 \log 10}{\pi^2} \simeq 0.9702$$

Comme la constante $6 \log 2 \log 10/\pi^2$ est proche de 1, on peut presque dire que lorsque n est grand n décimales déterminent n quotients partiels.

Citons aussi un autre résultat plus récent sur k_n qui permet d'avoir un résultat plus concret [Fai98]. Lorsque $n \to \infty$ la distribution des valeurs de

$$\frac{k_n - na}{\sigma \sqrt{n}}$$

se rapproche de la loi normale $N(0, 1)$. Ici a désigne la constante

$$a = \frac{6 \log 2 \log 10}{\pi^2}$$

et $\sigma > 0$ est une autre constante avec $\sigma \simeq 0.7708$ (les quatre décimales sont exactes). En fait la distribution de k_n est très proche (même pour les petites valeurs de n, en fait pour $n \geq 4$) d'une loi normale

$$N(na - 1, \sigma\sqrt{n})$$

où le -1 est une correction de continuité (voir [Fai07] p. 85–91). Ceci permet de donner concrètement une borne précise. Par exemple, pour un niveau de confiance de 95%, si l'on veut k quotients partiels (au moins), il faut prendre un nombre de décimales au moins égal à

$$\frac{\left(-q\sigma + \sqrt{q^2\sigma^2 + 4ak}\right)^2}{4a^2}$$

avec $q = 1.96$ et où les constantes a et σ ont été définies plus haut.

RÉFÉRENCES

[Dor04] Gilles Dormion. *La chambre de Chéops, analyse architecturale*. Fayard, 2004.

[Fai98] C. Faivre. A central limit theorem related to decimal and continued fraction expansions. *Arch. Math. (Basel)*, 70 :455–463, 1998.

[Fai07] C. Faivre. Habilitation à diriger des Recherches. Contributions à l'étude métrique des fractions continues, 2007.

[Goy90] Georges Goyon. *Le secret des batisseurs des grandes pyramides, Khéops*. Pygmalion, 1990.

[Loc64] G. Lochs. Vergleich der Genauigkeit von Dezimalbruch und Kettenbruch. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 27 :142–144, 1964.