

Le tenseur de courbure I : l'identité cyclique de Riemann

Eric OLIVIER^{1,2}

Résumé. – (Version di 17 novembre 2016) Gauss définit la courbure d'une surface en un point dans ses « *Disquisitiones generales circa superficies curvas* » (1828) et y démontre le « *Theorema Egregium* » : celui-ci affirme que cette courbure est une caractéristique intrinsèque de la surface (i.e. qui ne dépend pas du plongement isométrique de la surface dans l'espace). Dans son mémoire d'habilitation (1854), Riemann généralise le travail de Gauss sur la courbure des surfaces à des objets différentiels de dimension quelconque qui s'appelleront bientôt des « *variétés riemanniennes* ». Une difficulté qui apparaît à la lecture des textes de ces deux géomètres, vient de l'utilisation implicite qu'ils font d'une notion primitive de tenseur, sans toutefois la formaliser entièrement. Le calcul tensoriel – proprement dit – se développera réellement à partir des successeurs de Riemann. Dans cette première note, nous présentons les idées géométriques introduites par Gauss et Riemann, à la lumière d'un calcul tensoriel présenté de manière minimale. (Les notes qui suivent sont un compte rendu d'une série de discussions – et de séances de travail – que j'ai eu avec John Hubbard lors de son séjour à Marseille durant l'année universitaire 2015-2016. Le texte est dans un état suffisamment avancé pour être publié ici, même si le lecteur doit rester vigilant. J'espère qu'elles traduisent (au moins partiellement) les idées et le questionnement que nous avons abordés à cette époque : ce travail constitue en un sens une version d'étape d'une publication à venir, que nous pourrions espérer plus finalisée.)

1. Introduction

1.1. Soit (M, g) une variété riemannienne (lisse) de dimension n . Nous supposons que M est plongée isométriquement dans \mathbb{R}^m (pour $m \geq n$) : en d'autres termes, la métrique riemannienne g est celle qui est induite par la structure euclidienne de \mathbb{R}^m (cette apparente restriction simplificatrice nous est « *autorisée* » par « *le théorème du plongement de Nash* » [Nas54, Nas56]). Tout au long de cette note, nous noterons $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de « *l'espace ambiant* » de M (i.e. \mathbb{R}^m) de sorte que $|u|^2 := \langle u | u \rangle$ coïncide avec le carré de la norme euclidienne de u dans \mathbb{R}^m . Dans un système de coordonnées, les composantes $g_{\mu\nu}$ de la métrique sont associées aux « *symboles de Riemann* » noté $g_{\mu\nu, \sigma\tau}$ et définis comme les dérivées partielles secondes $\partial_{\sigma\tau}(g_{\mu\nu})$. La symétrie de la métrique (traduisant la symétrie du produit scalaire) et le lemme de Schwarz (commutation de l'ordre des dérivées partielles), entraînent immédiatement les symétries 1 et 2 des symboles de Riemann, soient respectivement

$$(1) \quad g_{\mu\nu, \sigma\tau} = g_{\nu\mu, \sigma\tau} \quad \text{et} \quad g_{\mu\nu, \sigma\tau} = g_{\mu\nu, \tau\sigma}$$

Les idées de Riemann sur la courbure et développées dans le sillage d'Euler [Eul60] et de Gauss [Gau28], sont difficiles à mettre en évidence au travers des textes originaux (essentiellement [Rie68] et [Rie92]). Une référence importante à ce sujet est le tome II de l'introduction à la géométrie différentielle de Spivak [Spi99] (voir aussi [Kli72, Chap. 37], [Die86, Chap. IX par P. Libermann] et [DD87] pour des notes historiques). Les successeurs de Riemann ont travaillé sur diverses interprétations géométriques de ce qu'on appelle

1. GDAC-I2M UMR 7373 CNRS Université d'Aix-Marseille

2. eric.olivier@univ-amu.fr

maintenant le « *tenseur de Riemann-Christoffel* » – où plus simplement le « *tenseur de courbure*³ ». Le calcul différentiel absolu de Ricci et Levi-Civita (i.e. le calcul tensoriel), la notion de connexion affine de Koszul, le transport parallèle, jusqu'à la notion courbure pour la connexion d'Ehresmann, seront traités ultérieurement (c.f. [Oli17a] et [Oli17b]). Dans cette première note, nous basons notre présentation sur le calcul des variations d'Euler-Lagrange; cette théorie – déjà développée à l'époque de Riemann – permet d'obtenir l'équation des « *géodésiques inertielles* (c.f. Théorème 2.1) et ainsi de définir « *l'exponentielle de Riemann* » et « *les systèmes de coordonnées dites normales* » (voir la Section 2).

1.2. Plaçons nous dans un système x de coordonnées locales de M et définies sur un voisinage d'un point $X \in M$; la variété M étant de dimension n , les coordonnées x sont à valeurs dans \mathbb{R}^n et nous supposons que $x(X)$ coïncide avec l'origine $0 = (0, \dots, 0)$ de \mathbb{R}^n . Nous avons déjà défini les symboles de Riemann $g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X)$ comme les dérivées secondes $\partial_{\sigma\tau}|_X(g_{\mu\nu})$ des x -composantes $g_{\mu\nu}$ de la métrique riemannienne (définies sur le domaine de x): de manière analogue, nous noterons dans la suite $g_{\mu\nu,\sigma}(X)$ la dérivée partielle première $\partial_{\sigma}|_X(g_{\mu\nu})$. Nous dirons que les coordonnées locales x sont « *euclidiennes en X* » lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites, soient

$$(2) \quad g_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad g_{\mu\nu,\sigma}(X) = 0$$

Nous considérerons essentiellement deux types de coordonnées locales, les coordonnées normales (dont nous avons déjà parlé) et les coordonnées gaussiennes (pour M de dimension 2 : c.f. Section 9), qui se trouvent être l'une et l'autre euclidiennes (c.f. Proposition 2.4 & Proposition 9.1); lorsque M est de dimension 2, la manière dont ces deux systèmes de coordonnées se correspondent nous fournit un grand nombre d'informations sur la géométrie locale de M . Cependant, lorsque M est de dimension quelconque, ce sont les coordonnées normales qui sont le mieux adaptées pour accéder à la « *courbure* » locale de M . Afin de comprendre simplement comment ces coordonnées sont définies, supposons que Y soit un deuxième point de M « *assez* » proche de X (pour la distance riemannienne sur M): alors il existe une unique géodésique inertielle $t \mapsto \xi(t)$ issue de X (i.e. $\xi(0) = X$) et joignant Y avec $\xi(1) = Y$, de sorte que la longueur de l'arc géodésique entre X et Y coïncide avec la distance riemannienne de X à Y . Cette géodésique est entièrement déterminée par le vecteur vitesse initial $\dot{\xi}(0)$ (vecteur de l'espace tangent $T_X M$). Toute base orthonormée⁴ de $T_X M$ détermine un système de coordonnées normales en X de la manière suivante : si (y^1, \dots, y^n) sont des coordonnées de $\dot{\xi}(0)$ dans cette base, alors celles-ci sont aussi – par définition – les coordonnées normales du point Y vu de X et déterminée par la base orthonormée de $T_X M$ considérée : nous détaillons tout cela à la Section 2. Ici, notre point de départ est le théorème suivant.

Théorème A. *Si les coordonnées considérées sont normales en un point X alors l'identité cyclique de Riemann est satisfaite, en ce sens que*

$$(ICR) \quad g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) + g_{\mu\sigma,\tau\nu}(X) + g_{\mu\tau,\nu\sigma}(X) = 0$$

3. Si aucune précision n'est donnée, cela signifie qu'il s'agit du tenseur de courbure associé à la connexion de Levi-Civita : c.f. [Oli17a] pour un développement de cette question.

4. Orthonormée pour la structure euclidienne de l'espace ambiant – \mathbb{R}^m – de M .

1.3. Les symétries des symboles de Riemann, s'interprètent naturellement au sein de structures algébriques générales. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie) et soit $\mathcal{Q}(E)$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des formes quadrilinéaires sur E : pour $\epsilon = \pm$, nous notons $\mathcal{Q}^\epsilon(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{Q}(E)$ des formes quadrilinéaires U vérifiant les symétries (resp. antisymétries) 1 et 2 pour $\epsilon = +$ (resp. $\epsilon = -$) : plus précisément, $U \in \mathcal{Q}^\epsilon(E)$ ssi, pour tout $u, v, w, z \in E$,

$$(S\epsilon) \quad U(u, v, w, z) = \epsilon U(v, u, w, z) = \epsilon U(u, v, z, w)$$

Soient $\mathcal{Q}_C^\epsilon(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{Q}^\epsilon(E)$ des U vérifiant la cyclicité, i.e. :

$$(SC) \quad U(u, v, w, z) + U(u, w, z, v) + U(u, z, v, w) = 0$$

et $\mathcal{Q}_B^\epsilon(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{Q}^\epsilon(E)$ des U vérifiant la bisymétrie, i.e. :

$$(SB) \quad U(u, v, w, z) = U(w, z, u, v)$$

Alors le Lemme de Milnor (c.f. Lemme 4.1) affirme que $\mathcal{Q}_C^\epsilon(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{Q}_B^\epsilon(E)$. Supposons maintenant que $U \in \mathcal{Q}^+(E)$; alors il est immédiat de vérifier que si U satisfait la cyclicité (et donc la bi-symétrie) alors U satisfait aussi « l'identité de Moore », en ce sens que pour tout $u, v \in E$

$$(S^{**}) \quad U(u, v, v, v) = 0$$

Le lemme de Moore (c.f. Lemme 5.1) affirme que réciproquement, si $U \in \mathcal{Q}^+(U)$ satisfait (S**) alors U satisfait aussi la cyclicité (SC) et donc la bisymétrie (SB).

1.4. Considérons le cas où $E = \mathbb{R}^n$; en utilisant « les notations sommatoires d'Einstein », tout vecteur u de \mathbb{R}^n s'écrit $u = u^\mu e_\mu$, où les u^μ sont les coordonnées cartésiennes de u et où les e_μ sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n . L'espace $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ est dimension n^4 : pour $U \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$, nous notons $U_{\mu\nu\sigma\tau} := U(e_\mu, e_\nu, e_\sigma, e_\tau)$ les n^4 « composantes cartésiennes » de U , de sorte que $U(u, v, w, z) = u^\mu v^\nu w^\sigma z^\tau U_{\mu\nu\sigma\tau}$, pour tout $u, v, w, z \in \mathbb{R}^n$. Les symétries de U introduites au § 1.3 peuvent alors se traduire en composantes. Ainsi, les symétries/antisymétries 1 et 2 signifient que $U_{\mu\nu\sigma\tau} = \pm U_{\nu\mu\sigma\tau} = \pm U_{\mu\nu\tau\sigma}$; la cyclicité et la bi-symétrie de U se traduisent respectivement en écrivant $U_{\mu\nu\sigma\tau} + U_{\mu\sigma\tau\nu} + U_{\mu\tau\nu\sigma} = 0$ et $U_{\mu\nu\sigma\tau} = U_{\sigma\tau\mu\nu}$; enfin U satisfait l'identité de Moore ssi $U_{\mu\nu\nu\nu} = 0$.

1.5. Pour $X \in M$ donné, le « hessien métrique » associée à des coordonnées normales en X (c.f. Proposition 3.2) est défini comme la forme quadrilinéaire $h \in \mathcal{Q}^+(\mathbb{R}^n)$ dont les composantes cartésiennes coïncident avec les symboles de Riemann en X , en ce sens que

$$(3) \quad h_{\mu\nu\sigma\tau} = g_{\mu\nu, \sigma\tau}(X)$$

Par le Théorème A nous avons $h \in \mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^n)$; le lemme de Milnor entraîne donc que h satisfait aussi la bi-symétrie et cela signifie – pour les symboles de Riemann – que

$$(4) \quad g_{\mu\nu, \sigma\tau}(X) = g_{\sigma\tau, \mu\nu}(X)$$

En fait, la combinaison des lemmes de Milnor et de Moore montrent que la cyclicité et la bi-symétrie des symboles de Riemann (au centre X d'un système de coordonnées normales) sont équivalentes à l'identité de Moore $g_{\mu\nu,\nu\nu}(X) = 0$: il est donc intéressant (et utile) de noter que le théorème suivant⁵ est une forme équivalente du Théorème A.

Théorème A'. *Les symboles de Riemann pris au centre X d'un système de coordonnées normales vérifie l'identité de Moore en ce sens que $g_{\mu\nu,\nu\nu}(X) = 0$.*

1.6. Nous allons voir en quoi le hessien métrique h (et donc les symboles de Riemann) associé par (3) à des coordonnées normales en un point X de M , caractérise l'absence de courbure en ce point. Supposons M connexe par arc et soit $d_R(X, Y)$ la distance riemannienne séparant deux points X et Y de M (i.e. l'infimum des longueurs des chemins de M reliant X et Y). Si \mathbf{X} est la carte associée à un système de coordonnées normales en X , alors \mathbf{X} est définie sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n et $X = \mathbf{X}(0)$: la principale propriété d'une telle carte est de réaliser une isométrie radiale (de centre 0) d'un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n (muni de la distance euclidienne) sur un voisinage de X dans M (muni de la distance riemannienne). Pour préciser cela, nous introduisons la distance $\rho_X(\cdot, \cdot)$ définie sur le domaine de définition de \mathbf{X} en posant

$$\rho_X(y, z) = d_R(\mathbf{X}(y), \mathbf{X}(z))$$

de sorte que (c.f. Proposition 2.3) pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ (suffisamment petit) :

$$(5) \quad \rho_X(0, z) = |z|$$

La propriété d'isométrie radiale d'une carte associée à des coordonnées normales est un cas particulier d'une approximation plus générale formulée dans le théorème suivant.

Théorème B. *Si h est le hessien métrique d'un système de coordonnées supposées euclidiennes en X – i.e. $g_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu,\sigma}(X) = 0$ – alors (i) : h est un élément de $\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si (ii) : pour tout $y, z \in \mathbb{R}^n$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$*

$$(6) \quad \rho_X(\varepsilon y, \varepsilon(y+z))^2 = |\varepsilon z|^2 + \frac{\varepsilon^4}{2} h(z, z, y, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^5)$$

Soit \mathbf{X} la carte associée à des coordonnées normales en $X = \mathbf{X}(0)$ et soit h le hessien métrique correspondant. Par le Théorème A, nous savons que h est une forme quadrilinéaire de $\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^n)$; or les coordonnées normales en X étant aussi euclidiennes en ce point, le Théorème B assure que l'approximation (6) est valide pour tout $y, z \in \mathbb{R}^n$ et tout ε réel dans un voisinage de 0 : notons alors que dans ce cas, la condition $h \equiv 0$ assure que la distance $\rho_X(\cdot, \cdot)$ est très proche de la distance euclidienne au voisinage de 0. Mais d'une part, nous pouvons vérifier (argument de polarisation) que $h \equiv 0$ ssi $h(z, z, y, y) = 0$, pour tout $y, z \in \mathbb{R}^n$ et d'autre part, si $\hat{\mathbf{X}}$ est la carte d'un autre système de coordonnées normales en X , alors il existe une isométrie A de \mathbb{R}^n t.q. $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X} \circ A$ (du moins, dans un voisinage de 0) : si \hat{h} est le hessien métrique associée à $\hat{\mathbf{X}}$ et si (A^i_j) est la matrice (orthogonale) de A dans la base canonique de \mathbb{R}^n , alors les composantes cartésiennes de h et \hat{h} sont liées par la formule de passage $h_{\mu\nu\sigma\tau} = A^a_\mu A^b_\nu A^c_\sigma A^d_\tau \hat{h}_{abcd}$: cela entraîne en particulier que $h \equiv 0$ ssi $\hat{h} \equiv 0$. Ces dernières remarques justifient la définition suivante.

5. Il est très probable que l'identité cyclique de Riemann était connue de Riemann sous la forme du Théorème A ; la chose est moins évidente pour le Théorème A'.

Définition A. *La variété riemannienne (M, g) – de dimension n – est plate en X ssi le hessien métrique h associé à des coordonnées normales en X est la forme quadrilinéaire nulle sur \mathbb{R}^n .*

1.7. Les conséquences de la Définition A sont difficiles à appréhender sans l'aide du calcul tensoriel, c'est-à-dire du calcul différentiel dit *covariant* ou *absolue*. L'idée de *covariance* se trouvent déjà dans le « *Theorema Egregium* » de Gauss (c.f. [Gau28] et Section 10 pour des détails) et se développe en dimension quelconque chez Riemann dans les deux textes déjà mentionnés. Cependant, le fait que la notion de tenseur soit implicite aussi bien chez Gauss que chez Riemann, entraîne des difficultés pour saisir les idées originales mises en jeu. La clarification de ces idées vient avec la formalisation moderne du calcul tensoriel, où les dérivées partielles sont remplacées par les *dérivées partielles covariantes*. Cette théorie s'est développée par étapes successives avec (entre autres) Christoffel, Beltrami, Ricci, Levi-Civita, jusqu'en 1917 date d'introduction de la notion de transport parallèle (Levi-Civita) : voir le Chapitre 48 du livre de Kline [Kli72], ou encore les notes historiques de Bourguignon dans [Bou92]. Disons, pour fixer les idées, qu'un objet lié à la variété M est covariant lorsque sa définition ne dépend pas du système de coordonnées à travers lequel on voit la variété. Einstein fera de la covariance un principe fondamental de la physique moderne en affirmant que « *les lois de la physique doivent s'exprimer de manière covariante* ».

1.8. Les objets covariants du calcul tensoriel sont les (champs de) tenseurs : afin d'en donner une présentation minimale (suffisante pour nos besoins), nous commençons par noter $\mathcal{C}^\infty(M)$ l'anneau des champs scalaires définis sur M et à valeurs réelles. Alors l'application $(X, f) \mapsto V|_X(f)$ définie sur $M \times \mathcal{C}^\infty(M)$ et à valeur réelle est un **champ de vecteurs** (ou de – manière équivalente – une **dérivation**), si pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ l'application partielle $X \mapsto V|_X(f)$ est dans $\mathcal{C}^\infty(M)$ et si pour tout $X \in M$, l'application partielle $f \mapsto V|_X(f)$ est \mathbb{R} -linéaire et satisfait **la règle de dérivation de Leibniz en X** en ce sens que $V|_X(fg) = V|_X(f)g(X) + f(X)V|_X(g)$ pour tout $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Afin de retrouver une intuition géométrique, il est aussi possible de dire que V une section \mathcal{C}^∞ du **fibré tangent** $TM := \coprod_X T_X M$ (union disjointe⁶ des espaces tangents $T_X M$ pour $X \in M$) i.e. une application $V : X \mapsto V|_X$ de M dans $T_X M$ t.q. $V|_X \in T_X M$, de sorte que pour tout $X \in M$ et tout $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ la valeur $V|_X(f)$ s'identifie à la dérivée directionnelle de f suivant le vecteur $V|_X$ (l'application $X \mapsto V|_X(f)$ étant elle-même \mathcal{C}^∞ sur M). **Nous notons $\Gamma(TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs** dont on vérifie facilement (à partir de la définition d'un champ de vecteurs comme dérivation) qu'il constitue un $\mathcal{C}^\infty(M)$ -module. Dans cette note, nous ne rencontrerons que des tenseurs complètement covariants, c'est-à-dire de valence $(0, p)$ pour $p \geq 1$: plus précisément, un $(0, p)$ -tenseur T sur M est une forme p -linéaire sur le $\mathcal{C}^\infty(M)$ -module $\Gamma(TM)$ des champs de vecteurs sur M , ce qui signifie que T est $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linéaire en chacune de ses p entrées. Enfin, pour tout $X \in M$, nous notons $T|_X$ la forme p -linéaire sur $T_X M$ t.q. $T|_X(u, \dots, v) = T|_X(U, \dots, V)$, dès que les valeurs respectives des p champs de vecteurs U, \dots, V coïncident en X avec les p vecteurs u, \dots, v de $T_X M$. Considérons maintenant que X est la carte associée à un système

6. La variété M étant supposée plongée dans \mathbb{R}^m , les espaces tangents $T_X M$ sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^m ; ainsi TM est donc un sous-ensemble de la grassmannienne $\text{Gr}_n(\mathbb{R}^m)$ formée des sous-espaces vectoriels de dimension n de \mathbb{R}^m .

(quelconque) $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ de coordonnées sur M ; si $\mathbf{x}(X) = (x^1, \dots, x^n)$ alors les vecteurs $\partial/\partial x^\mu|_X$ de $T_X M$ (aussi notés $\partial_\mu|_X$) obtenus comme la dérivée en $t = 0$ du chemin $t \mapsto \mathbf{X}(x^1, \dots, x^\mu + t, \dots, x^n)$, forment la base holonôme de $T_X M$ associée au coordonnées \mathbf{x} . Les \mathbf{x} -composantes du $(0, p)$ -tenseurs T sont par définition les n^p fonctions définies sur le domaine de définition de \mathbf{x} en posant :

$$T_{\mu_1 \dots \mu_p} = T \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{\mu_p}} \right)$$

La covariance de T se traduit en composantes par un système d'équations de changement de coordonnées : si $\hat{T}_{\nu_1 \dots \nu_p}$ sont les composantes de T dans un autre système de coordonnées $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$, alors (dans l'intersection des domaines de \mathbf{x} et $\hat{\mathbf{x}}$) :

$$(7) \quad \hat{T}_{\nu_1 \dots \nu_p} = \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial \hat{x}^{\nu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_p}}{\partial \hat{x}^{\nu_p}} T_{\mu_1 \dots \mu_p}$$

La formule de changement de coordonnées (7) assure à elle seule la nature tensorielle de T : c'est sous cette forme « élémentaire » que Riemann pratiquait le calcul tensoriel.

Notre approche du tenseur de courbure n'est pas orthodoxe : elle est entièrement basée sur l'existence d'un $(0, 4)$ -tenseur H – que nous appelons **le tenseur hessien métrique** – telle qu'énoncée dans le théorème B ci-dessous (plusieurs démonstrations en seront données dans [Oli17a]). Nous définirons le tenseur de courbure R (c.f. Définition B) à partir du tenseur hessien métrique : ceci n'est pas la présentation adoptées dans la plupart des textes classiques de géométrie différentielle, où le tenseur H – si toutefois il est évoqué – passe au second plan par rapport au tenseur R (voir [BG68]⁷ et surtout [Moo09]).

Théorème C. *Le tenseur hessien métrique est le $(0, 4)$ -tenseur H dont les composantes $H_{\mu\nu\sigma\tau}(X)$ coïncident avec les symboles de Riemann $g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X)$, dès que les coordonnées sont normales en X .*

Par suite, si h est le hessien métrique au centre X de coordonnées normales \mathbf{x} , alors les \mathbf{x} -composantes H en X coïncident avec les composantes cartésiennes de h , i.e.

$$(8) \quad H_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = h_{\mu\nu\sigma\tau}$$

Partant de la Définition A (et du fait qu'un tenseur ne dépend pas du système de coordonnées), nous déduisons le théorème suivant comme une conséquence de (8).

Théorème D. *La variété riemannienne (M, g) est plate en X ssi $H|_X \equiv 0$.*

1.9. Le Théorème A assure que le hessien métrique h (associé au centre d'un système de coordonnées normales) est une forme quadrilinéaire dans $\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^d)$; par le Théorème C combiné à (8), les symétries h se transposent globalement au tenseur hessien métrique.

Théorème E. $H \in \mathcal{Q}_C^+(\Gamma(TM))$.

7. On peut lire dans [BG68, p. 251] : « Let x^i be normal coordinates at m and let $b_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ be expanded in a finite Taylor expansion of at least the second order, $b_{ij} = a_{ij} + b_{ijk}x^k + b_{ijhk}x^h x^k + \dots$, where $b_{ijhk} = b_{ijkh}$ and $a_{ij} = b_{ij}(m)$. Since a change of one normal coordinate to another is linear, the tensor whose components with respect to $\{\partial_i(m)\}$ are b_{ijhk} is an invariant of the metric structure. Hence, it is the value of a tensor field on M . This tensor field can be expressed in terms of the curvature tensor and its covariant differentials, but we shall not do so here. »

Les symétries 1 et 2 du $(0, 4)$ -tenseur H signifient pour tout $U, V, W, Z \in \Gamma(TM)$,

$$(9) \quad H(U, V, W, Z) = H(V, U, W, Z) = H(U, V, Z, W)$$

la cyclicité (c.f. Théorème A) se traduisant en écrivant

$$(10) \quad H(U, V, W, Z) + H(U, W, Z, V) + H(U, Z, V, W) = 0$$

Enfin le Lemme de Milnor (c.f. Lemme 5.1) nous permet de déduire automatiquement que H vérifie aussi la bi-symétrie en ce sens que

$$(11) \quad H(U, V, W, Z) = H(W, Z, U, V)$$

Dans notre présentation, le tenseur de courbure (complètement covariant) est défini à partir du tenseur hessien métrique H .

Définition B. *Le tenseur de courbure (de Riemann-Christoffel) est le $(0, 4)$ -tenseur R tel que⁸ :*

$$(12) \quad R(U, V, W, Z) = H(U, W, V, Z) - H(U, Z, V, W)$$

1.10. Nous pouvons, dès à présent, montrer que M est plate en X (c.f. Définition A) si et seulement si $R|_X \equiv 0$. En effet (c.f. Théorèmes E), nous savons que $H \in \mathcal{Q}_C^+(\Gamma(TM))$ et donc (lemme de Milnor), par la bisymétrie :

$$\begin{aligned} R(V, U, W, Z) &= H(V, W, U, Z) - H(V, Z, W, U) \\ &= -(H(U, W, V, Z) - H(U, Z, V, W)) = -R(U, V, W, Z) \end{aligned}$$

Cela démontre que R satisfait l'anti-symétrie 1 et un raisonnement analogue établirait de même que R satisfait aussi l'anti-symétrie 2. Enfin, à partir des symétries 1 et 2, nous pouvons établir la cyclicité de R en écrivant :

$$\begin{aligned} R(U, W, Z, V) + R(U, Z, V, W) &= (H(U, Z, W, V) - H(U, V, W, Z)) \\ &\quad + (H(U, V, Z, W) - H(U, W, Z, V)) \\ &= H(U, Z, W, V) - H(U, W, Z, V) = -R(U, V, W, Z) \end{aligned}$$

Théorème F. $R \in \mathcal{Q}_C^-(\Gamma(TM))$.

Le point clef est alors de remarquer que H s'exprime en fonction de R , puisque

$$\begin{aligned} R(U, W, V, Z) + R(U, Z, V, W) &= H(U, V, W, Z) - H(U, Z, W, V) \\ &\quad + H(U, V, Z, W) - H(U, W, Z, V) \\ &= 2H(U, V, W, Z) - H(U, Z, W, V) \\ &\quad + (H(U, Z, V, W) + H(U, V, W, Z)) = 3H(U, V, W, Z) \end{aligned}$$

ce qui s'écrit finalement

$$(13) \quad H(U, V, W, Z) = \frac{1}{3}R(U, W, V, Z) + \frac{1}{3}R(U, Z, V, W)$$

Les identités (12) et (13) entraînent que $H|_X \equiv 0$ ssi $R|_X \equiv 0$. Nous venons de voir que les Théorèmes A et C entraînent que :

Théorème G. *La variété riemannienne (M, g) est plate en X ssi $R|_X \equiv 0$.*

8. Il y a ici une ambiguïté sur le signe de R : cette ambiguïté se retrouve dans toute la littérature concernant le tenseur de Riemann-Christoffel.

1.11. Cette première note sur la courbure riemannienne est organisée autour de la démonstration de l'identité cyclique de Riemann sous la forme du Théorème A puis du Théorème A'. La Section 2 commence par la description lagrangienne des géodésiques inertielles obtenues grâce aux équations d'Euler-Lagrange (c.f. Théorème 2.1) : cela nous permet d'introduire les coordonnées normales en un point ainsi que l'exponentielle de Riemann qui leurs est associée. La Section 3 commence par une heuristique de nature géométrique basée sur le [théorème spectral](#) et nous menant alors au « [lemme de Gauss Spectral](#) » (c.f. Théorèmes 3.3 & 3.4) : ce dernier est l'ingrédient principal permettant d'établir les Théorèmes A & A'. La preuve du Théorème A' se trouve au § 3.4 et nous reproduisons au § 3.6 l'argument de Spivak dans [Spi99] qui démontre le Théorème A.

Un point important (c.f. Appendice A), est de noter que le lemme de Gauss spectral est une forme équivalente du Lemme de Gauss géométrique affirmant que les géodésiques inertielles issues d'un point donné de M sont orthogonales (pour la métrique riemannienne) aux hypersphères centrées en ce point. Nous insistons sur le fait que les lemmes de Gauss spectral/géométrique – et par conséquent l'identité cyclique de Riemann – dépendent du théorème spectral.

Les Sections 4 & 5 sont respectivement dédiées au Lemme de Milnor (c.f. Lemme 4.1) et au Lemme de Moore (c.f. Lemme 5.1). La Section 5 est conclue par une démonstration du Théorème B. Dans la Section 6 nous donnons les calculs explicites des dimensions des espaces $\mathcal{Q}_C^\pm(E)$ et $\mathcal{Q}_B^\pm(E)$ en fonction de la dimension n du \mathbb{R} -espace vectoriel E (c.f. Propositions 6.1, 6.2 & 6.4); bien que sous une forme différente, ces résultats faisaient partie du travail original de Riemann : combinés aux lemmes de Milnor et de Moore, ils permettent d'avoir une vue synthétique de l'ensemble des propriétés de symétrie du tenseur hessien métrique H et du tenseur de courbure R . En particulier, dans le cas où E est de dimension 2, nous pourrions utiliser le fait que $\mathcal{Q}_C(E)$ est de dimension 1 afin d'établir la relation qui existe entre la courbure de Gauss et le tenseur de courbure dans le cas où la variété M est elle-même de dimension 2 (c.f. Théorème 11.4 in Section 11).

La Section 7 est consacrée à une présentation des expressions développées des x -composantes du tenseur de Riemann-Christoffel R (c.f. Théorème 7.1) ainsi que du tenseur hessien métrique H (c.f. Corollaire 7.2) dans un système de coordonnées x supposé quelconque. Il n'y a ici ni démonstration, ni présentation heuristique permettant de « *comprendre* » des formules très sophistiquées qui sont au coeur du travail de Riemann (les composantes de R apparaissent pour la première fois dans [Rie92]) : nous vérifions simplement la cohérence qui existe entre ces formules et un certain nombre des propriétés des tenseurs R et H . La question des composantes de R (et par conséquent de H) sera traitée dans la seconde note [Oli17a] de plusieurs points de vues (i.e. celui de Riemann, mais aussi des points de vues utilisant des outils/concepts plus modernes comme le transport parallèle).

Nous avons vu (c.f. Théorème D & G) que les tenseurs H et R caractérisent – de manière équivalente – « *l'absence de courbure en un point* » : la question naturelle qui se pose alors est savoir comment il est possible de « *mesurer cette courbure* ». Il se trouve que cette information existe aussi bien dans H que dans R (encore une fois de manière équivalente), mais c'est le tenseur R qui est utilisé pour caractériser la courbure (ce qui justifie

son nom). On pourra invoquer plusieurs justifications pour cela (y compris des raisons tenant à l'histoire mathématique) : cependant la simplicité de la relation entre le tenseur de courbure R et la courbure gaussienne, dans le cas des variétés de dimension 2, nous fournit un justification très raisonnable. En effet, il découle de l'étude dimensionnelle de $\mathcal{Q}_C^\pm(E)$ de la Section 6 que les espaces $\mathcal{Q}_C^-(T_X M)$ sont tous de dimension 1 lorsque la variété riemannienne M est de dimension 2. Or dans ce cas 2-dimensionnel, si nous notons Ω le $(0, 2)$ -tenseur tel que $\Omega|_X(U, V)$ soit le déterminant⁹ de $(U|_X, V|_X)$, alors il est facile de vérifier que la forme quadrilinéaire $\Omega \otimes \Omega|_X$ appartient à $\mathcal{Q}_C^-(T_X M)$. Par conséquent $R|_X$ et $\Omega \otimes \Omega|_X$ sont proportionnels : nous verrons qu'en fait $R_X = -K(X)\Omega \otimes \Omega|_X$, où $X \mapsto K(X)$ est le champ scalaire de la courbure gaussienne sur (la surface) M . Les dernières sections sont consacrées à établir la relation entre le tenseur de courbure et la courbure gaussienne dans le cas des surfaces. Ainsi, la Section 8 est une introduction rapide aux notions de courbure et de rayon de courbure d'une courbe plane. Dans la Section 9 nous considérons le cas d'une surface Σ plongée isométriquement dans l'espace euclidien et nous définissons la courbure gaussienne en un point à partir d'un système de coordonnées gaussiennes.

Enfin, les Sections 10 & 11 décrivent les relations entre le tenseur de Riemann-Christoffel, la seconde forme fondamentale et la courbure gaussienne en un point de la surface Σ . Dans le § 10.2 nous introduisons le tenseur de Gauss G comme un $(0, 4)$ -tenseur défini à partir de la seconde forme fondamentale (c.f. Théorème 10.4) : nous montrons alors que les composantes de $G_{\mu\nu, \sigma\tau}(X)$ coïncident avec les symboles de Riemann $g_{\mu\nu, \sigma\tau}(X)$, lorsque les coordonnées locales considérées sont gaussiennes en X (c.f. Corollaire 10.5) : un point intéressant sera alors de voir pourquoi (dans le cas d'une surface Σ de l'espace) le tenseur de Gauss et le tenseur hessien métrique différent, malgré la forte analogie de leur définition (c.f. Proposition 10.6). Nous terminons cette note en démontrant le « *Theorema Egregium* » sous trois formes telles qu'énoncées dans les Théorèmes 11.3, 11.4 & 11.6.

2. Géodésiques inertielles – Coordonnées normales – Exponentielle de Riemann

2.1. Les géodésiques riemanniennes sur M peuvent être définies par « *un principe d'action extrémale* » (c.f. [Arn13] pour une référence en mécanique lagrangienne et hamiltonienne) : grâce aux équations d'Euler-Lagrange elles sont alors caractérisées comme les solutions d'un système différentiel du second ordre. (Nous verrons dans [Oli17a] – avec le Théorème de Levi-Civita – que cette approche s'interprète géométriquement en terme de transport parallèle.) Pour commencer, considérons le lagrangien¹⁰

$$(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) = (q, \dot{q}) \mapsto L(q, \dot{q})$$

où la variable q (resp. \dot{q}) est prise dans un ouvert de \mathbb{R}^n (resp. \mathbb{R}^n tout entier). Alors le chemin $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n) : [a; b] \rightarrow \mathcal{V}$ sera appelé une *L-géodésique* s'il satisfait le système des équations d'Euler-Lagrange i.e.

$$(\forall \sigma) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) = \frac{\partial L}{\partial q^\sigma}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$$

9. Calculé dans $T_X M$ muni de sa structure euclidienne induite par l'espace ambiant (i.e. \mathbb{R}^m).

10. Ici on se restreint à un lagrangien stationnaire en ce sens qu'il ne dépend pas d'un paramètre temporel ; on exige seulement que les dérivées partielles $\partial L / \partial q^\mu$ et $\partial L / \partial \dot{q}^\mu$ existent et soient continues.

Le théorème suivant est fondamental.

Théorème 2.1. Soient $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$ où \mathbf{X} est la carte d'un système de coordonnées (quelconque) sur (M, g) et L le *lagrangien-inertiel* défini pour tout (q, \dot{q}) (avec q dans le domaine de \mathbf{X}) et t, q .

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \gamma_{\mu\nu}(q)$$

Soit $t \mapsto \mathbf{X}(\xi^1, \dots, \xi^n) =: \xi(t)$ un germe de chemin en un point $X = \xi(0)$ de M ; alors ξ est une géodésique inertielle de M si et seulement si $t \mapsto (\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ est une L -géodésique : dans ce cas les composantes de ξ satisfont le système d'équation

$$(14) \quad (\forall \sigma) \quad \ddot{\xi}^\sigma(t) + \dot{\xi}^\mu(t) \dot{\xi}^\nu(t) \mathbf{C}^\sigma_{\mu\nu}(\xi(t)) = 0$$

où les symboles de Riemann-Christoffel de deuxième espèce sont définis en posant :

$$(15) \quad \mathbf{C}^\sigma_{\mu\nu} := \frac{1}{2} g^{\sigma\epsilon} (g_{\epsilon\nu, \mu} + g_{\mu\epsilon, \nu} - g_{\mu\nu, \epsilon})$$

Preuve. Nous commençons par calculer les dérivées partielles de L . D'une part,

$$\frac{\partial L}{\partial q^\sigma} = \frac{\partial}{\partial q^\sigma} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \gamma_{\mu\nu}(q) \right) = \frac{1}{2} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial q^\sigma}$$

et d'autre part (en utilisant la symétrie $\gamma_{\mu\sigma} = \gamma_{\sigma\mu}$)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\sigma} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^\sigma} \left(\frac{1}{2} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu \gamma_{\mu\nu}(q) \right) = \dot{q}^\mu \gamma_{\mu\sigma}(q)$$

Les équations d'Euler-Lagrange pour $t \mapsto (\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ s'écrivent alors :

$$(\forall \sigma) \quad \ddot{\xi}^\mu(t) g_{\mu\sigma}(\xi(t)) + \dot{\xi}^\mu(t) \dot{\xi}^\nu(t) \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}(\xi(t)) = \frac{1}{2} \dot{\xi}^\mu(t) \dot{\xi}^\nu(t) \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}(\xi(t))$$

Or, il est évident par la convention sommatoire d'Einstein que

$$\dot{\xi}^\mu(t) \dot{\xi}^\nu(t) \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}(\xi(t)) = \dot{\xi}^\nu(t) \dot{\xi}^\mu(t) \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}(\xi(t))$$

d'où l'identité

$$\dot{\xi}^\mu(t) \dot{\xi}^\nu(t) \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}(\xi(t)) = \frac{1}{2} \dot{\xi}^\mu(t) \dot{\xi}^\nu(t) \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}(\xi(t)) + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}(\xi(t)) \right)$$

et nous obtenons une forme équivalente des équations d'Euler-Lagrange, soient :

$$(\forall \sigma) \quad \ddot{\xi}^\mu(t) g_{\sigma\nu}(\xi(t)) + \frac{1}{2} \dot{\xi}^\mu(t) \dot{\xi}^\nu(t) \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu}(\xi(t)) + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu}(\xi(t)) - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma}(\xi(t)) \right) = 0$$

L'équation (14) s'en déduit en utilisant le fait que $g^{\sigma\sigma} g_{\mu\sigma} = g^{\sigma\sigma} g_{\sigma\mu} = \delta^\sigma_\mu$ et par définition des symboles de Christoffel de seconde espèce. □

2.2. Les symboles de Christoffel de deuxième espèce définis en (15) apparaissent « naturellement » dans l'équation différentielle des géodésiques de M ; nous utiliserons aussi les symboles Riemann-Christoffel de première espèce, soient¹¹

$$(16) \quad \mathbf{C}_{\mu\nu, \sigma} = -g_{\sigma\epsilon} \mathbf{C}^\epsilon_{\mu\nu} := \frac{1}{2} (g_{\sigma\nu, \mu} + g_{\mu\sigma, \nu} - g_{\mu\nu, \sigma})$$

11. De même que pour les symboles de Riemann $g_{\mu\nu, \sigma\tau}$, nous utilisons toujours une notation (assez classique) en écrivant $g_{\mu\nu, \sigma} = \partial_\sigma g_{\mu\nu}$.

D'une part, il découle directement de la symétrie du tenseur métrique que ¹²

$$(17) \quad \mathbb{C}_{\mu\nu,\sigma} = \mathbb{C}_{\nu\mu,\sigma} \quad \text{et} \quad \mathbb{C}^{\sigma}_{\mu\nu} = \mathbb{C}^{\sigma}_{\nu\mu}$$

D'autre part, à partir de (16) il vient ¹³

$$(19) \quad g_{\mu\nu,\sigma} = \mathbb{C}_{\sigma\nu,\mu} + \mathbb{C}_{\mu\sigma,\nu}$$

Dans cette note, notre approche est basée sur les symboles de Riemann $g_{\mu\nu,\sigma\tau}$ ainsi que sur l'identité cyclique de Riemann en coordonnées normales (c.f. Théorème A). Cela justifie l'importance (technique) du lemme suivant obtenu comme conséquence directe de (19).

Lemme 2.2. *Les symboles de Riemann sont liés aux Symboles de Christoffel i.e. :*

$$(20) \quad g_{\mu\nu,\sigma\tau} = \partial_{\tau}\mathbb{C}_{\sigma\nu,\mu} + \partial_{\tau}\mathbb{C}_{\mu\sigma,\nu}$$

2.3. Nous avons vu (c.f. § 2.1) qu'une géodésique inertielle issue d'un point X est un germe de chemin $t \mapsto \xi(t)$ en X (i.e. $\xi(0) = 0$) satisfaisant un principe variationnel lagrangien (c.f. Théorème 2.1). Une telle géodésique est entièrement déterminée (c.f. Théorème de Cauchy-Lipschitz) par les conditions initiales $\xi(0) = X$ et ¹⁴ $\dot{\xi}(0) =: y \in T_X M$: pour préciser les paramètres de la géodésique, nous noterons $\xi(t) = \exp_X(ty)$, c'est-à-dire que $(\xi(0), \dot{\xi}(0)) = (X, y)$. Alors, le sous-ensemble des vecteurs tangents $y \in T_X M$ tels que $\exp(ty)$ soit défini pour tout $0 \leq t \leq 1$ est un voisinage ouvert de 0 (dans $T_X M$) : l'application $y \mapsto \exp_X(y) := \exp_X(1y)$ définie sur ce voisinage est l'**exponentielle de Riemann en X** . En général, l'exponentielle de Riemann n'est ni injective, ni surjective (penser par exemple à la 2-sphère pour l'injectivité, ou encore à une variété non connexe pour la surjectivité ¹⁵). Nous supposons par la suite que (M, g) est géodésiquement complète, ce qui assure par le Théorème de Hopf-Rinow ¹⁶ que (pour tout $X \in M$) l'application \exp_X réalise une surjection de $T_X M$ sur l'ensemble de la variété M . Par définition le rayon d'injectivité de l'exponentielle de Riemann en X est le supremum $r_* = r_*(X)$ des $r > 0$ t.q. \exp_X soit définie et injective sur l'ensemble des $y \in T_X M$ de norme euclidienne $|y| < r$

12. Les symboles de Christoffel $\mathbb{C}^{\sigma}_{\mu\nu}$ sont les coefficients de la connexion de Levi-Civita ∇ et (17) signifie que ∇ est sans torsion : c.f. [Oli17a].

13. Nous pouvons écrire par exemple les identités matricielles équivalentes suivantes :

$$(18) \quad \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{\mu\nu,\sigma} \\ \mathbb{C}_{\sigma\nu,\mu} \\ \mathbb{C}_{\mu\sigma,\nu} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{\mu\nu,\sigma} \\ g_{\sigma\nu,\mu} \\ g_{\mu\sigma,\nu} \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} g_{\mu\nu,\sigma} \\ g_{\sigma\nu,\mu} \\ g_{\mu\sigma,\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{C}_{\mu\nu,\sigma} \\ \mathbb{C}_{\sigma\nu,\mu} \\ \mathbb{C}_{\mu\sigma,\nu} \end{pmatrix}$$

14. Nous utilisons la notation de Newton pour la dérivée d'une fonction ne dépendant que d'une seule variable.

15. On peut aussi considérer le plan euclidien privé du disque unité fermé pour la surjectivité : mais dans ce cas la variété riemannienne obtenue n'est pas complète (en tant qu'espace métrique) et donc pas géodésiquement complète (Théorème d'Hopf-Rinow).

16. (D'après Wikipédia) : Etant donnée (M, g) une variété riemannienne connexe (sans bord), le **Théorème de Hopf-Rinow** affirme que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) : Il existe un point X de M pour lequel l'application exponentielle d'origine X est définie sur $T_X M$.
- (2) : Pour tout point X dans M , l'application exponentielle d'origine X est définie sur $T_X M$.
- (3) : (M, g) est géodésiquement complète, c'est-à-dire que les géodésiques sont définies sur \mathbb{R} .
- (4) : L'espace métrique (M, d_R) est complet.
- (5) : Les parties fermées et bornées sont compactes.

En outre, dans cette situation, deux points quelconques X et Y de M peuvent être reliés par une géodésique de longueur $d_R(X, Y)$. En particulier, l'application exponentielle (quelle que soit son origine) est surjective.

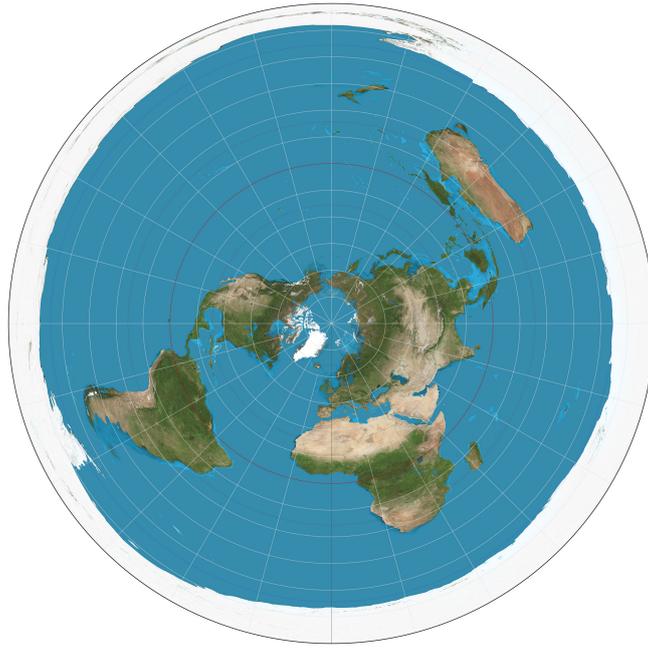


FIGURE 1. Représentation de la carte du Monde en coordonnées de Riemann centrées sur le Pôle Nord (N); la distance (dans le plan euclidien de la carte) entre N et le cercle extérieur représente le rayon d'injectivité r_* de l'exponentielle de Riemann en N (on a approximativement $r_* \approx \pi \times 6357$ km); les points sur le cercle extérieur ne font pas partie de la représentation et s'identifient tous au Pôle Sud. Dans le plan euclidien de la carte, les aires ne sont pas identiquement proportionnelles aux aires réelles (i.e. telles que calculées sur sphère terrestre) alors que les distances radiales le sont; ainsi, on remarquera (en confondant le rayon r_*/π des méridiens avec le rayon équatorial) que la surface de la terre telle que représentée ici vaut πr_*^2 , soit un peu moins de 2.5 fois la surface « réelle » $4\pi(r_*/\pi)^2$.

(voir la Figure 1 pour une illustration du rayon d'injectivité de l'exponentielle de Riemann associé au Pôle Nord de la surface terrestre). Enfin, il est facile de vérifier que si $Y = \exp_X(y)$ alors la norme euclidienne $|y|$ coïncide avec la longueur riemannienne de l'arc de géodésique correspondant à l'image par \exp_X de l'intervalle $[0; |y|]$: lorsque X et Y sont suffisamment proche l'un de l'autre, alors $|y|$ coïncide avec la distance riemannienne entre X et Y : nous précisons cela dans la proposition suivante.

Proposition 2.3. Si (M, g) est géodésiquement complète alors l'exponentielle de Riemann \exp_X en tout point X de M réalise un bijection (lisse) de la boule ouverte $\{|y| < r_*(X)\}$ (dans $T_X M$) sur son image (dans M) qui est une isométrie radiale, i.e. pour tout $y \in T_X M$ t.q. $|y| < r_*(X)$:

$$|y| = d_R(X, \exp_X(y))$$

Supposons que la carte \mathbf{X} associée à un système de coordonnées \mathbf{x} soit définie sur un voisinage de 0 (dans \mathbb{R}^n) et soit $X = \mathbf{X}(0)$: alors les coordonnées \mathbf{x} sont dites **normales**

(ou encore inertielles) en X , si la base holonôme $(\partial_1|_X, \dots, \partial_n|_X)$ de $T_X M$ est orthonormée et si de plus pour tout (y^1, \dots, y^n) dans le domaine de \mathbf{X}

$$(21) \quad \exp_X(y^i \partial_i|_X) = Y \iff \mathbf{X}(y^1, \dots, y^n) = Y \iff (y^1, \dots, y^n) = \mathbf{x}(Y)$$

Dire que \mathbf{x} est un système de coordonnées normales en X signifie (en un sens) que la carte \mathbf{X} coïncide avec l'exponentielle de Riemann en X . Mais il faut préciser un peu les choses, à cause des conventions/notations que nous avons choisies (c.f. supra). Ainsi, en supposant que M est géodésiquement complète, l'application \exp_X (l'exponentielle de Riemann en X) est définie sur $T_X M$ (par définition un sous-espace vectoriel de l'espace ambiant \mathbb{R}^m) et n'a aucune raison (en général) de coïncider avec \mathbb{R}^n (qui par convention est le sous-espace de \mathbb{R}^m engendré par les n premiers vecteurs de la base canonique). Ainsi, d'une manière équivalente à (21), nous pouvons dire que le système de coordonnées \mathbf{x} est normal en X s'il existe une isométrie Ψ de \mathbb{R}^m pour laquelle

$$(22) \quad \Psi(\mathbb{R}^n) = T_X M \quad \text{et} \quad \mathbf{X} = \exp_X \circ \Psi$$

En particulier, l'exponentielle de Riemann en X réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $T_X M$ sur un voisinage de X dans M . Enfin, il est évident de remarquer que l'identité $\exp_X(0) = X$ combinée à (21) entraîne que $\mathbf{x}(X) = (0, \dots, 0)$ dès que le système de coordonnées \mathbf{x} est normal en X . La proposition suivante complète la liste des simplifications qu'assure l'utilisation d'un système de coordonnées normales.

Proposition 2.4. *Des coordonnées normales en un point X de M sont nécessairement euclidiennes en ce point : en d'autres termes $g_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu,\sigma}(X) = 0$.*

Preuve. Soient \mathbf{x} des coordonnées normales en X ; alors par définition $(\partial_1|_X, \dots, \partial_n|_X)$ est une base orthonormée de $T_X M$: cela assure que $g_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu}$. Pour montrer que $g_{\mu\nu,\sigma}(X) = 0$, soit $t \mapsto \xi(t) \in \mathcal{U}$ une géodésique issue de X (i.e. $\xi(0) = X$). Si $\xi^1(t), \dots, \xi^n(t)$ sont les composantes de $\xi(t)$ – en ce sens que $\mathbf{x}(\xi(t)) = (\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ – alors $\xi(t) = \exp_X(ty)$ où $y = \dot{\xi}^\mu(0)\partial_\mu|_X$. Alors (Théorème 2.1) le chemin $t \mapsto (\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ (dans \mathbb{R}^n) est un germe de chemin en $\mathbf{x}(X)$ solution du système différentiel :

$$(23) \quad (\forall \sigma) \quad \ddot{\xi}^\sigma(t) + \dot{\xi}^\mu(t)\dot{\xi}^\nu(t)\mathbf{C}^\sigma_{\mu\nu}(\xi(t)) = 0$$

Les coordonnées \mathbf{x} étant supposée normales en X , d'après (21) l'identité $\exp_X(0v) = X$ implique d'une part que $\mathbf{x}(X) = (0, \dots, 0)$; mais d'autre part (21) entraîne aussi que

$$\exp_X(ty^\mu \partial_\mu|_X) = \xi(t) \iff (ty^1, \dots, ty^n) = \mathbf{x}(\xi(t))$$

Ainsi $ty^\mu = \xi^\mu(t)$, pour tout t et tout $1 \leq i \leq n$ et donc $(\dot{\xi}^\mu(t), \ddot{\xi}^\mu(t)) \equiv (y^\mu, 0)$. D'après (23) il vient $y^\mu y^\nu \mathbf{C}^\sigma_{\mu\nu}(\xi(t)) = 0$. La géodésique considérée en X étant arbitraire, nous obtenons (seulement avec $t = 0$) que $y^\mu y^\nu \mathbf{C}^\sigma_{\mu\nu}(X) = 0$, pour tout $(y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$: cela entraîne $\mathbf{C}^\sigma_{\mu\nu}(X) = 0$, pour tout triplet d'indices (σ, μ, ν) . Comme $\mathbf{C}_{\mu\nu,\sigma} = g_{\sigma\epsilon} \mathbf{C}^\epsilon_{\mu\nu}$ et que $g_{\mu\nu,\sigma} = \mathbf{C}_{\sigma\nu,\mu} + \mathbf{C}_{\mu\sigma,\nu}$ (c.f. Lemme 2.2), nous en déduisons que $g_{\mu\nu,\sigma}(X) = 0$. □

3. Du lemme de Gauss spectral à l'identité cyclique de Riemann

3.1. Notons $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$ où \mathbf{X} est la carte d'un système de coordonnées normales en un point $X = \mathbf{X}(0)$ de M . Pour tout $y = (y^1, \dots, y^n)$ et $z = (z^1, \dots, z^n)$ dans \mathbb{R}^n , nous

voulons préciser en quel sens $z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(y)$ (i.e. le carré de la norme du vecteur $z^\mu \partial_\mu|_{\mathbf{X}(y)}$ de $T_{\mathbf{X}(y)}M$) approxime le carré de la distance riemannienne $\rho_X(y, y+z) = d_R(\mathbf{X}(y), \mathbf{X}(y+z))$ séparant $\mathbf{X}(y)$ et $\mathbf{X}(y+z)$ dans M . Pour cela, nous allons utiliser le fait que si y et z sont assez petits, alors il existe une unique géodésique inertielle de vitesse unité, issue de $\mathbf{X}(y)$ et atteignant $\mathbf{X}(y+z)$ en parcourant la distance riemannienne $\rho_X(y, y+z)$.

Proposition 3.1. *Soit $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$, où \mathbf{X} est la carte d'un système de coordonnées normales en $X = \mathbf{X}(0)$ et soit $y \in \mathbb{R}^n$ fixé (et suffisamment petit); alors pour tout $z \in \mathbb{R}^n$ avec $z \rightarrow 0$:*

$$(24) \quad \rho_X(y, y+z)^2 \sim z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(y)$$

Preuve. Soit $y, z \in \mathbb{R}^n$ avec y fixé; nous supposons y suffisamment petit pour que, dans la limite où $z \rightarrow 0$, il existe une unique géodésique $t \mapsto \xi(t) = \mathbf{X}(\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ de vitesse unité et reliant $\mathbf{X}(y)$ à $\mathbf{X}(y+z)$ par un segment géodésique dont la longueur coïncide avec la distance riemannienne $r(z) := \rho_X(y, y+z)$ entre $\mathbf{X}(y)$ et $\mathbf{X}(y+z)$. Cette géodésique est déterminée par sa position initiale $\xi(0) = \mathbf{X}(y)$ et par le vecteur $v = v(z) := \dot{\xi}(0)$ t.q.

$$(25) \quad v^\mu v^\nu \gamma_{\mu\nu}(y) = 1$$

En particulier, nous avons $\xi(r) = \mathbf{X}(y+z)$. Le développement de Taylor de $\xi^\mu(t)$ donne alors $\xi^\mu(t) = y^\mu + tv^\mu + tA^\mu(z, t)$, où les fonctions $(t) \rightarrow A^\mu(z, t)$ sont continues sur un voisinage de $(0, 0)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, avec $A^\mu(z, 0) = 0$; or $\xi^\mu(r) = y^\mu + z^\mu$ et donc, pour $t = r$ nous avons $z^\mu = r(v^\mu + a^\mu)$ où $a^\mu = a^\mu(z) := A^\mu(z, r(z))$: par suite, en utilisant (25)

$$z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(y) = r^2(v^\mu v^\nu + v^\mu a^\nu + a^\mu v^\nu + a^\mu a^\nu) \gamma_{\mu\nu}(y) = r^2(1 + B)$$

où nous avons posé $B = B(z) := (2v^\mu + a^\mu)a^\nu \gamma_{\mu\nu}(y)$. D'une part, la fonction $z \mapsto B(z)$ est continue en $z = 0$ dans \mathbb{R}^n ; mais d'autre part, comme $r(z) = 0$ quand $z = 0$ et que $A^\mu(z, t) = 0$ quand $t = 0$, nous avons $a^\mu(z) = 0$ quand $z = 0$ et donc $B(0) = 0$. □

3.2. Le résultat suivant prolonge la Proposition 3.1 par le développement de $z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(y)$ suivant $(z, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans une précision en $\circ(|z|^2|y|^2)$ et en fonction du hessien métrique, dont nous avons déjà parlé : c'est un point clef qui nous permettra (avec la Proposition 3.1) de fournir une démonstration simple du Théorème A' (c.f. infra).

Proposition 3.2. *Soit $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$, où \mathbf{X} est la carte d'un système de coordonnées normales en $X = \mathbf{X}(0)$; si y, z sont deux vecteurs de \mathbb{R}^n (suffisamment petits) alors, pour $(y, z) \rightarrow (0, 0)$:*

$$(26) \quad z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(y) = |z|^2 + \frac{1}{2}h(z, z, y, y) + \circ(|z|^2|y|^2)$$

où le « hessien métrique » h est par définition la forme quadrilinéaire sur \mathbb{R}^n dont les composantes cartésiennes coïncident avec les symboles de Riemann, en ce sens que¹⁷

$$h_{\mu\nu\sigma\tau} = g_{\mu\nu, \sigma\tau}(X) = \gamma_{\mu\nu, \sigma\tau}(0)$$

17. Rappelons que nous notons e_1, \dots, e_n les n vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n , de sorte que les composantes cartésiennes de h sont par définition les $h_{\mu\nu\sigma\tau} = h(e_\mu, e_\nu, e_\sigma, e_\tau)$. Rappelons aussi que nous notons $\gamma_{\mu\nu, \sigma} := g_{\mu\nu, \sigma} \circ \mathbf{X}$ et $\gamma_{\mu\nu, \sigma\tau} := g_{\mu\nu, \sigma\tau} \circ \mathbf{X}$.

Preuve. La carte \mathbf{X} étant associée à des coordonnées normales en $\mathbf{X}(0)$, nous savons (c.f. Proposition 2.4) que $\gamma_{\mu\nu}(0) = \delta_{\mu\nu}$ et que $\gamma_{\mu\nu,\sigma}(0) = 0$: par suite en écrivant le développement de Taylor de $\gamma_{\mu\nu}(y) := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}(y)$ en 0 à l'ordre 2, il existe une fonction $y \mapsto C_{\mu\nu}(y)$ qui est continue dans un voisinage de 0 avec ¹⁸ $C_{\mu\nu}(0) = 0$

$$\gamma_{\mu\nu}(y) = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} y^\sigma y^\tau \gamma_{\mu\nu,\sigma\tau}(0) + |y|^2 C_{\mu\nu}(y)$$

Ainsi, par définition du hessien métrique h , il vient

$$z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(y) = |z|^2 + \frac{1}{2} h(z, z, y, y) + |y|^2 (z^\mu z^\nu C_{\mu\nu}(y))$$

Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|z^\mu z^\nu C_{\mu\nu}(y)| \leq |z|^2 |C(y)|$, où $|C(y)|$ est la norme (de Frobenius par exemple ¹⁹) de la matrice $(\delta^{\mu\epsilon} C_{\epsilon\nu}(y))$. En posant $D(y, 0) := 0$ et $D(y, z) := z^\mu z^\nu C_{\mu\nu}(y)/|z|^2$, lorsque $z \neq 0$, nous définissons une fonction $D(y, z)$ qui est continue sur un voisinage de $(0, 0)$, nulle en ce point et t.q. $z^\mu z^\nu C_{\mu\nu}(y) = |z|^2 D(y, z)$. □

3.3. Nous considérons toujours que $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$, où \mathbf{X} est la carte associée à des coordonnées normales en $X = \mathbf{X}(0)$. Nous traduisons (26) en écrivant :

$$(27) \quad \varphi_y(z) = \varphi_0(z) + \psi(y, z) + o(|y|^2 |z|^2)$$

où pour tout y , l'application $z \mapsto \varphi_y(z) := z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(y)$ est une forme quadratique sur \mathbb{R}^n et où $(y, z) \mapsto \psi(y, z) := 1/2 z^\mu z^\nu y^\sigma y^\tau \gamma_{\mu\nu,\sigma\tau}(0)$ est la forme bi-quadratique associée à la forme quadrilinéaire $1/2h$. Les propriétés des coordonnées normales assurent d'une part que $\rho_X(0, z) = \varphi_0(z) = |z|$; d'autre part, pour y fixé, il est évident (définition d'une variété riemannienne) que φ_y est une forme quadratique définie positive. En revanche, la forme quadratique $\psi_y := \psi(y, \cdot)$ est nécessairement non définie. En effet, il découle directement de (27) que (a) : $y = 0 \implies \psi_y \equiv 0$; mais les coordonnées normales en un point étant des isométries radiales, nous avons aussi $\varphi_y(y) = \varphi_0(y)$ et donc, par nouvelle application de (27) il vient (b) : $y \neq 0 \implies \psi_y(y) = 0$. Afin de mieux comprendre l'approche riemannienne de la courbure, nous allons voir que pour tout y voisin de 0, la forme quadratique ψ_y est dégénérée et que son noyau contient toujours y : plus précisément, (b) doit être complétée par une implication plus forte, soit (c) : $y \neq 0 \implies y \in \text{Ker}(\psi_y)$. Si nous fixons $y \neq 0$, alors pour tout z l'identité (27) entraîne que $\varphi_y(\varepsilon z) = \varphi_0(\varepsilon z) + \psi_y(\varepsilon z) + o(\varepsilon^2)$, pour tout réel ε (assez petit) et donc $\varphi_y(z) - \varphi_0(z) - \psi_y(z) = o(1)$: ceci n'est possible que si $\psi_y = \varphi_y - \varphi_0$. Si nous notons Φ_y et Ψ_y les endomorphismes (symétriques) de \mathbb{R}^n associé respectivement à φ_y et ψ_y , alors $\Psi_y = \Phi_y - \Phi_0$: comme $\Phi_0(y) = y$ (Φ_0 est l'identité de \mathbb{R}^n) nous avons :

$$(28) \quad \Psi_y(y) = 0 \iff \Phi_y(y) = y$$

L'implication (c) est donc une forme équivalente du théorème (très important) suivant.

18. Nous utilisons les notations standards $\gamma_{\mu\nu,\sigma} := \partial \gamma_{\mu\nu} / \partial x^\sigma$ et $\gamma_{\mu\nu,\sigma\tau} := \partial^2 \gamma_{\mu\nu} / \partial x^\sigma \partial x^\tau$.

19. La norme de Frobenius $|A|$ d'une matrice $A = (a^i_j)$ (supposée $n \times m$ par exemple) est définie comme la trace de la matrice $A^* A$; elle correspond donc à la norme euclidienne standard sur \mathbb{R}^{nm} , mais n'est pas subordonnée à un couple de normes sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m ; elle vérifie cependant la sous-multiplicativité en ce sens que (lorsque le produit matriciel AB existe) $|AB| \leq |A||B|$. En particulier, si X et Y sont des matrices colonnes $n \times 1$ et si A est une matrice $n \times n$ alors $|X^* A Y| \leq |X||A||Y|$.

Théorème 3.3. Soit $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ X$, où X la carte associée à des coordonnées normales en $X(0)$; pour $y \in \mathbb{R}^n$ fixé et suffisamment petit, si Φ_y désigne l'endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n associé à la forme quadratique $z \mapsto \varphi_y(z) = z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(y)$, alors :

$$(29) \quad \Phi_y(y) = y$$

Preuve heuristique. Le cas $y = 0$ étant immédiat, fixons $y \neq 0$ petit²⁰ et $\varepsilon > 0$ (supposé tendre vers 0). Premièrement, la carte X étant une isométrie radiale (issue de X) :

$$(30) \quad \varphi_y(\pm \varepsilon y) = |\varepsilon y|^2$$

Deuxièmement, par l'inégalité triangulaire majorante combinée au fait que $\rho_X(0, \cdot) = |\cdot|$

$$(31) \quad |y + z| = \rho_X(0, y + z) \leq \rho_X(0, y) + \rho_X(y, y + z) = |y| + \rho_X(y, y + z)$$

Si maintenant z est un vecteur de \mathbb{R}^n dans l'ensemble de niveau $\{\varphi_y(\cdot) = |\varepsilon y|^2\}$, alors (c.f. Proposition 3.1), nous savons que $\rho_X(y, y + z)^2 \sim \varphi_y(\varepsilon z) = |\varepsilon y|^2$ dans la limite où $\varepsilon \rightarrow 0$: pour la suite de l'argument heuristique, nous identifions $\rho_X(y, y + z)$ et $|\varepsilon y|$, de sorte que²¹ l'inéquation (31) devient (approximativement) $|y + z| \leq (1 + \varepsilon)|y|$. L'inégalité triangulaire minorante, nous donnant de même $|y + z| \geq (1 - \varepsilon)|y|$, nous obtenons :

$$(32) \quad \varphi_y(z) = |\varepsilon y|^2 \implies (1 - \varepsilon)|y| \leq |y + z| \leq (1 + \varepsilon)|y|$$

Comme φ_y est définies positives, $\{\varphi_y(\cdot) = |\varepsilon y|^2\}$ est un ellipsoïde de centre²² 0 : par le « théorème spectral » (30) et (32) entraînent que y est une des directions principales de φ_y (voir Fig. 2). De manière équivalente, il existe un réel λ t.q. $\Phi_y(y) = \lambda y$ et comme $|y|^2 = \varphi_y(y) = \langle y | \Phi_y(y) \rangle = \lambda |y|^2$ et que $y \neq 0$, nous obtenons $\lambda = 1$ et donc $\Phi_y(y) = y$. □

3.4. Il est possible de démontrer directement le Théorème A' (et donc le Théorème A) directement à partir du Théorème 3.3.

Preuve du Théorème A'. Soit $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ X$, où X est la carte associée à des coordonnées normales en $X = X(0)$ et soit $h \in \mathcal{Q}^+(\mathbb{R}^n)$ le hessien métrique associé. Pour $y \in \mathbb{R}^n$ fixé et suffisamment petit, Φ_y et Ψ_y sont les endomorphismes symétriques associées respectivement au forme quadratique φ_y et ψ_y , de sorte que $\langle u | \Phi_y(v) \rangle = u^\mu v^\nu \gamma_{\mu\nu}(0)$ et $\langle u | \Psi_y(v) \rangle = u^\mu v^\nu y^\sigma y^\tau \gamma_{\mu\nu, \sigma\tau}(0) = h(u, v, y, y)$, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^n$. Le Théorème 3.3 affirme que $\Phi_y(y) = y$, ce qui d'après (28) est équivalent à $\Psi_y(y) = 0$; de la relation entre h et Ψ_y , nous tirons que $0 = \langle z | \Psi_y(y) \rangle = h(z, y, y, y)$. □

20. On pourra supposer par exemple que $|y|$ est majorée par le rayon d'injectivité de l'exponentielle de Riemann en $X(0)$.

21. C'est le point de l'heuristique qu'il est difficile de rendre rigoureux, sans rentrer dans des calculs d'approximation assez lourds.

22. Notons qu'ici l'heuristique tient au fait que (dans la limite où $\varepsilon \rightarrow 0$) l'ellipsoïde $\{\varphi_y(\cdot) = |\varepsilon y|^2\}$ est une approximation $\{\rho_X(y, y + \cdot) = |\varepsilon y|\}$.

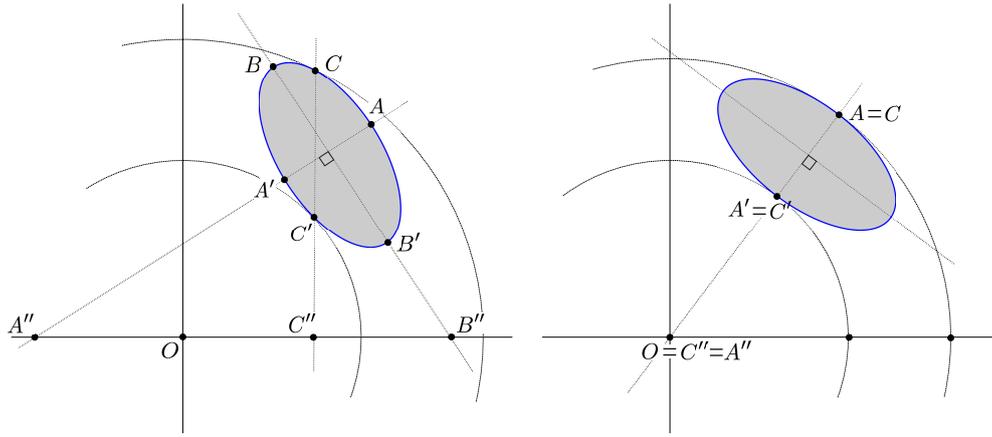


FIGURE 2. Soit \mathcal{E} une ellipse du plan (affine) euclidien incluse dans l'anneau déterminé par deux cercles de centre commun O et de rayon différent. Nous notons A et A' (resp. B et B') les deux points de \mathcal{E} que déterminent son petit (resp. grand) axe. Si nous supposons que \mathcal{E} est tangente en chacun des deux cercles et si C et C' sont les deux points de tangence, alors la droite (CC') est parallèle au petit axe (AA') ssi A et A' sont alignés avec le centre O des deux cercles et dans ce cas $\{C, C'\} = \{A, A'\}$. De même (CC') est parallèle au grand axe (BB') ssi B, B' et O sont alignés et dans ce cas $\{C, C'\} = \{B, B'\}$.

3.5. L'argument heuristique donné au § 3.3 pour justifier le Théorème 3.3 est basé sur les symétries des ellipsoïdes (et donc sur le « *théorème spectral* ») : il se trouve que l'équation $\Phi_y(y) = y$ peut être utilisée pour démontrer l'identité cyclique de Riemann du Théorème A (c.f. § 3.6 infra) : nous allons pour cela réécrire le Théorème 3.3 (et le démontrer rigoureusement) sous une forme équivalente que nous appelons le « *lemme de Gauss spectral* ». Notons que sous l'aspect technique de son énoncé donné ci-dessous, se cache un résultat de la géométrie riemannienne très important et très intuitif – le « *lemme de Gauss géométrique* » – affirmant que les géodésiques issues d'un point sont orthogonales (pour la métrique riemannienne) aux hypersphères centrées en ce point. (Dans l'Appendice A, nous donnons une analyse détaillée de l'équivalence entre le lemme de Gauss géométrique et le lemme de Gauss spectral.)

Théorème 3.4 (Lemme de Gauss spectral). Soit X un point d'une variété riemannienne (M, g) de dimension n et soient \mathbf{X} la carte associée à un système de coordonnées normales en X ; si nous notons $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$, alors pour tout $y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$ (petit) :

$$(33) \quad (\forall \mu) \quad \gamma_{\mu\nu}(y)y^\nu = y^\nu \delta_{\mu\nu}$$

Preuve du Théorème 3.4 (Spivak in [Spi99]). Soit $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$, où \mathbf{X} est la carte associée à des coordonnées x normales en X : nous allons montrer que $y^\mu \gamma_{\mu\nu}(y) = y_\nu$ (avec $y_\nu := y^\epsilon \delta_{\epsilon\nu}$). Pour voir cela, considérons que $t \mapsto \xi(t)$ une géodésique (inertielle) issue de X ; dans le système de coordonnées x , les composantes de ξ , i.e. les $\xi^i(t)$ t.q. $\xi(t) = \mathbf{X}(\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$, permettent d'écrire les équations géodésiques soient :

$$(\forall \sigma) \quad \ddot{\xi}^\sigma(t) + \dot{\xi}^\mu(t)\dot{\xi}^\nu(t)\mathbf{C}^\sigma_{\mu\nu}(\xi(t)) \equiv 0$$

Or, le système x étant supposé normal en X , les composantes de ξ sont les applications linéaires $t \mapsto \xi^\mu(t) = ty^\mu$, où $y^\mu = \dot{\xi}^\mu(0)$. Ainsi, pour $t = 1$ et $1 \leq \sigma \leq n$:

$$0 = y^\mu y^\nu \mathbf{C}^\sigma_{\mu\nu}(\xi(tx)) = y^\mu y^\nu \mathbf{C}_{\mu\nu,\sigma}(\xi(tx))$$

L'expression des symboles de Christoffel nous permet d'obtenir l'identité différentielle :

$$(34) \quad 0 = y^\mu y^\nu \left(\frac{1}{2} \gamma_{\sigma\nu,\mu}(y) + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\sigma,\nu}(y) - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu,\sigma}(y) \right) = y^\mu y^\nu \left(\gamma_{\mu\sigma,\nu}(y) - \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu,\sigma}(y) \right)$$

Soit $S_\nu(y) := y^\mu \gamma_{\mu\nu}(y)$: dans la suite nous noterons $S_{\nu,\epsilon}(y)$ la dérivée partielle de $S_\nu(y)$ par rapport à y^ϵ . Alors, en dérivant partiellement par rapport à y^σ , il vient

$$S_{\nu,\sigma}(y) = \delta_{\mu\sigma} \gamma_{\mu\nu}(y) + y^\mu \gamma_{\mu\nu,\sigma}(y) \quad \text{i.e.} \quad y^\mu \gamma_{\mu\nu,\sigma}(y) = S_{\nu,\sigma}(y) - \gamma_{\sigma\nu}(y)$$

Nous pouvons alors transformer l'équation (34) comme suit

$$\begin{aligned} 0 = y^\nu y^\mu \gamma_{\mu\sigma,\nu}(y) - \frac{1}{2} y^\mu y^\nu \gamma_{\mu\nu,\sigma}(y) &= y^\nu (S_{\sigma,\nu}(y) - \gamma_{\nu\sigma}(y)) - \frac{1}{2} y^\mu (S_{\nu,\sigma}(y) - \gamma_{\sigma\mu}(y)) \\ (y^\epsilon \gamma_{\sigma\epsilon}(y) = S_\sigma(y)) &= y^\nu S_{\sigma,\nu}(y) - S_\sigma(y) - \frac{1}{2} (y^\mu S_{\nu,\sigma}(y) - S_\sigma(y)) \\ &= y^\nu S_{\sigma,\nu}(y) - \frac{1}{2} (y^\mu S_{\nu,\sigma}(y) + S_\sigma(y)) \\ &= y^\nu S_{\sigma,\nu}(y) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y^\sigma} (y^\mu S_\mu(y)) \end{aligned}$$

Or $y^\mu S_\mu(y) = y^\mu y_\mu$ et par suite (avec, par un abus licite $\partial(y^\mu y_\mu)/\partial y^\sigma = 2y_\sigma$)

$$0 = y^\nu S_{\sigma,\nu}(y) - y_\sigma = y^\nu \frac{\partial}{\partial y^\nu} (S_\sigma(y) - y_\sigma)$$

Finalement, $S_\sigma(y) - y_\sigma = S_\sigma(0) = 0$ pour tout y dans un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n . □

3.6. Nous donnons maintenant une première preuve de l'identité cyclique de Riemann tirée d'un « calcul touffu »²³ de Spivak (c.f. [Spi99, Chap 4. Prop. 4].

Preuve du Théorème A. Soit X la carte associée à un système de coordonnées x normal en X et $y = (y^1, \dots, y^n)$ (petit) arbitrairement pris dans \mathbb{R}^n . Pour σ fixé, le lemme de Gauss spectral en (33) entraîne $y^\mu \gamma_{\mu\sigma}(y) = y^\mu \delta_{\mu\sigma}$; soit $1 \leq \nu \leq n$ et dérivons une première fois par rapport à y^ν : nous obtenons $\gamma_{\nu\sigma}(y) + y^\mu \gamma_{\mu\sigma,\nu}(y) = \delta_{\nu\sigma}$, soit encore $y^\mu \gamma_{\mu\sigma,\nu}(y) = \delta_{\nu\sigma} - \gamma_{\nu\sigma}(y)$. Si nous multiplions par y^ν alors, en appliquant (une nouvelle fois) (33), il vient : $y^\nu y^\mu \gamma_{\mu\sigma,\nu}(y) = y^\nu \delta_{\nu\sigma} - y^\nu \gamma_{\nu\sigma}(y) = 0$. Par suite, pour tout t nous avons :

$$(35) \quad t^2 y^\nu y^\mu \gamma_{\mu\sigma,\nu}(ty) = 0$$

en dérivant cette dernière identité par rapport à t il vient :

$$0 = 2ty^\nu y^\mu \gamma_{\mu\sigma,\nu}(ty) + t^2 y^\nu y^\mu y^\tau \gamma_{\mu\sigma,\nu\tau}(ty) = t^2 y^\nu y^\mu y^\tau \gamma_{\mu\sigma,\nu\tau}(ty)$$

où la dernière égalité est obtenue grâce à (35). Finalement, $y^\nu y^\mu y^\tau \gamma_{\mu\sigma,\nu\tau}(ty) = 0$ et pour $t = 0$ il vient $0 = y^\nu y^\mu y^\tau \gamma_{\mu\sigma,\nu\tau}(0)$ (nous avons utilisé la symétrie $\gamma_{\mu\sigma,\nu\tau}(0) = \gamma_{\sigma\mu,\nu\tau}(0)$). En permutant les indices, il vient :

$$(36) \quad 0 = y^\nu y^\mu y^\tau \left(\gamma_{\sigma\mu,\nu\tau}(0) + \gamma_{\sigma\nu,\tau\mu}(0) + \gamma_{\sigma\tau,\mu\nu}(0) \right)$$

23. « hairy calculation ».

ce qui peut être vu comme la nullité d'un produit scalaire dans \mathbb{R}^{n^3} : comme $y = (y^1, \dots, y^n)$ est arbitraire dans \mathbb{R}^n , nous en déduisons l'identité cyclique de Riemann²⁴.

□

4. Lemme de Milnor

4.1. Nous revenons ici sur le Lemme de Milnor concernant les positions relatives des sous-espaces vectoriels $\mathcal{Q}_B^\pm(E)$ et $\mathcal{Q}_C^\pm(E)$ du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{Q}^\pm(E)$ des formes quadrilinéaires sur le \mathbb{R} -espace vectoriel E qui satisfont les symétries/antisymétries 1 et 2. (Le Lemme de Milnor proprement dit concerne l'espace $\mathcal{Q}^-(E)$: c.f. [Mil63, Lemma 9.3].)

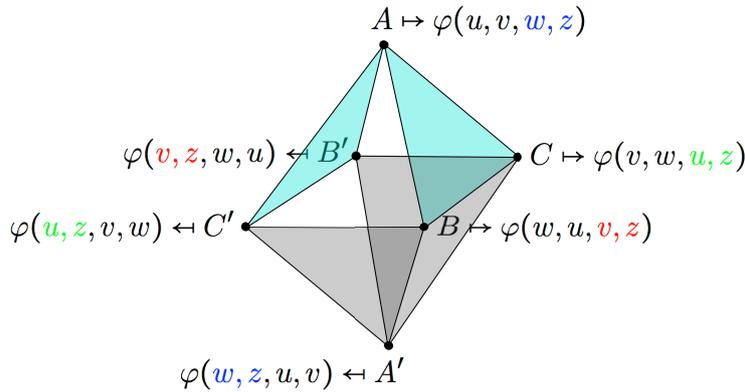


FIGURE 3. Diagramme de Milnor.

Lemme 4.1. Dans $\mathcal{Q}^\epsilon(E)$ (avec $\epsilon = \pm 1$) nous avons

$$(SC) \implies (SB)$$

Preuve (i) – (D’après Milnor). Soit O le point de \mathbb{R}^3 de coordonnées $(0, 0, 0)$; pour tout point A de \mathbb{R}^3 , nous notons A' l'image de A dans la symétrie centrale de centre O (avec la convention que $A'' = A$). Nous considérons alors que A, B, C, A', B', C' sont les sommets d'un octaèdre (régulier) de \mathbb{R}^3 de centre O et que A, B, C sont les trois sommets d'une même face de l'octaèdre. Étant donné $U \in \mathcal{Q}_C^\epsilon(E)$ pour $\epsilon = \pm 1$, chaque sommet – disons H – de l'octaèdre est associé au réel $\rho(H)$ correspondant à la valeur de U sur une permutation (a, b, c, d) du quadruplet (u, v, w, z) et déterminée par les deux conditions :

$$(C1) : (\rho(A), \rho(B), \rho(C)) = (U(u, v, w, z), U(u, w, z, v), U(u, z, v, w))$$

$$(C2) : \rho(H) = U(u, v, w, z) \iff \rho(H') = U(w, z, u, v)$$

24. Le membre droit de (36) représente un produit scalaire dans \mathbb{R}^{n^3} , où les coordonnées de cartésiennes sont indexées par les triplets (μ, ν, τ) , pour $1 \leq \mu, \nu, \tau \leq n$. Si nous notons $\gamma_{\sigma\{\mu, \nu\tau\}}$ la somme de Jacobi associé à $\gamma_{\sigma\mu, \nu\tau}(0)$ sur les indices μ, ν, τ , alors il découle de (36) et du fait que (y^1, \dots, y^n) est arbitraire dans \mathbb{R}^n , que $\xi^{\mu\nu\tau} \gamma_{\sigma\mu, \nu\tau}(0) = 0$ pour tout $(\xi^{\mu\nu\tau}) \in \mathbb{R}^{n^3}$: cela entraîne que tous les $\gamma_{\sigma\mu, \nu\tau}(0)$ sont nuls.

(voir Figure 3). D'une part, l'hypothèse (SC) nous donne $\rho(A) + \rho(B) + \rho(C) = 0$; mais d'autre part d'après (S1 $^\epsilon$) et (S2 $^\epsilon$), il vient

$$\begin{aligned} \rho(A) + \rho(B') + \rho(C') &= U(u, v, w, z) + U(z, v, u, w) + U(v, w, u, z,) \\ &= \epsilon^2 U(v, u, z, w) + \epsilon^2 U(v, z, w, u) + U(v, w, u, z,) \\ &= U(v, u, z, w) + U(v, z, w, u) + U(v, w, u, z,) \end{aligned}$$

et par suite l'hypothèse (SC) assure aussi que $\rho(A) + \rho(B') + \rho(C') = 0$ de sorte que

$$(37) \quad 2\rho(A) + \rho(B) + \rho(C) + \rho(B') + \rho(C') = 0$$

De même $\rho(A') + \rho(B) + \rho(C) = \rho(A') + \rho(B') + \rho(C') = 0$, ce qui donne

$$(38) \quad 2\rho(A') + \rho(B) + \rho(C) + \rho(B') + \rho(C') = 0$$

En retranchant (37) et (38) il vient $\rho(A) = \rho(A')$ et donc l'identité (SB) est satisfaite. □

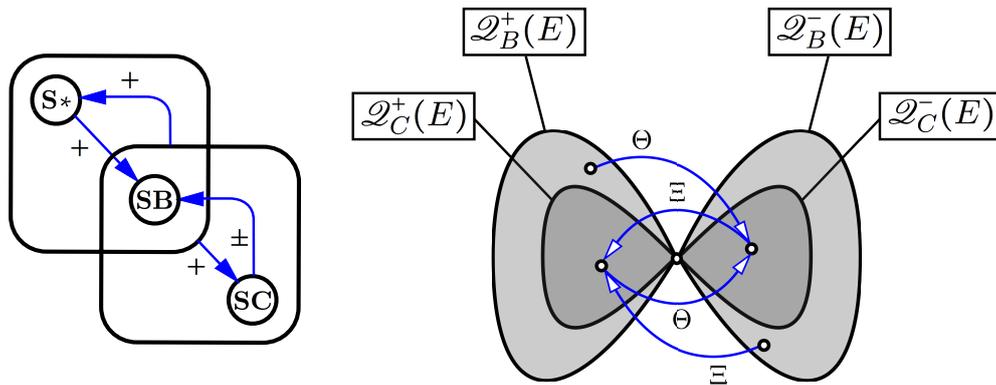


FIGURE 4. (gauche) : Diagrammes d'implications reliant l'identité de Moore (S*) aux identités de bisymétrie (SB) et de cyclicité (SC); les implications concernant (S*) ne sont valables que dans $\mathcal{Q}^+(E)$. L'implication (SC) \implies (SB) signifie l'inclusion $\mathcal{Q}_C^\epsilon(E) \subset \mathcal{Q}_B^\epsilon(E)$ (pour $\epsilon = \pm 1$). (droite) : Représentation des positions relatives des espaces vectoriel $\mathcal{Q}_B^\pm(E)$ et $\mathcal{Q}_C^\pm(E)$. L'application linéaire $\Theta : \mathcal{Q}_B^+(E) \rightarrow \mathcal{Q}_B^-(E)$ est définie de sorte que $V = \Theta(U)$ ssi

$$V(y, u, x, u) = U(y, x, u, v) - U(y, u, v, x)$$

L'images de Θ coincide avec $\mathcal{Q}_C^-(E)$. De même $\Xi : \mathcal{Q}_B^-(E) \rightarrow \mathcal{Q}_B^+(E)$ est définie de sorte que $U = \Theta(V)$ ssi

$$U(y, u, x, u) = \frac{1}{3}V(y, x, u, v) + \frac{1}{3}(y, u, v, x)$$

L'images de Ξ coincide avec $\mathcal{Q}_C^+(E)$. La restriction bilatérale $\Theta : \mathcal{Q}_C^+(E) \rightarrow \mathcal{Q}_C^-(E)$ est un isomorphisme dont l'isomorphisme réciproque est $\Xi : \mathcal{Q}_C^-(E) \rightarrow \mathcal{Q}_C^+(E)$. L'importance toute particulière de l'identité de Moore est due au fait que pour $U \in \mathcal{Q}^+(E)$ on a $U \in \mathcal{Q}_C^+(E)$ ssi $U(y, y, y, x) \equiv 0$.

4.2. Le Lemme 4.1 à des conséquences importantes qui peuvent être établies de manière très simple. Ces conséquences vont nous permettre de mieux comprendre les relations (12) et (13) qui existent entre le tenseur hessien métrique H et le tenseur de Riemann-Christoffel R . D'abord, remarquons si $U \in \mathcal{Q}_B^+(E)$, alors la forme quadrilinéaire V t.q.

$$(39) \quad V(y, v, x, u) = U(y, x, u, v) - U(y, u, v, x) =: \Theta(U)$$

appartient à $\mathcal{Q}_B^-(E)$. Il suffit de vérifier l'antisymétrie 1 de V ainsi que la bisymétrie. Pour l'antisymétrie 1 nous avons (grâce à la bisymétrie et la symétrie 2 de U) :

$$\begin{aligned} V(v, y, x, u) &= U(v, x, y, u) - U(v, u, x, y) \\ &= -(U(y, x, v, u) - U(y, u, v, x)) = -V(y, v, x, u) \end{aligned}$$

Pour la bisymétrie de V , nous écrivons (avec les symétries 1 et 2 et la bisymétrie de U) :

$$\begin{aligned} V(x, u, y, v) &= U(x, y, u, v) - U(x, v, u, y) \\ &= U(y, x, v, u) - U(y, u, v, x) = V(y, v, x, u) \end{aligned}$$

Ainsi Θ définie en (39) réalise une application linéaire de $\mathcal{Q}_B^+(E)$ and $\mathcal{Q}_B^-(E)$. Ici, il se produit un « *petit miracle* » : $V = \Theta(U)$ vérifie aussi la cyclicité (SC). En effet, grâce aux symétries 1 et 2 de U nous avons

$$\begin{aligned} V(y, x, u, v) + V(y, u, v, x) &= (U(y, u, x, v) - U(y, v, x, u)) + (U(y, v, u, x) - U(y, x, u, v)) \\ &= U(y, u, x, v) - U(y, x, u, v) \\ &= -V(y, v, x, u) \end{aligned}$$

d'où nous déduisons que V vérifie bien (SC). En conclusion $\Theta : \mathcal{Q}_B^+(E) \rightarrow \mathcal{Q}_B^-(E)$ est une application linéaire dont l'image $\Theta(\mathcal{Q}_B^+(E))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{Q}_B^-(E)$. Or, d'après le lemme de Milnor (c.f. Lemme 4.1) il se trouve que $\mathcal{Q}_C^\epsilon(E)$ est une sous-espace vectoriel de $\mathcal{Q}_B^\epsilon(E)$, pour $\epsilon = \pm 1$: nous allons montrer que $\Theta(\mathcal{Q}_B^+(E)) = \mathcal{Q}_C^-(E)$ et que la restriction bilatérale $\Theta : \mathcal{Q}_C^+(E) \rightarrow \mathcal{Q}_C^-(E)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel. En effet, si nous supposons que $V = \Theta(U)$ avec $U \in \mathcal{Q}_C^+(E)$, alors

$$\begin{aligned} V(y, x, v, u) + V(y, u, v, x) &= U(y, v, x, u) - U(y, u, x, v) + U(y, v, u, x) - U(y, x, u, v) \\ &= 2U(y, v, x, u) - U(y, u, x, v) + (U(y, u, v, x) + U(y, v, x, u)) \\ &= 3U(y, v, x, u) \end{aligned}$$

Par suite, si pour toute forme quadratique V sur E , nous posons $U = \Xi(V)$ ssi

$$(40) \quad U(y, v, x, u) = \frac{1}{3}V(y, x, v, u) + \frac{1}{3}V(y, u, v, x)$$

alors $V = \Theta(U)$ entraîne $U = \Xi(V)$ dès que $U \in \mathcal{Q}_C^+(E)$. Or, par des calculs analogues à ceux réalisés pour Θ , il est facile de vérifier que Ξ réalise une application linéaire de $\mathcal{Q}_B^-(E)$ dans $\mathcal{Q}_B^+(E)$ dont l'image est $\mathcal{Q}_C^+(E)$. Les restrictions bilatérales $\Theta : \mathcal{Q}_C^+(E) \rightarrow \mathcal{Q}_C^-(E)$ et $\Xi : \mathcal{Q}_C^-(E) \rightarrow \mathcal{Q}_C^+(E)$ de Θ et Ξ définies respectivement en (40) et (39) sont donc bien des isomorphismes qui sont inverses l'un de l'autre (voir Fig. 4). La proposition suivante résume les résultats établis dans ce paragraphe.

Proposition 4.2. Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n (finie) et $\Theta : \mathcal{Q}^+(E) \rightarrow \mathcal{Q}^-(E)$ et $\Xi : \mathcal{Q}^-(E) \rightarrow \mathcal{Q}^+(E)$ les application linéaires t.q.

$$\begin{aligned} V = \Theta(U) &\iff \forall u, v, w, z \in E, \quad V(u, v, w, z) = U(u, w, v, z) - U(u, z, v, w) \\ U = \Xi(V) &\iff \forall u, v, w, z \in E, \quad U(u, v, w, z) = \frac{1}{3}V(u, w, v, z) + \frac{1}{3}V(u, z, v, w) \end{aligned}$$

Alors $\Theta(\mathcal{Q}_B^+(E)) = \mathcal{Q}_C^-(E)$ et $\Xi(\mathcal{Q}_B^-(E)) = \mathcal{Q}_C^+(E)$; de plus

$$\forall (U, V) \in \mathcal{Q}_C^+(E) \times \mathcal{Q}_C^-(E), \quad V = \Theta(U) \iff U = \Xi(V)$$

En d'autres termes les restrictions bilatérales $\Theta : \mathcal{Q}_C^+(E) \rightarrow \mathcal{Q}^-(E)$ et $\Xi : \mathcal{Q}_C^-(E) \rightarrow \mathcal{Q}^+(E)$ sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

4.3. Le calcul matriciel, utilisé en algèbre linéaire se généralise au cas multilinéaire et plus généralement au calcul tensoriel sur les variétés : on parle de « calcul en composantes ». Pour fixer les idées, considérons l'espace vectoriel $\mathcal{Q}(E)$ des formes quadrilinéaires sur le \mathbb{R} -espace vectoriel E (supposé de dimension n); le calcul en composantes consiste alors à fixer une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E , ainsi que la base $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ de l'espace dual E^* constituée des formes coordonnées associées au ε_i (i.e. $\varepsilon^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$). Tout $U \in \mathcal{Q}(E)$ est définie par ses n^4 composantes $U_{\mu\nu\tau\sigma}$ de sorte que²⁵ $U = U_{\mu\nu\sigma\tau}\varepsilon^\mu \otimes \varepsilon^\nu \otimes \varepsilon^\sigma \otimes \varepsilon^\tau$. Cette identité traduit le fait que les $\varepsilon^\mu \otimes \varepsilon^\nu \otimes \varepsilon^\sigma \otimes \varepsilon^\tau$ forment une base de l'espace $\mathcal{Q}(E)$ qui est donc un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n^4 : ainsi les symétries possibles de U se traduire de manière équivalentes par des relations sur les composantes (par exemple, la bi-symétrie de U s'écrit $U_{\mu\nu\sigma\tau} = U_{\tau\sigma\mu\nu}$: la traduction en composantes des autres symétries est un exercice simple laissé au soin du lecteur). Nous avons déjà vu²⁶ que Θ défini par (39) envoie $\mathcal{Q}_C^+(E)$ sur $\mathcal{Q}_C^-(E)$ de manière bijective et que l'isomorphisme inverse est l'application $\Xi : \mathcal{Q}_C^-(E) \rightarrow \mathcal{Q}_C^+(E)$ définie en (40). Nous allons retrouver l'expression de Ξ par un calcul en composante qui ne présuppose pas le résultat. Soit $V = \Theta(U)$ pour $U \in \mathcal{Q}_C^+(E)$, ce qui signifie que $V_{\mu\nu\sigma\tau} = U_{\mu\sigma\nu\tau} - U_{\mu\tau\nu\sigma}$. Or, la cyclicité et la symétrie 2 de U assure que $U_{\mu\tau\nu\sigma} = -U_{\mu\nu\sigma\tau} - U_{\mu\sigma\tau\nu}$ et donc $V_{\mu\nu\sigma\tau} = U_{\mu\nu\sigma\tau} + 2U_{\mu\sigma\nu\tau}$. Cela se traduit sous deux formes matricielles équivalentes, soient :

$$(41) \quad \begin{pmatrix} V_{\mu\nu\sigma\tau} \\ V_{\mu\sigma\nu\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\mu\nu\sigma\tau} \\ U_{\mu\sigma\nu\tau} \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix} U_{\mu\nu\sigma\tau} \\ U_{\mu\sigma\nu\tau} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{\mu\nu\sigma\tau} \\ V_{\mu\sigma\nu\tau} \end{pmatrix}$$

De la deuxième relation matricielle, nous tirons que

$$U_{\mu\nu\sigma\tau} = \frac{1}{3}(2V_{\mu\sigma\nu\tau} - V_{\mu\nu\sigma\tau}) = \frac{1}{3}(2V_{\mu\sigma\nu\tau} + V_{\mu\sigma\tau\nu} + V_{\mu\tau\nu\sigma}) = \frac{1}{3}(V_{\mu\sigma\nu\tau} + V_{\mu\tau\nu\sigma})$$

qui n'est autre qu'une version de (40) en composantes.

25. Nous reviendrons sur le calcul tensoriel ; ici nous n'avons pas besoin de toute la théorie : disons que si U (resp. V) est une forme p -linéaire (resp. q -linéaire) sur E alors $U \otimes V$ est la la forme $p + q$ -linéaire t.q.

$$U \otimes V(u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q) = U(u_1, \dots, u_p)V(v_1, \dots, v_q)$$

Il est évident que le produit tensoriel est non commutatif.

26. Le raisonnement écrit dans le cas de \mathbb{R}^n reste valable dans le cas d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , sans difficultés supplémentaires.

4.4. Soit x un système de coordonnées normales en un point X de M ; alors (c.f. Théorème C) les x -composantes du tenseur hessien métrique H pris au point X coïncide avec les symboles de Riemann, ce qui s'écrit $H_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X)$. Par suite, (c.f. Théorème A) la forme quadrilinéaire $H|_X$ appartient à $\mathcal{Q}_C^+(T_X M)$. Or (c.f. Définition B), les x -composantes du tenseur de Riemann-Christoffel R sont définies à partir des x composantes du tenseur hessien métrique H de sorte que $R_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = H_{\mu\sigma\nu\tau}(X) - H_{\mu\tau\nu\sigma}(X)$. Cela entraîne par une première application de la Proposition 4.2 que la forme quadrilinéaire $R|_X$ appartient à $\mathcal{Q}_C^-(T_X M)$ et par une deuxième application de cette même proposition, il vient :

$$(42) \quad H_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = \frac{1}{3}R_{\mu\sigma\nu\tau}(X) + \frac{1}{3}R_{\mu\tau\nu\sigma}(X)$$

Proposition 4.3 (Formule de Riemann). *Si $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ X$, où X est la carte associée à un système de coordonnées normales en X alors, pour y sur un voisinage de 0 (dans \mathbb{R}^n) :*

$$(43) \quad \gamma_{\mu\nu}(y) = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{3}y^\sigma y^\tau R_{\mu\sigma\nu\tau}(X) + o(|y|^2)$$

Preuve. Du fait que $g_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu}$ et que $g_{\mu\nu,\sigma}(X) = 0$ (c.f. Proposition 2.4), le développement de Taylor de $\gamma_{\mu\nu}(y)$ au seconde ordre en y s'écrit

$$(44) \quad \gamma_{\mu\nu}(y) = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}y^\sigma y^\tau g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) + o(|y|^2)$$

Or (c.f. Théorème C) les composantes $H_{\mu\nu\sigma\tau}(X)$ du tenseur hessien métrique coïncident avec les symboles de Riemann $g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X)$: par suite, avec (42), le développement (44) devient

$$\gamma_{\mu\nu}(y) = \delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}y^\sigma y^\tau \left(\frac{1}{3}R_{\mu\sigma\nu\tau}(X) + \frac{1}{3}R_{\mu\tau\nu\sigma}(X) \right) + o(|y|^2)$$

La formule de Riemann en (43) s'obtient en regroupant les deux somme identiques. □

5. Lemme de Moore

5.1. Le lemme de Milnor affirme que (pour $\epsilon = \pm 1$) $\mathcal{Q}_C^\epsilon(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{Q}_B^\epsilon(E)$. Quand $\epsilon = +1$, nous dirons que $U \in \mathcal{Q}^+(E)$ satisfait l'**identité de Moore**, ssi :

$$(S^*) \quad U(y, y, y, x) = 0$$

(Pour la différence entre (S*) et (S**) voir Proposition 5.2 infra.) La proposition suivante, complète le lemme de Milnor.

Lemme 5.1 (lemme de Moore). *Dans $\mathcal{Q}^+(E)$ nous avons*

$$\begin{aligned} (i) & : & (SC) \ \& \ (SB) & \implies & (S^*) \\ (ii) & : & (S^*) & \implies & (SB) \\ (iii) & : & (S^*) & \implies & (SC) \end{aligned}$$

Preuve – (D'après Moore [Moo09]). (i) : Si $U \in \mathcal{Q}^+(E)$ vérifie (SC) et (SB), alors

$$0 = U(y, y, y, x) + U(y, y, x, y) + U(y, x, y, y) = 3U(y, y, y, x)$$

et donc U satisfait (S*).

(ii) : Soient $U \in \mathcal{Q}^+(E)$ vérifiant (S^*) et u et v deux vecteurs arbitrairement fixés de E ; alors d'après (S^*) nous avons l'identité polynomiale de $\mathbb{R}[X]$

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 := U(u + Xv, u + Xv, u + Xv, u - Xv) \equiv 0$$

Le coefficient a_2 nous intéresse tout particulièrement : partant de la définition de P en fonction de U , u et v , nous pouvons développer l'expression de a_2 puis simplifier grâce aux symétries 1 et 2 de U , de sorte que :

$$\begin{aligned} a_2 &= -U(u, u, v, v) - U(u, v, u, v) + U(u, v, v, u) \\ &\quad + U(v, v, u, u) + U(v, u, v, u) - U(v, u, u, v) = -U(u, u, v, v) + U(v, v, u, u) \end{aligned}$$

Le fait $P \equiv 0$ nous donne en particulier $a_2 = 0$, soit encore

$$(45) \quad U(u, u, v, v) = U(v, v, u, u)$$

La bisymétrie $U(u, v, w, z) = U(w, z, u, v)$ s'obtient à partir de (45) par polarisation. D'une part, pour la forme quadratique $u \mapsto U(u, u, w, w)$ nous avons

$$U(u, v, w, w) = \frac{1}{2} \left(U(u + v, u + v, w, w) - U(u, u, w, w) - U(v, v, w, w) \right)$$

ce qui entraîne que $U(u, v, w, w) = U(w, w, u, v)$; mais d'autre part si nous considérons la forme quadratique $w \mapsto U(u, v, w, w)$

$$U(u, v, w, z) = \frac{1}{2} \left(U(u, v, w + z, w + z) - U(u, v, w, w) - U(u, v, z, z) \right) = U(w, z, u, v)$$

(utilisant la première et la deuxième symétrie).

(iii) : Soit U dans $\mathcal{Q}^+(E)$ vérifiant (S^*) – et donc **(SB)** par d'après (ii) – et soient v_1, v_2, v_3, v_4 quatre vecteurs de E : si nous posons $w(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1v_1 + X_2v_2 + X_3v_3 + X_4v_4$, alors nous savons d'après les hypothèses faites sur U , que $U(w, w, w, w)$ est le polynôme nul (sur \mathbb{R}) d'indéterminées X_1, X_2, X_3, X_4 ; en particulier, le coefficient de $X_1X_2X_3X_4$ de ce polynôme est nul, i.e.

$$(46) \quad \sum_{\sigma} U[\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4)] = 0$$

où σ décrit l'ensemble des permutations de $\{1, 2, 3, 4\}$ et $U[ijkl] := U(v_i, v_j, v_k, v_l)$. Notons $U[\{ijkl\}]$ la somme de Jacobi²⁷ sur les trois derniers indices. Alors, la somme des 24 termes de (46) peut se réécrire sous la forme

$$(47) \quad \begin{aligned} & \left(U[1\{234\}] + U[1\{243\}] \right) + \left(U[2\{134\}] + U[2\{143\}] \right) \\ & \quad + \left(U[3\{124\}] + U[3\{142\}] \right) + \left(U[4\{123\}] + U[4\{132\}] \right) = 0 \end{aligned}$$

Or par la symétrie 2 de U nous avons²⁸ $U[1\{234\}] = U[1\{243\}]$, $U[2\{134\}] = U[2\{143\}]$, $U[3\{124\}] = U[3\{142\}]$ et $U[4\{123\}] = U[4\{132\}]$ ce qui nous permet de réduire (48) à

$$(48) \quad U[1\{234\}] + U[2\{134\}] + U[3\{124\}] + U[4\{123\}] = 0$$

Enfin en utilisant (S_{\pm}) et **(SB)** il vient $U[1\{234\}] = U[2\{134\}] = U[3\{124\}] = U[4\{123\}]$ et par suite (48) donne directement $U[1\{234\}] = 0$. □

27. Par définition de la somme de Jacobi $U[\{ijkl\}] = U[ijkl] + U[iklj] + U[iljk]$.

28. Par exemple $U[1\{234\}] = U[1234] + U[1342] + U[1423] = U[1243] + U[1324] + U[1432] = U[1\{243\}]$ et de même avec $U[2\{134\}]$, $U[3\{124\}]$ et $U[4\{123\}]$.

Dans l'introduction nous avons utilisé une autre définition de l'identité de Moore (adaptée au Théorème A'), en disant que $U \in \mathcal{Q}^+(E)$ satisfait (S^{**}) ssi $U(x, y, y, y) = 0$. La proposition suivante montre que (S^*) et (S^{**}) sont équivalentes dans $\mathcal{Q}^+(E)$.

Proposition 5.2. *Dans $\mathcal{Q}^+(E)$ nous avons*

$$(S^*) \iff (SC) \iff (S^{**})$$

5.2. Dans ce paragraphe, nous démontrons le Théorème B : l'argument est basé sur le développement au premier ordre des symboles de Christoffel dans le voisinage d'un point X , lorsque les coordonnées considérées sont euclidiennes en ce point.

Lemme 5.3. *Soit $C^\mu_{\sigma\tau}(y) := \mathbf{C}^\mu_{\sigma\tau}(\mathbf{X}(y))$, où \mathbf{X} est la carte d'un système de coordonnées euclidiennes en $X = \mathbf{X}(0)$ et où y est arbitrairement pris dans un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n ; alors*

$$(49) \quad \frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta}(0) = \frac{1}{2} \delta^{\mu\kappa} (h_{\kappa\tau, \sigma\eta} + h_{\kappa\sigma, \eta\tau} - h_{\sigma\tau, \kappa\eta})$$

si, de plus le hessien métrique h en X appartient à $\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^d)$, alors

$$(50) \quad \frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta}(0) = \delta^{\mu\kappa} h_{\kappa\eta, \sigma\tau}$$

Preuve. Par définition des symboles des Christoffels (en fonction des dérivées partielles premières des composantes de la métrique) $C^\mu_{\sigma\mu}(y)$ s'exprime en fonction des $\gamma_{\mu\nu, \sigma}(y)$, où $\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$; la dérivation partielle par rapport à y^η donne alors

$$\frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma^{\mu\kappa}}{\partial y^\eta} (\gamma_{\kappa\tau, \sigma} + \gamma_{\sigma\kappa, \tau} - \gamma_{\sigma\tau, \kappa}) + \frac{1}{2} \gamma^{\mu\kappa} (\gamma_{\kappa\tau, \sigma\eta} + \gamma_{\sigma\kappa, \tau\eta} - \gamma_{\sigma\tau, \kappa\eta})$$

Lorsque les coordonnées sont euclidiennes en X , il vient alors pour $y = 0$:

$$\frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta}(0) = \frac{1}{2} \delta^{\mu\kappa} (h_{\kappa\tau, \sigma\eta} + h_{\sigma\kappa, \tau\eta} - h_{\sigma\tau, \kappa\eta})$$

où nous avons utilisé le fait que $h_{\mu\nu\sigma\tau} = \gamma_{\mu\nu, \sigma\tau}(0) (= g_{\mu\nu, \sigma\tau}(X))$. Maintenant si nous supposons en plus que $h \in \mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^n)$, alors :

$$\frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta}(0) = \frac{1}{2} \delta^{\mu\kappa} ((h_{\kappa\tau, \sigma\eta} + h_{\kappa\sigma, \eta\tau} + h_{\kappa\eta, \tau\sigma}) - (h_{\kappa\eta, \tau\sigma} + h_{\sigma\tau, \kappa\eta})) = \delta^{\mu\kappa} h_{\kappa\eta, \sigma\tau}$$

□

Preuve du Théorème B. $(i) \implies (ii)$: Soit \mathbf{X} la carte d'un système de coordonnées supposée euclidienne en $X = \mathbf{X}(0)$ dont le hessien métrique h (en X) est un élément de $\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^n)$. Pour $y, z \in \mathbb{R}^n$ fixés et $\varepsilon \in \mathbb{R}$, nous notons $r = r(\varepsilon) = \rho_X(\varepsilon y, \varepsilon(y+z))$: si ε est assez petit, il existe une unique géodésique $t \mapsto \xi(t) = \mathbf{X}(\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ de vitesse unité reliant $\mathbf{X}(\varepsilon y)$ à $\mathbf{X}(\varepsilon(y+z))$ par un segment géodésique de longueur r . Cette géodésique est déterminée par sa position initiale $\xi(0) = \mathbf{X}(\varepsilon y)$ et par le vecteur $v = v(\varepsilon) := \dot{\xi}(0)$ t.q.

$$(51) \quad v^\mu v^\nu \gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) = 1$$

de sorte que $\xi(r) = \mathbf{X}(\varepsilon(y+z))$. Le développement de Taylor de $\xi^\mu(t)$ en $t = 0$ s'écrit

$$(52) \quad \xi^\mu(t) = \xi^\mu(0) + t\dot{\xi}^\mu + 1/2 t^2 \ddot{\xi}^\mu(0) + 1/6 t^3 \dddot{\xi}^\mu(0) + t^4 A^\mu(\varepsilon, t)$$

où $A^\mu(\varepsilon, t)$ est bornée pour $(\varepsilon, t) \rightarrow (0, 0)$. Comme $\xi^\mu(r) = \varepsilon y^\mu + \varepsilon z^\mu$ et que $\xi^\mu(0) = \varepsilon y^\mu$, en prenant $t = r(\varepsilon)$ dans (52) il vient (avec $r(\varepsilon) = \varepsilon \mathcal{O}(1)$ et $A^\mu(\varepsilon, r(\varepsilon)) = \mathcal{O}(1)$) :

$$(53) \quad \varepsilon z^\nu = r(\varepsilon) \dot{v}^\mu + 1/2 r^2(\varepsilon) \ddot{\xi}^\mu(0) + 1/6 r^3(\varepsilon) \dddot{\xi}^\mu(0) + \varepsilon^4 \mathcal{O}(1)$$

Rappelons que $\ddot{\xi}^\mu(0)$ et $\dddot{\xi}^\mu(0)$ (au même titre que $\dot{\xi}^\mu(0) = v^\mu$) dépendent de ε : il s'agit de développer ces deux coefficients suivant ε , à partir de l'équation différentielle des géodésiques. Pour $t = 0$, l'équation géodésique donne $\ddot{\xi}^\mu(0) = -v^\sigma v^\tau C^\mu_{\sigma\tau}(\varepsilon y)$ $\ddot{\xi}^\mu(0)$: par suite, comme $C^\mu_{\sigma\tau}(0) = 0$ (les coordonnées sont euclidiennes en X) et que $v^\mu = \mathcal{O}(1)$,

$$\ddot{\xi}^\mu(0) = -v^\sigma v^\tau \left(C^\mu_{\sigma\tau}(0) + \varepsilon y^\eta \frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta}(0) + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1) \right) = -\varepsilon v^\sigma v^\tau y^\eta \frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta}(0) + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1)$$

Enfin, avec l'hypothèse $h \in \mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^n)$, l'équation (50) du Lemme 5.3 assure que

$$(54) \quad \ddot{\xi}^\mu(0) = -\varepsilon v^\sigma v^\tau y^\eta \delta^{\mu\kappa} h_{\sigma\tau\kappa\eta} + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1)$$

Pour $\dddot{\xi}^\mu(0)$, nous évaluons la dérivée de $\dot{\xi}^\mu(t) = -\dot{\xi}^\sigma(t) \dot{\xi}^\tau(t) C^\mu_{\sigma\tau}(\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ par rapport à t en $t = 0$; or d'après (54), nous savons $\dot{\xi}^\tau(0)$ et $\ddot{\xi}^\sigma(0)$ sont dans $\varepsilon \mathcal{O}(1)$ et donc :

$$\begin{aligned} \dddot{\xi}^\mu(0) &= -\ddot{\xi}^\sigma(0) \dot{\xi}^\tau(0) C^\mu_{\sigma\tau}(\varepsilon y) - \dot{\xi}^\sigma(0) \ddot{\xi}^\tau(0) C^\mu_{\sigma\tau}(\varepsilon y) - \dot{\xi}^\sigma(0) \dot{\xi}^\tau(0) \dot{\xi}^\eta(0) \frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta}(\varepsilon y) \\ &= \varepsilon \mathcal{O}(1) - v^\sigma v^\tau v^\eta \left(\frac{\partial C^\mu_{\sigma\tau}}{\partial y^\eta}(0) + \varepsilon \mathcal{O}(1) \right) \end{aligned}$$

soit encore (nouvelle application de l'équation (50) in Lemme 5.3)

$$(55) \quad \dddot{\xi}^\mu(0) = -v^\sigma v^\tau v^\eta \delta^{\mu\kappa} h_{\kappa\eta\sigma\tau} + \varepsilon \mathcal{O}(1)$$

Ainsi, l'équation (53) devient :

$$(56) \quad \varepsilon z^\mu = r v^\mu - \frac{1}{2} \varepsilon r^2 v^\sigma v^\tau y^\eta \delta^{\mu\kappa} h_{\kappa\eta\sigma\tau} - \frac{1}{6} r^3 v^\sigma v^\tau v^\eta \delta^{\mu\kappa} h_{\kappa\eta\sigma\tau} + \varepsilon^4 \mathcal{O}(1)$$

Maintenant, nous pouvons utiliser le fait que $r = \varepsilon \mathcal{O}(1)$ pour écrire

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) &= r^2 v^\mu v^\nu \gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) - \frac{\varepsilon}{2} r^3 \left[\gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) \delta^{\nu\kappa} v^\mu \right] v^\sigma v^\tau y^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2} r^3 \left[\gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) \delta^{\mu\kappa} v^\nu \right] v^\sigma v^\tau y^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} \\ &\quad - \frac{1}{6} r^4 \left[\gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) \delta^{\nu\kappa} v^\mu \right] v^\sigma v^\tau v^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} \\ &\quad - \frac{1}{6} r^4 \left[\gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) \delta^{\mu\kappa} v^\nu \right] v^\sigma v^\tau v^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

soit d'après (51) (et grâce à des symétries sommatoires simples) :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) &= r^2 - \varepsilon r^3 \left[\gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) \delta^{\nu\kappa} v^\mu \right] v^\sigma v^\tau y^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} \\ &\quad - \frac{1}{3} r^4 \left[\gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) \delta^{\nu\kappa} v^\mu \right] v^\sigma v^\tau v^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

soit encore, en utilisant les approximations $\gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) = \delta_{\mu\nu} + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1)$ et $r = \varepsilon \mathcal{O}(1)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) &= r^2 - \varepsilon r^3 \left[(\delta_{\mu\nu} + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1)) \delta^{\nu\kappa} v^\mu \right] v^\sigma v^\tau y^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} \\ &\quad - \frac{1}{3} r^4 \left[(\delta_{\mu\nu} + \varepsilon^2 \mathcal{O}(1)) \delta^{\nu\kappa} v^\mu \right] v^\sigma v^\tau v^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1) \\ &= r^2 - \varepsilon r^3 \left[\delta_{\mu\nu} \delta^{\nu\kappa} v^\mu \right] v^\sigma v^\tau y^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} - \frac{1}{3} r^4 \left[\delta_{\mu\nu} \delta^{\nu\kappa} v^\mu \right] v^\sigma v^\tau v^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1) \\ &= r^2 - \varepsilon r^3 v^\kappa v^\sigma v^\tau y^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} - \frac{1}{3} r^4 v^\kappa v^\sigma v^\tau v^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

Or par hypothèse $h \in \mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^n)$ nous pouvons utiliser les symétries 1 et 2 ainsi que la bi-symétrie de h , de sorte que

$$v^\kappa v^\sigma v^\tau w^\eta h_{\kappa\eta\sigma\tau} = v^\sigma v^\tau v^\kappa w^\eta h_{\sigma\tau\kappa\eta} = h(v, v, v, w) = 0$$

En prenant successivement $w = v$ et $w = y$, il vient finalement

$$(57) \quad \varepsilon^2 z^\mu z^\nu \gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y) = r^2 + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1)$$

Nous pouvons maintenant développer $\gamma_{\mu\nu}(\varepsilon y)$ au second ordre et (57) devient

$$r^2 = \varepsilon^2 z^\mu z^\nu \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{\varepsilon^2}{2} y^\sigma y^\tau \gamma_{\mu\nu, \sigma\tau}(0) \right) + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1) = |\varepsilon z|^2 + \frac{\varepsilon^4}{2} h(z, z, y, y) + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1)$$

(ii) \implies (i) : Soit X la carte d'un système de coordonnées euclidiennes en X et supposons que la métrique $\rho_X(\cdot, \cdot)$ soit reliée à la métrique euclidienne par le fait que pour tout $y, z \in \mathbb{R}^n$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$ (suffisamment petit) :

$$(58) \quad r(\varepsilon) := \rho_X(\varepsilon y, \varepsilon(y+z))^2 = |\varepsilon z|^2 + \frac{\varepsilon^4}{2} h(z, z, y, y) + \varepsilon^5 \mathcal{O}(1)$$

où le hessien métrique h est une forme quadrilinéaire dans $\mathcal{Q}^+(\mathbb{R}^n)$. Pour démontrer que $h \in \mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^n)$, nous allons utiliser l'approximation (58) combinée à la symétrie de la métrique $\rho_X(\cdot, \cdot)$. Etant données y et z arbitrairement fixés, dans \mathbb{R}^n et $0 \neq \varepsilon \in \mathbb{R}$ dans un voisinage de 0, nous savons d'après (58) que

$$(59) \quad h(z, z, y, y) = \frac{2}{\varepsilon^4} \left(r(\varepsilon)^2 - |\varepsilon z|^2 \right) + \varepsilon \mathcal{O}(1)$$

Si $z = y$, alors $r(\varepsilon) = |\varepsilon z|$ et (59) entraîne que $h(z, z, z, z) = 0$. Mais la symétrie de $\rho_X(\cdot, \cdot)$ entraîne que $r(\varepsilon) = \rho_X(\varepsilon(y+z), \varepsilon(y+z) - \varepsilon z)$; une deuxième application (6) permet d'exprimer $h(-z, -z, y+z, y+z)$ en fonction de $r(\varepsilon)$ et par quadrilinéarité il vient :

$$h(z, z, y, y) + h(z, z, y, z) + h(z, z, z, y) + h(z, z, z, z) = \frac{2}{\varepsilon^4} \left(r(\varepsilon)^2 - |\varepsilon z|^2 \right) + \varepsilon \mathcal{O}(1)$$

Du fait que $h(z, z, z, z) = 0$ et grâce aux symétries 1 et 2 de h il vient

$$(60) \quad h(z, z, y, y) + 2h(z, z, z, y) = \frac{2}{\varepsilon^4} \left(r(\varepsilon)^2 - |\varepsilon z|^2 \right) + \varepsilon \mathcal{O}(1)$$

Par une comparaison de (59) et (60) il vient $h(z, z, z, y) = \varepsilon \mathcal{O}(1)$ i.e. $h(z, z, z, y) = 0$. Par le lemme de Moore, nous en déduisons que $h \in \mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^n)$.

□

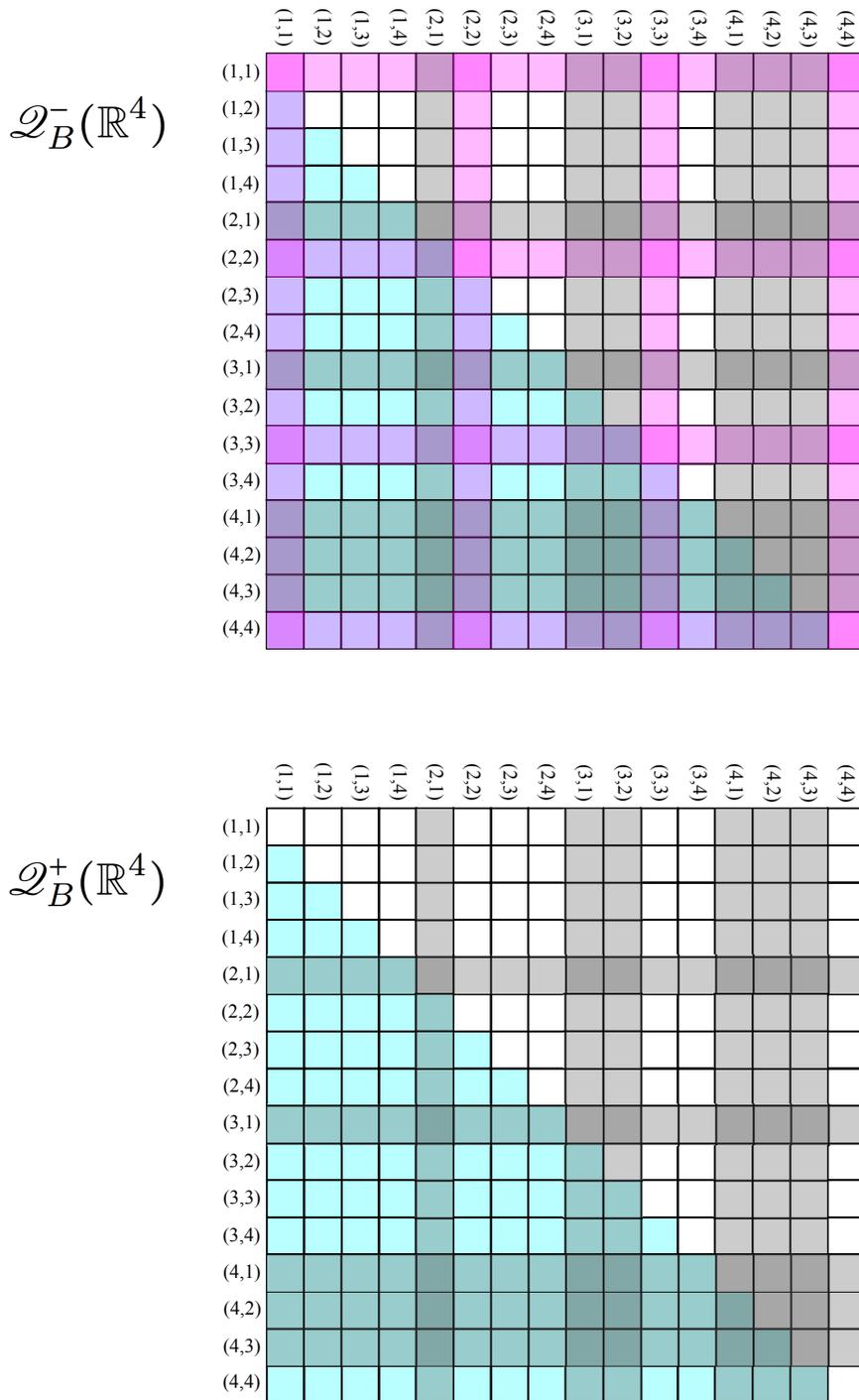


FIGURE 5. Représentation en tableau des couples $((\mu\nu), (\sigma, \tau))$, pour $1 \leq \mu, \nu, \sigma, \tau \leq 4$; les carreaux blancs déterminent un ensemble X de quadruplet (μ, ν, σ, τ) correspondant à un système minimal de composantes $\varphi_{\mu\nu\sigma\tau}$ non-nulles associées à une forme quadrilinéaire dans $\varphi \in \mathcal{Q}_B^\pm(\mathbb{R}^4)$ et permettant de développer φ dans la base des formes quadrilinéaires sur \mathbb{R}^4 formée par les $\varepsilon^\mu \otimes \varepsilon^\nu \otimes \varepsilon^\sigma \otimes \varepsilon^\tau$ et en utilisant les identités

$$\varphi_{\mu\nu\sigma\tau} = \pm\varphi_{\nu\mu\sigma\tau} = \pm\varphi_{\mu\nu\tau\sigma} = \varphi_{\sigma\tau\mu\nu}$$

Ainsi nous retrouvons que

$$\dim(\mathcal{Q}_B^\pm(\mathbb{R}^d)) = \frac{1}{2} \binom{d(d+1)}{2} \left(\frac{d(d+1)}{2} + 1 \right)$$

6. Dimension de certains sous-espaces de $\mathcal{Q}^\pm(\mathbb{R}^d)$

6.1. L'espace $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^d)$ des formes quadrilinéaires sur \mathbb{R}^d ($d \geq 2$) est de dimension d^4 . Si nous notons (comme d'habitude) $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d)$ la base canonique de \mathbb{R}^d , alors pour tout $\varphi \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^d)$ nous avons $\varphi = \varphi_{\sigma\tau\mu\nu} \varepsilon^\sigma \otimes \varepsilon^\tau \otimes \varepsilon^\mu \otimes \varepsilon^\nu$ où les ε^μ sont les formes coordonnées associées aux \mathbf{e}_μ (i.e. $\varepsilon^\mu(\mathbf{e}_\nu) = \delta^\mu_\nu$) et où $\varphi_{\sigma\tau\mu\nu} := \varphi(\mathbf{e}_\sigma, \mathbf{e}_\tau, \mathbf{e}_\mu, \mathbf{e}_\nu)$. Les d^4 réels $\varphi_{\mu\nu\sigma\tau}$ (pour $1 \leq \mu, \nu, \sigma, \tau \leq d$) sont les composantes de φ dans la base de $\mathcal{Q}(\mathbb{R}^d)$ formée par les produits tensoriels $\varepsilon^\sigma \otimes \varepsilon^\tau \otimes \varepsilon^\mu \otimes \varepsilon^\nu$. Nous savons (c.f. Lemme de Milnor) que l'inclusion $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ est toujours valable et nous allons nous intéresser aux cas d'égalité. Si $d = 2, 3$, alors, il est facile de vérifier que l'égalité $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d) = \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ est satisfaite; en effet, pour $\varphi \in \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ et $1 \leq \mu, \sigma, \tau \leq 3$, en prenant $\nu \in \{\mu, \tau\}$ nous avons :

$$(61) \quad \varphi_{\mu\{\nu\sigma\tau\}} = \varphi_{\mu\{\sigma\tau\nu\}} = \varphi_{\mu\{\tau\nu\sigma\}} = \varphi_{\mu\nu\sigma\tau} + \varphi_{\mu\sigma\tau\nu} + \varphi_{\mu\tau\nu\sigma} = 0$$

ce qui entraîne que $\varphi_{\mu\{\nu\sigma\tau\}} = 0$ pour tout $1 \leq \mu, \nu, \sigma, \tau \leq 3$. L'égalité $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d) = \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$, est donc valable lorsque $d = 2, 3$. Un argument dimensionnel (c.f. Corollaire 6.3) montre que l'inclusion $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ est stricte pour $d > 3$; nous pouvons cependant voir cela directement sur un cas particulier. Par exemple, pour $d = 4$, considérons les produits extérieurs $\varepsilon^\mu \wedge \varepsilon^\nu$ représentant les mineurs d'indice (μ, ν) et agissant sur les couples de vecteurs de \mathbb{R}^4 . Alors, il est facile de vérifier que

$$\varphi := (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \otimes (\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4) + (\varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4) \otimes (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2)$$

est bien dans $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^4)$. Or $\varphi \notin \mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^4)$, puisque²⁹ $\varphi_{1234} = 1$ et que $\varphi_{1342} = \varphi_{1423} = 0$, ce qui nous donne $\varphi_{1\{234\}} = \varphi_{1234} + \varphi_{1342} + \varphi_{1423} = \varphi_{1234} = 1$.

6.2. Soit $\varphi \in \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^2)$ ($= \mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^2)$) : alors pour $u, v, w, z \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi(u, v, w, z) &= u^1 v^2 w^1 z^2 \varphi_{1212} + u^2 v^1 w^1 z^2 \varphi_{2112} + u^1 v^2 w^2 z^1 \varphi_{1221} + u^2 v^1 w^2 z^1 \varphi_{2121} \\ &= (u^1 v^2 w^1 z^2 - u^2 v^1 w^1 z^2 - u^1 v^2 w^2 z^1 + u^2 v^1 w^2 z^1) \varphi_{1212} \\ &= (u^1 v^2 - u^2 v^1)(w^1 z^2 - w^2 z^1) \varphi_{1212} \end{aligned}$$

L'espace vectoriel $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^2)$ est donc de dimension 1 et pour tout $\varphi \in \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^2)$

$$\varphi = (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \otimes (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \varphi_{1212}$$

Si $\varphi \in \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^3)$ ($= \mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^3)$), alors par les anti-symétries 1 et 2 et la bi-symétrie :

$$\begin{aligned} \varphi &= (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \otimes (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \varphi_{1212} + (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3) \otimes (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3) \varphi_{1313} + (\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3) \otimes (\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3) \varphi_{2323} \\ &\quad + \left((\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \otimes (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3) + (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3) \otimes (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \right) \varphi_{1213} \\ &\quad + \left((\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \otimes (\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3) + (\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3) \otimes (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2) \right) \varphi_{1223} \\ &\quad + \left((\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3) \otimes (\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3) + (\varepsilon^2 \wedge \varepsilon^3) \otimes (\varepsilon^1 \wedge \varepsilon^3) \right) \varphi_{1323} \end{aligned}$$

d'où nous tirons que $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^3) = \mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^3)$ est de dimension 6. Dans le cas général $d \geq 2$, soit A le sous-ensemble des quadruplets $(\mu, \nu, \sigma, \tau) \in \{1, \dots, d\}^4$ satisfaisant les deux conditions liées aux antisymétries 1 et 2 soient $1 \leq \mu < \nu \leq d$ et $1 \leq \sigma < \tau \leq d$, plus la troisième condition³⁰ $(\mu, \nu) \leq (\sigma, \tau)$ liée à la bi-symétrie. Pour $k = 1, 2, 3, 4$, nous notons

29. Par exemple $\varphi_{1342} = \varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2) = \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \cdot \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2) + \varepsilon^3 \wedge \varepsilon^4(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) \cdot \varepsilon^1 \wedge \varepsilon^2(\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2) = 0$.

30. Nous utilisons l'ordre lexicographique.

A_k le sous-ensemble de A formé des (μ, ν, σ, τ) pour lesquels le cardinal $\#\{\mu, \nu, \sigma, \tau\}$ est égal à k : en particulier, nous avons³¹

$$\#A_1 = 0, \quad \#A_2 = \frac{d(d-1)}{2}, \quad \#A_3 = 3 \frac{d(d-1)(d-2)}{6}, \quad \#A_4 = 3 \frac{d(d-1)(d-2)(d-3)}{24}$$

Alors, pour $\varphi \in \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$, nous obtenons

$$\varphi = \sum_{A_2} (\varepsilon^\mu \wedge \varepsilon^\nu) \otimes (\varepsilon^\mu \wedge \varepsilon^\nu) \varphi_{\mu\nu\mu\nu} + \sum_{A_3 \cup A_4} \left((\varepsilon^\mu \wedge \varepsilon^\nu) \otimes (\varepsilon^\sigma \wedge \varepsilon^\tau) + (\varepsilon^\sigma \wedge \varepsilon^\tau) \otimes (\varepsilon^\mu \wedge \varepsilon^\nu) \right) \varphi_{\mu\nu\sigma\tau}$$

Nous en déduisons que la dimension de $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ coïncide avec $\#A = \#A_2 + \#A_3 + \#A_4$, ce que nous pouvons exprimer sous forme développée en écrivant :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)) &= \frac{d(d-1)}{2} + 3 \frac{d(d-1)(d-2)}{6} + 3 \frac{d(d-1)(d-2)(d-3)}{24} \\ &= \left(\frac{d(d-1)}{4} \right) \left(2 + 2(d-1) + \frac{(d-2)(d-3)}{2} \right) \\ &= \left(\frac{d(d-1)}{4} \right) \left(\frac{d^2 - d + 2}{2} \right) \end{aligned}$$

Nous donnons dans le commentaire de la Figure 5 une heuristique visuelle permettant de retrouver l'expression développée de $\dim(\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d))$: ainsi en notant $S(n) := n + \dots + 1$, pour tout entier $n \geq 1$, il vient aussi :

$$\dim(\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)) = S(S(d-1)) = \frac{1}{2} \left(\frac{d(d-1)}{2} \right) \left(\frac{d(d-1)}{2} + 1 \right)$$

Proposition 6.1. $\dim(\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)) = \frac{1}{2} \left(\frac{d(d-1)}{2} \right) \left(\frac{d(d-1)}{2} + 1 \right)$

6.3. Nous voulons maintenant déterminer la dimension de $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)$ lorsque $d > 2$. En adaptant légèrement le calcul nous ayant mené à (61), nous obtenons que $\varphi_{\mu\{\nu\sigma\tau\}} = 0$ lorsque $(\mu, \nu, \sigma, \tau) \in A_2 \cup A_3$: pour cela, nous utilisons les anti-symétries 1 et 2 ainsi que la bi-symétrie. Par contre, lorsque $(\mu, \nu, \sigma, \tau) \in A_4$, la cyclicité $\varphi_{\mu\{\nu\sigma\tau\}} = 0$ ne peut être obtenue à partir des anti-symétries 1 et 2 et de la bi-symétrie : c'est ce type de relations qui expliquent que $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)$ soit un sous espace propre de $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ dès que $d > 3$. Afin de calculer la dimension exacte de $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)$, nous commençons par regarder le cas où $(\mu, \nu, \sigma, \tau) = (1, 2, 3, 4)$; la propriété de cyclicité entraîne que $\varphi_{1234} + \varphi_{1342} + \varphi_{1423} = 0$, soit encore que $\varphi_{1423} = -\varphi_{1234} + \varphi_{1342}$ (où nous avons ré-ordonné les indices afin qu'il correspondent à des quadruplets dans A_4). Plus généralement, si nous notons³² $(\mu, \nu, \sigma, \tau) < (\mu, \nu', \sigma', \tau') < (\mu, \nu'', \sigma'', \tau'')$ une suite ordonnée³³ des trois quadruplets de A_4 dont les supports respectifs coïncident avec $\{\mu, \nu, \sigma, \tau\}$, alors la cyclicité s'écrit

$$(62) \quad \varphi_{\mu\nu''\sigma''\tau''} = \pm(\varphi_{\mu\nu\sigma\tau} - \varphi_{\mu\nu'\sigma'\tau'})$$

31. Le facteur 3 dans la formule de $\#A_3$ vient du fait qu'à chaque partie $\{\mu, \nu, \sigma\}$ de $\{1, \dots, d\}$ ayant exactement 3 éléments, correspond 3 quadruplets de A_3 : par exemple $\{1, 2, 3\}$ est associée aux quadruplets $(1, 2, 1, 3)$, $(1, 2, 2, 3)$ et $(1, 3, 2, 3)$. De même, le facteur 3 dans la formule de $\#A_4$ vient du fait qu'à chaque partie $\{\mu, \nu, \sigma, \tau\}$ de $\{1, \dots, d\}$ ayant exactement 4 éléments, correspond 3 quadruplets de A_4 : ainsi, $\{1, 2, 3\}$ est associée aux quadruplets $(1, 2, 3, 4)$, $(1, 3, 2, 4)$ et $(1, 4, 2, 3)$.

32. Sous réserve d'existence, i.e. lorsque $d \geq 4$.

33. Par l'ordre lexicographique.

La dimension de $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)$ s'obtient à partir de la dimension de $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ en retranchant le nombre de relations du type (62) : or ce nombre coïncide avec le nombre de sous-ensembles à 4 éléments contenus dans $\{1, \dots, d\}$, de sorte que

$$\dim(\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)) = \frac{1}{2} \binom{d(d-1)}{2} \binom{d(d-1)+2}{2} - \binom{d(d-1)(d-2)(d-3)}{24} = \frac{d^2(d^2-1)}{12}$$

(On pourra trouver un autre argument donnant ce résultat dans [Wei72, Chap. 6, § 7].)

Proposition 6.2. $\dim(\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)) = \frac{d^2(d^2-1)}{12}$ (En particulier $\dim(\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^2)) = 1$.)

A partir des Propositions 6.1 et 6.2, nous retrouvons le cas d'égalité de $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$.

Corollaire 6.3. $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d) = \mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d) \iff d = 2, 3$

De même que pour $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$, nous avons la proposition suivante.

Proposition 6.4. Si $d \geq 2$ alors $\mathcal{Q}_B^+(\mathbb{R}^d)$ est un sous-espace vectoriel strict de $\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^d)$ et de plus

$$\dim(\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^d)) = \frac{d^2(d^2-1)}{12} < \frac{d(d+1)}{4} \binom{d(d+1)}{2} + 1 = \dim(\mathcal{Q}_B^+(\mathbb{R}^d))$$

Insistons sur le fait que contrairement à $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ (c.f. Corollaire 6.3) l'espace $\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^d)$ est toujours un sous-espace vectoriel strict de $\mathcal{Q}_B^+(\mathbb{R}^d)$ (le cas $d = 2$ aura son intérêt lorsque nous regarderons les propriétés du tenseur de Gauss : c.f. § 10.2). Nous savons (c.f. Proposition 4.2) que les espaces $\mathcal{Q}_C^+(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{Q}_C^-(\mathbb{R}^d)$ sont isomorphes ce qui est cohérent avec le fait que ces deux espaces ont même dimension. Par contre, les espaces $\mathcal{Q}_B^+(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d)$ ne sont jamais isomorphes car $\dim(\mathcal{Q}_B^+(\mathbb{R}^d)) < \dim(\mathcal{Q}_B^-(\mathbb{R}^d))$.

7. Les composantes des tenseurs R et H

7.1. Le Théorème C affirme l'existence d'un $(0, 4)$ -tenseur H – le tenseur Hessian – caractérisé par le fait que ses composantes $H_{\mu\nu\sigma\tau}(X)$ en un point X coïncident avec les symboles de Riemann $g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X)$ lorsque le système de coordonnées est normal au point X . A partir de là, nous avons pu définir le tenseur de Reimann-Christoffel R (c.f. Définition B) et déduire beaucoup de choses sur les deux tenseurs H et R . En résumé, si U, V, W, Z sont quatre champs de vecteurs, alors les symétries du tenseur hessien métrique, sont :

- (H1) : $H(U, V, W, Z) = H(V, U, W, Z) = H(U, V, Z, W)$ (symétrie 1 & 2)
- (H2) : $H(U, U, U, V) = 0$ (identité de Moore)
- (H3) : $H(U, V, W, Z) + H(U, W, Z, V) + H(U, Z, V, W) = 0$ (cyclicité)
- (H4) : $H(U, V, W, Z) = H(W, Z, U, V)$ (bisymétrie)

ces propriétés correspondant aux symétries du tenseur de courbure, soient :

- (R1) : $R(U, V, W, Z) = -R(V, U, W, Z) = -R(U, V, Z, W)$ (antisymétrie 1 & 2)
- (R2) : $R(U, V, W, Z) + R(U, W, Z, V) + R(U, Z, V, W) = 0$ (cyclicité)
- (R3) : $R(U, V, W, Z) = R(W, Z, U, V)$ (bisymétrie)

7.2. Jusqu'à présent nous nous sommes toujours placé dans un systèmes de coordonnées normal en un point. Cependant, les coordonnées locales qu'on peut utiliser – en pratique – dans un voisinage d'un point d'une variété riemannienne, n'ont aucunes raisons d'être normales en ce point : il est donc important de déterminer l'expression des composantes de H et R en tout point et pour tout système de coordonnées. Nous verrons que cela revient en fait à démontrer le Théorème C : c'est une partie difficile et technique qui a été initialement résolue par Riemann dans [Rie92], où apparaît explicitement l'expression en (63) ci-dessous. Cette partie technique correspond aussi directement à un calcul très difficile de Gauss dans sont *Theorema egregium*, lui permettant d'obtenir l'expression de la courbure d'une surface en un point, uniquement par les dérivées première et secondes des coefficients de la première forme fondamentale (indépendamment de la paramétrisation locale de la surface) : nous reviendrons sur ce point au § 11.5. Nous admettons provisoirement le théorème suivant, qui sera démontré dans [Oli17a] de plusieurs manières différentes.

Théorème 7.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n ; alors les x -composantes du tenseur de Riemann-Christoffel (covariant) R , dans des coordonnées x quelconques, sont :*

$$(63) \quad R_{\mu\nu\sigma\tau} = \frac{1}{2}(g_{\mu\sigma,\nu\tau} + g_{\nu\tau,\mu\sigma} - g_{\mu\tau,\nu\sigma} - g_{\nu\sigma,\mu\tau}) + g_{\eta\epsilon}(\mathbf{C}^{\eta}_{\mu\sigma}\mathbf{C}^{\epsilon}_{\nu\tau} - \mathbf{C}^{\eta}_{\mu\tau}\mathbf{C}^{\epsilon}_{\nu\sigma})$$

Le premier point importante du Théorème 7.1 se trouve dans le fait que les expressions du membre droit de (63) constituent bien les composantes d'un $(0, 4)$ -tenseur, en ce sens qu'elles se transforment suivant (7) lors d'un changement de coordonnées. Le fait que ces composantes sont les composantes du tenseur de Riemann-Christoffel covariant, dépend (dans notre présentation) du Théorème C et de la Définition B, ce que nous pouvons directement vérifier : en effet, si nous supposons que les coordonnées x sont normales en X alors, d'après le Proposition 2.4 nous pouvons simplifier (63) et nous retrouvons que

$$R_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = \frac{1}{2}(g_{\mu\sigma,\nu\tau}(X) + g_{\nu\tau,\mu\sigma}(X) - g_{\mu\tau,\nu\sigma}(X) - g_{\nu\sigma,\mu\tau}(X)) = g_{\mu\sigma,\nu\tau}(X) - g_{\mu\tau,\nu\sigma}(X)$$

(Pour la dernière égalité, nous avons utilisé la bi-symétrie des symboles de Riemann en coordonnées normales et donc le Théorème A combiné au lemme de Milnor). Les composantes du tenseur hessien métrique H se déduisent de celle du tenseur de Riemann-Christoffel données en (63) à partir de la relation $H_{\mu\nu\sigma\tau} = 1/3R_{\mu\sigma\nu\tau} + 1/3R_{\mu\tau\nu\sigma}$.

Corollaire 7.2. *Les x -composantes du tenseur hessien métrique H dans des coordonnées x quelconques, sont :*

$$(64) \quad H_{\mu\nu\sigma\tau} = \frac{1}{3}(g_{\mu\nu,\sigma\tau} + g_{\sigma\tau,\mu\nu}) - \frac{1}{6}(g_{\mu\tau,\sigma\nu} + g_{\sigma\nu,\mu\tau} + g_{\mu\sigma,\tau\nu} + g_{\tau\nu,\mu\sigma}) \\ \frac{1}{3}(2\mathbf{C}^{\eta}_{\mu\nu}\mathbf{C}^{\epsilon}_{\sigma\tau} - \mathbf{C}^{\eta}_{\mu\tau}\mathbf{C}^{\epsilon}_{\sigma\nu} - \mathbf{C}^{\eta}_{\mu\sigma}\mathbf{C}^{\epsilon}_{\tau\nu})g_{\eta\epsilon}$$

Nous terminons ce paragraphe en notant que l'identité cyclique de Riemann permet de retrouver – à partir des composantes – le fait que les $H_{\mu\nu\sigma\tau}(X)$ coïncident avec les symboles de Riemann en X , lorsque les coordonnées sont normales en ce point. En effet, en

utilisant de nouveau la Proposition 2.4, l'expression de $H_{\mu\nu\sigma\tau}(X)$ se simplifie et il vient :

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu\sigma\tau}(X) &= \frac{2}{3}g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) - \frac{1}{3}g_{\mu\sigma,\nu\tau}(X) - \frac{1}{3}g_{\mu\tau,\nu\sigma}(X) \\ &= \frac{2}{3}g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) - \frac{1}{3}g_{\mu\sigma,\nu\tau}(X) + \frac{1}{3}(g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) + g_{\mu\sigma,\tau\nu}(X)) = g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) \end{aligned}$$

8. Courbure et rayon de courbure d'une courbe plane

8.1. Soit (\mathcal{C}) le support d'un chemin (lisse) $r : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ (avec $a < 0 < b$) dont le paramètre est l'abscisse curviligne s . La condition $\langle \dot{r}(s) | \dot{r}(s) \rangle \equiv 1$ assure que la dérivée de $\langle \dot{r}(s) | \dot{r}(s) \rangle$ par rapport à s s'annule identiquement : ainsi $\langle \ddot{r}(s) | \dot{r}(s) \rangle \equiv 0$, ce qui signifie que l'accélération $\ddot{r}(s)$ est toujours normale à la courbe. Considérons (comme d'habitude) que (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de \mathbb{R}^3 et que le plan du mouvement de (\mathcal{C}) soit celui engendré par (e_1, e_2) : alors, la base de Serret-Frenet $(T(s), N(s))$ est définie au point de (\mathcal{C}) d'abscisse curviligne s en posant $T(s) = \dot{r}(s)$ et $N(s) = e_3 \times T(s)$. Par définition, la courbure (algébrique) de (\mathcal{C}) en $r(s)$ est le réel $\kappa(r(s)) = \kappa(s)$ t.q.

$$(65) \quad \ddot{r}(s) = \kappa(s)N(s)$$

son rayon de courbure (algébrique) valant $1/\kappa(s)$. Notons $\alpha(s)$ une mesure de l'angle orienté $(e_1, T(s))$ de sorte que $T(s) = \cos(\alpha(s))e_1 + \sin(\alpha(s))e_2$ et $N(s) = -\sin(\alpha(s))e_1 + \cos(\alpha(s))e_2$. Il vient alors $\dot{T}(s) = \dot{\alpha}(s)N(s)$ et $\dot{N}(s) = -\dot{\alpha}(s)T(s)$. Comme $\dot{T} = \ddot{r}$, il découle de la définition de la courbure en (65) que $\kappa(s) = \dot{\alpha}(s)$ et que par suite : $\dot{T} = \kappa N$ et $\dot{N} = -\kappa T$; la dérivée troisième de r s'obtient alors à partir de (65) ce qui donne :

$$(66) \quad \ddot{\ddot{r}} = -\kappa^2 T + \dot{\kappa} N$$

8.2. Pour une interprétation géométrique intuitive de la courbure et du rayon de courbure, nous pouvons supposer sans pertes de généralités que $r(0) = (0, 0)$ avec $\dot{r}(0) = (1, 0)$ et ³⁴ $\kappa(0) > 0$. Pour comprendre la signification de la courbure $\kappa(0)$ (et du rayon de courbure $1/\kappa(0)$), considérons les cercles tangents, soit (\mathcal{C}_a) de centre $(0, a)$ et de rayon a et dont l'équation cartésienne est $x^2 + y^2 - 2ay = 0$. L'idée est de s'intéresser au maximum des $a \geq 0$ pour lequel la courbe (\mathcal{C}) soit – dans un voisinage de $(0, 0)$ – à l'« extérieur » du cercle (\mathcal{C}_a) : si $(x(s), y(s))$ sont les coordonnées cartésiennes du point $r(s)$ de (\mathcal{C}) de paramètre s , alors il s'agit de maximiser $0 \leq a \leq +\infty$ de sorte que

$$\Psi(s) := x(s)^2 + y(s)^2 - 2ay(s) \geq 0$$

pour $|s|$ suffisamment petit. Ici $(T(0); N(0)) = (e_1, e_2)$ et il suit de (65) et (66) que :

$$\begin{aligned} (x(0), \dot{x}(0), \ddot{x}(0), \ddot{\ddot{x}}(0)) &= (0, 1, 0, -\kappa(0)^2) \\ (y(0), \dot{y}(0), \ddot{y}(0), \ddot{\ddot{y}}(0)) &= (0, 0, \kappa(0), \dot{\kappa}(0)) \end{aligned}$$

En écrivant les développements limités de $x(s)$ et $y(s)$, nous obtenons

$$\Psi(s) = s^2 - 2a \left(\frac{s^2}{2} \kappa(0) + \frac{s^3}{6} \dot{\kappa}(0) \right) + o(s^3) = s^2(1 - a\kappa(0)) - a \frac{s^3}{3} \dot{\kappa}(0) + o(s^3)$$

34. Le cas $\kappa(0) < 0$ est symétrique, le cas d'une courbure nulle en $r(0)$ nécessitant une analyse spéciale (cela arrive par exemple lorsque $r(0)$ est un point d'inflexion de (\mathcal{C}) , ou encore lorsque r est approximativement plat en 0).

Par suite, $\Psi(s)$ est positif pour $|s|$ suffisamment petit dès que a vérifie $1 \geq a\kappa(0)$: le maximum $1/\kappa(0)$ d'un tel a correspond bien au rayon de courbure de (C) en $r(0)$.

8.3. Prenons le cas particulier de la courbure en un point $(t, \varphi(t))$ du graphe d'une fonction $t \mapsto \varphi(t)$ définie (et lisse) dans un voisinage de 0. L'abscisse curviligne s étant définie à partir du point $(0, \varphi(0))$ en posant

$$s(t) = \int_0^t (1 + \dot{\varphi}^2(x))^{1/2} dx$$

nous pouvons vérifier que la base de Serret-Frenet, vérifie

$$\mathbf{T}(s(t)) = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{\varphi}^2(t)}} \mathbf{e}_1 + \frac{\dot{\varphi}(t)}{\sqrt{1 + \dot{\varphi}^2(t)}} \mathbf{e}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{N}(s(t)) = -\frac{\dot{\varphi}(t)}{\sqrt{1 + \dot{\varphi}^2(t)}} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{\varphi}^2(t)}} \mathbf{e}_2$$

Alors, d'une part

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{T}}{ds}(s(t)) &= \frac{d\mathbf{T} \circ s}{dt} = -\frac{\dot{\varphi}(t)\ddot{\varphi}(t)}{(1 + \dot{\varphi}^2(t))^{3/2}} \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\ddot{\varphi}(t)}{(1 + \dot{\varphi}^2(t))^{1/2}} - \frac{\dot{\varphi}(t)^2 \ddot{\varphi}(t)}{(1 + \dot{\varphi}^2(t))^{3/2}} \right) \mathbf{e}_2 \\ &= \frac{\ddot{\varphi}(t)}{(1 + \dot{\varphi}^2(t))} \mathbf{N}(s(t)) \end{aligned}$$

et comme d'autre part $ds = (1 + \dot{\varphi}^2(t))^{1/2} dt$ nous pouvons conclure que

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}(s(t)) = \frac{dt}{ds} \left(\frac{\ddot{\varphi}(t)}{(1 + \dot{\varphi}^2(t))} \right) \mathbf{N}(s(t)) = \frac{\ddot{\varphi}(t)}{(1 + \dot{\varphi}^2(t))^{3/2}} \mathbf{N}(s(t))$$

En d'autres termes, la courbure au point $(t, \varphi(t))$ vaut

$$\kappa(t, \varphi(t)) = \frac{\ddot{\varphi}(t)}{(1 + \dot{\varphi}^2(t))^{3/2}}.$$

Nous utiliserons le résultat particulier suivant :

Proposition 8.1. Soit (C) le graphe dans \mathbb{R}^2 d'une fonction $t \mapsto \varphi(t)$ définie (et lisse) dans un voisinage de 0 ; si $\dot{\varphi}(0) = 0$ alors la courbure de (C) en $(0, \varphi(0))$ est $\kappa = \ddot{\varphi}(0)$.

9. Coordonnées et courbure gaussiennes

9.1. Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire un sous-ensemble de \mathbb{R}^3 qui possède une structure de variété de dimension 2. Dans la suite nous notons \mathbf{X} la carte associée à un système de coordonnées locales $\mathbf{x} = (x^1, x^2)$ définie dans un voisinage d'un point X . Le système de coordonnées \mathbf{x} est dit gaussien (on parle aussi de coordonnées de Gauss) en X , si $\mathbf{x}(X) = 0$ et s'il existe une isométrie Φ de \mathbb{R}^3 avec $\Phi(T_X \Sigma) = \mathbb{R}^2$ et telle que

$$\mathbf{x} = \Phi \circ \pi_X$$

où π_X est la projection orthogonale de \mathbb{R}^3 sur l'espace tangent $T_X \Sigma$. Sans perte de généralités, nous pouvons supposer que $X = (0, 0, 0)$ et que $T_X \Sigma = \mathbb{R}^2$; dans ce cas, dire que \mathbf{x} est un système de coordonnées gaussien en X signifie qu'il existe une fonction f définie sur un voisinage de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 et t.q. pour tout (x^1, x^2) dans ce voisinage $\mathbf{X}(x^1, x^2) = (x^1, x^2, f(x^1, x^2))$. L'existence d'un système de coordonnées de Gauss est une simple conséquence du fait que Σ est une variété de dimension 2. Rappelons que

35. Rappelons que nous notons $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 (i.e. associées aux coordonnées cartésiennes canonique) et que \mathbb{R}^2 est (par identification) le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 .

$T_X \Sigma = \mathbb{R}^2$ avec $\mathbf{x}(X) = (0, 0)$; si $(\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2, \mathbf{X}^3)$ sont les composantes cartésiennes de la carte \mathbf{X} , alors nous définissons $\theta_X := \pi_X \circ \mathbf{X} = (\mathbf{X}^1, \mathbf{X}^2)$. Avec $Y = \mathbf{X}(a, b)$, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^i} \Big|_Y = \frac{\partial \mathbf{X}^j}{\partial x^i}(a, b) \mathbf{e}_j = \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^i}(a, b) \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^i}(a, b) \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^i}(a, b) \mathbf{e}_3$$

(où les \mathbf{e}_i sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^3). Comme $X = \mathbf{X}(0, 0)$ et que $T_X \Sigma = \mathbb{R}^2$ (\mathbb{R}^2 étant engendré par \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2) nous en déduisons que

$$\frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^1}(0, 0) = \frac{\partial \mathbf{X}^3}{\partial x^2}(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^1}(0, 0) \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^2}(0, 0) \neq \frac{\partial \mathbf{X}^2}{\partial x^1}(0, 0) \frac{\partial \mathbf{X}^1}{\partial x^2}(0, 0)$$

En particulier, la différentielle de θ_X en $(0, 0)$ est un isomorphisme de \mathbb{R}^2 t.q. $\theta_X(0, 0) = (0, 0)$: par suite ([théorème de l'inversion locale](#)), il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 , pour lequel θ_X réalise un difféomorphisme sur $\mathcal{W} := \theta_X(\mathcal{V})$. Prenons \mathcal{V} suffisamment petit pour être inclus dans le domaine de la carte \mathbf{X} ; alors nous pouvons définir le système de coordonnées locales $z = \theta_X^{-1} \circ \pi_X$ définie sur $\mathcal{U} := \mathbf{X}(\mathcal{V})$, de sorte que $z(Y) = \pi_X(Y)$, pour tout $Y \in \mathcal{U}$. Comme de plus \mathcal{U} est un voisinage de X (dans Σ) et que $z(X) = \theta_X^{-1}(\pi_X(X)) = \theta_X^{-1}(0, 0) = (0, 0)$, nous pouvons conclure que z est un système de coordonnées gaussien en X . Enfin, remarquons que la carte associée à z est l'application $\mathbf{Z} : \mathcal{W} \rightarrow \Sigma$ t.q. $\mathbf{Z}(x^1, x^2) = (x^1, x^2, f(x^1, x^2))$ avec $f = \mathbf{X} \circ \theta_X^{-1}$.

9.2. A une différence près (c.f. Proposition 10.6) les coordonnées de Gauss ont des propriétés analogues aux coordonnées normales de Riemann (c.f. § 2). Pour voir cela, nous considérons que \mathbf{x} est un système de coordonnées gaussien en $X = (0, 0, 0)$; de plus, la carte \mathbf{X} associée à \mathbf{x} est supposée de la forme $(x^1, x^2) \mapsto (x^1, x^2, f(x^1, x^2))$, où f est définie sur un voisinage de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 et vérifie

$$(67) \quad f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x^1}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x^2}(0, 0) = 0$$

Les vecteurs $\partial_1 = \partial/\partial x^1$ et $\partial_2 = \partial/\partial x^2$ s'expriment simplement à l'aide des dérivées partielles usuelles de $f(x^1, x^2)$: si $Y = \mathbf{X}(x^1, x^2)$ est un point voisin de X , alors :

$$\partial_1|_Y = \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} \right) \mathbf{e}_3 \quad \text{et} \quad \partial_2|_Y = \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2} \right) \mathbf{e}_3$$

Nous pouvons en tirer les \mathbf{x} -composantes $g_{\mu\nu} = \langle \partial_\mu | \partial_\nu \rangle$ de la métrique g ; plus précisément, si nous notons $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X} (= \gamma_{\mu\nu}(x^1, x^2))$, alors pour

$$(68) \quad \gamma_{\mu\mu} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right)^2 \quad \text{et} \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{\partial f}{\partial x^1} \frac{\partial f}{\partial x^2}$$

Nous utiliserons le fait que (à l'instar des coordonnées normales) les coordonnées gaussiennes en un point sont euclidiennes en ce point.

Proposition 9.1. *Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 munie de la métrique riemannienne induite par la structure euclidienne \mathbb{R}^3 ; alors des coordonnées gaussiennes en un point X sont nécessairement euclidiennes en ce point : en d'autres termes $g_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu,\sigma}(X) = 0$.*

Preuve. On se ramène au cas où la carte \mathbf{X} associée au coordonnées gaussiennes \mathbf{x} en $X = (0, 0, 0)$ est de la forme $(x^1, x^2) \mapsto (x^1, x^2, f(x^1, x^2))$, avec f vérifiant (67). Le fait que $g_{\mu\nu}(X) = \delta_{\mu\nu}$ découle directement de (67) et (68). Pour montrer que $g_{\mu\nu,\sigma}(X) = 0$, nous

commençons par calculer la dérivée partielle de $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$ par rapport à x^σ à partir de (68), ce qui donne

$$\gamma_{\mu\nu,\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} + \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\sigma \partial x^\nu}$$

Le fait que $\gamma_{\mu\nu,\sigma}(0, 0) = 0$ vient une nouvelle fois de (67). □

Proposition 9.2. Soit $X = (0, 0, 0) \in \Sigma$ avec $T_X M = \mathbb{R}^2$ et soit \mathbf{x} un système de coordonnées gaussiennes en X ; alors la carte associée à \mathbf{x} est de la forme $\mathbf{X}(x^1, x^2) = (x^1, x^2, f(x^1, x^2))$ pour f vérifiant (67) et les symboles de Riemann en X dans les coordonnées gaussiennes \mathbf{x} s'écrivent

$$(69) \quad g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\nu \partial x^\tau} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\tau} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\nu \partial x^\sigma}$$

Preuve. Notons (comme d'habitude) $\gamma_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} \circ \mathbf{X}$; alors

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu,\sigma\tau} &= \frac{\partial^2}{\partial x^\sigma \partial x^\tau} \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^\tau \partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} + \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\tau \partial x^\nu} \right) \\ &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^\sigma \partial x^\tau \partial x^\mu} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^\tau \partial x^\mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^\sigma \partial x^\mu} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\tau \partial x^\nu} + \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial^3 f}{\partial x^\sigma \partial x^\tau \partial x^\nu} \end{aligned}$$

ce qui donne finalement (69) lorsque $(x^1, x^2) = (0, 0)$. □

Corollaire 9.3. Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 et \mathbf{x} un système de coordonnées gaussiennes en X ; alors les symboles de Riemann en X vérifient les symétries 1 et 2 ainsi que la bisymétrie, en ce sens que

$$(70) \quad g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) = g_{\nu\mu,\sigma\tau}(X) = g_{\mu\nu,\tau\sigma}(X) = g_{\sigma\tau,\mu\nu}(X)$$

9.3. Soit Σ la surface (nappe) de \mathbb{R}^3 constituée des $(x^1, x^2, f(x^1, x^2))$ pour (x^1, x^2) dans un voisinage ouvert \mathcal{V} de $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 , avec f satisfaisant (67) (i.e. $X = (0, 0, 0) \in \Sigma$ et $T_X \Sigma = \mathbb{R}^2$). La projection orthogonale de Σ sur \mathbb{R}^2 définit un système de coordonnées gaussiennes en X et pour $(x^1, x^2) \rightarrow (0, 0)$, nous avons $f(x^1, x^2) \approx x^i x^j \partial_{ij} f(0, 0)$. Il n'est pas évident que la courbure³⁶ gaussienne de Σ en X définie comme le déterminant :

$$(71) \quad K = K(X) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}(0, 0) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2}(0, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(0, 0) \right)^2$$

soit « covariante », c'est-à-dire une quantité ne dépendant que de la géométrie locale de Σ en X et non de la paramétrisation de Σ dans un voisinage de X . Commençons avec le changement de variables $(x^1, x^2) = A_\theta(u^1, u^2)$, où A_θ est la rotation d'angle³⁷ θ (pour l'instant arbitraire) et soit $f_\theta : A_\theta^*(\mathcal{V}) \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $f_\theta(u^1, u^2) := f \circ A_\theta(u^1, u^2)$ (de sorte que $f_\theta = f$). Alors le hessien $M_\theta = (\partial_{ij} f_\theta(0, 0))$ de f_θ en $(0, 0)$ s'obtient en écrivant

$$\frac{\partial^2 f_\theta}{\partial u^j \partial u^i} = \frac{\partial x^\mu}{\partial u^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial u^j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \circ A_\theta \right) \quad \text{où} \quad \begin{pmatrix} \partial x^1 / \partial u^1 & \partial x^1 / \partial u^2 \\ \partial x^2 / \partial u^1 & \partial x^2 / \partial u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

36. La demi trace $(\partial_{11} f(0, 0) + \partial_{22} f(0, 0))/2$ est appelée la courbure moyenne de Σ en X : cette notion a été introduite par Sophie Germain à propos des vibrations d'une membrane (cette notion intervient dans l'étude des surfaces minimales) : voir [DD87] pour un panorama historique complets.

37. A_θ est identifiée à sa matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^2 d'où les identification $A_\theta^{-1} = A_\theta^*$.

Finalement en $(u^1, u^2) = (0, 0)$ nous obtenons la relation matricielle $M_\theta = A_\theta^* M_0 A_\theta$. La matrice A_θ étant orthogonale, nous avons $A_\theta^{-1} = A_\theta^*$: le déterminant $\det(M_\theta)$ ne dépend pas du paramètre θ et coïncide donc avec la courbure de Gauss $K = \det(M_0)$ définie en (71). De plus, la matrice M_0 étant symétrique, elle possède une base orthonormée directe de vecteurs propres (théorème spectral) : si $\kappa_1 = \kappa_1(X)$ et $\kappa_2 = \kappa_2(X)$ sont les valeurs propres en question, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (déterminée modulo 2π) t.q.

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \kappa_i = \frac{\partial^2 f_\theta}{\partial u^i \partial u^i}(0, 0)$$

On appelle κ_1 et κ_2 les courbures principales de Σ en X : leur produit coïncide avec la courbure de Gauss de Σ en X , en ce sens que

$$(72) \quad K = \kappa_1 \kappa_2$$

Les valeurs propres κ_1 et κ_2 sont appelées les courbures principales de Σ en X : d'après la Proposition 8.1, elles coïncident respectivement avec les courbures en 0 des applications partielles $f_\theta(\cdot, 0)$ et $f_\theta(0, \cdot)$: la courbure gaussienne de Σ en X définie en (71) correspond donc au produit des courbures principales de Σ en $(0, 0)$.

Proposition 9.4. Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 munie de la métrique riemannienne g induite par la structure euclidienne de \mathbb{R}^3 . Si \mathbf{x} est un système de coordonnées gaussiennes en un point $X \in \Sigma$ alors : $K(X) = g_{12,12}(X) - g_{11,22}(X)$.

Preuve. Nous pouvons nous ramener au cas où $X = (0, 0, 0)$ et $T_X M = \mathbb{R}^2$; les coordonnées \mathbf{x} étant supposées gaussiennes en X , la carte \mathbf{X} associée est déterminée par une application f à valeur réelle et satisfaisant (67). Grâce à la Proposition 9.2 nous avons

$$\begin{aligned} g_{12,12}(X) - g_{11,22}(X) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}(0, 0) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2}(0, 0) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(0, 0) \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(0, 0) \right)^2 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}(0, 0) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^2}(0, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^2}(0, 0) \right)^2 \end{aligned}$$

la conclusion venant de la définition en (71) de la courbure gaussienne de Σ en X . □

10. La seconde forme fondamentale

10.1. Soit X un point d'une surface Σ de \mathbb{R}^3 et \mathbf{X} la carte d'un système de coordonnées \mathbf{x} défini au voisinage de X , de sorte que $\partial_i|_Y = \partial \mathbf{X} / \partial x^i$ dès que $Y = \mathbf{X}(x^1, x^2)$. La courbure de Σ en X peut s'étudier grâce au champ local du vecteur normal unitaire

$$(73) \quad \mathbf{n} := \frac{\partial_1 \times \partial_2}{|\partial_1 \times \partial_2|}$$

(défini pour tout Y dans le domaine de \mathbf{x}) en examinant la manière dont $\mathbf{n}(Y)$ varie autour de X . Plus précisément, pour tout vecteur $u \in T_X \Sigma$ on considère $t \mapsto \mathbf{r}(t) \in \Sigma$ un germe de chemin en X t.q. $\dot{\mathbf{r}}(0) = u$ et on définit $W_X(u)$ comme la dérivée en $t = 0$ de $\mathbf{n} \circ \mathbf{r}(t)$. Il est immédiat que $W_X(u)$ ne dépend pas du germe de chemin \mathbf{r} t.q. $\dot{\mathbf{r}}(0) = u$ et que $u \mapsto W_X(u)$ est une application linéaire de $T_X \Sigma$ dans \mathbb{R}^3 . D'autre part, la norme de $\mathbf{n} \circ \mathbf{r}(t)$ étant identiquement égale à 1, la vecteur dérivé $d/dt(\mathbf{n} \circ \mathbf{r})$ est nécessairement

orthogonal à $\mathbf{n} \circ \mathbf{r}(t)$ ce qui en fait un élément de l'espace tangent $T_{\mathbf{r}(t)}\Sigma$: en particulier (comme $\mathbf{r}(0) = X$) le vecteur $W_X(u)$ appartient à $T_X\Sigma$: ainsi W_X est un endomorphisme de $T_X\Sigma$, appelé **l'endomorphisme de Weingarten**. Si $\mathbf{r}(t) = \mathbf{X}(\mathbf{r}^1(t), \mathbf{r}^2(t))$ alors :

$$\mathbf{n} \circ \mathbf{r}(t) = \mathbf{n} \circ \mathbf{X}(\mathbf{r}^1(t), \mathbf{r}^2(t)) \approx \mathbf{n} \circ \mathbf{X}(tu^1, tu^2) \approx t \left(u^1 \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^1}(0,0) + u^2 \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^1}(0,0) \right)$$

En résumé, nous obtenons

$$(74) \quad W_X(u) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\mathbf{n} \circ \mathbf{r}) = u^1 \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^1}(0,0) + u^2 \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^1}(0,0) \in T_X\Sigma$$

L'application linéaire $u \mapsto W_X(u)$ de $T_X\Sigma$ dans $T_X\Sigma$ est par définition **l'endomorphisme de Weingarten en X** mentionné dans l'heuristique préliminaire.

Définition 10.1. La seconde forme fondamentale de Σ est le $(0, 2)$ -tenseur F t.q. pour tout champ de vecteurs U, V sur Σ et tout $X \in \Sigma$:

$$F|_X(U, V) = - \langle W_X(U|_X) | V|_X \rangle$$

Proposition 10.2. La seconde forme fondamentale F est un $(0, 2)$ -tenseur **symétrique** ; plus précisément, si \mathbf{X} est la carte associée aux coordonnées \mathbf{x} , alors pour tout $X = \mathbf{X}(x^1, x^2)$

$$(75) \quad F_{\mu\nu}(X) = - \left\langle \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^\mu} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^\nu} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^\nu} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^\mu} \right\rangle$$

Preuve. Nous considérons toujours que $(x^1, x^2) \mapsto \mathbf{X}(x^1, x^2)$ est un paramétrage de Σ dans un voisinage de X et soient $u = u^i \partial_i|_X$ et $v = v^i \partial_i|_X$ deux vecteurs arbitraires de $T_X\Sigma$. Alors d'après l'expression de $W_X(u)$ en (74) :

$$F|_X(u, v) = - \langle W_X(u) | v \rangle = - \left\langle u^1 \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^1} + u^2 \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^1} \Big| v^1 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^2} \right\rangle$$

ce qui donne $F|_X(u, v) = -u^\mu v^\nu F_{\mu\nu}(X)$ où les \mathbf{x} -composantes de F en X sont³⁸

$$(76) \quad F_{\mu\nu}(X) = - \left\langle \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^\mu} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^\nu} \right\rangle$$

Mais, comme $\langle \mathbf{n} \circ \mathbf{X} | \partial \mathbf{X} / \partial x^1 \rangle = \langle \mathbf{n} \circ \mathbf{X} | \partial \mathbf{X} / \partial x^2 \rangle$ sont identiquement nuls dans le domaine de \mathbf{X} , nous avons toujours :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^1} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^2} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial x^1} \left\langle \mathbf{n} \circ \mathbf{X} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^2} \right\rangle - \left\langle \mathbf{n} \circ \mathbf{X} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^1 \partial x^2} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x^2} \left\langle \mathbf{n} \circ \mathbf{X} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^1} \right\rangle - \left\langle \mathbf{n} \circ \mathbf{X} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^2 \partial x^1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{n} \circ \mathbf{X}}{\partial x^2} \Big| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x^1} \right\rangle \end{aligned}$$

□

Proposition 10.3. Supposons que $X = (0, 0, 0) \in \Sigma$ avec $T_X M = \mathbb{R}^2$ et soit \mathbf{x} un système de coordonnées gaussiennes en X ; alors la carte associée à \mathbf{x} est de la forme $\mathbf{X}(x^1, x^2) = (x^1, x^2, f(x^1, x^2))$ pour f vérifiant (67) et les \mathbf{x} -composantes de la seconde forme fondamentale en X s'écrivent

$$(77) \quad F_{\mu\nu}(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\nu}(0, 0)$$

38. Traditionnellement on note aussi $K(X) := F_{11}(X)$, $L(X) := F_{12}(X) = F_{21}(X)$ et $M(X) := F_{22}(X)$.

10.2. La Proposition 10.3 a une conséquence importante : si x sont des coordonnées gaussiennes en un point X de Σ , alors en combinant (69) et (77) il vient :

$$g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) = (F \otimes F)_{\mu\sigma\nu\tau}(X) + (F \otimes F)_{\mu\tau\nu\sigma}(X)$$

Théorème 10.4. Soit (Σ, g) une variété riemannienne de dimension 2 plongée isométriquement dans \mathbb{R}^3 ; alors il existe un $(0, 4)$ -tenseur G – que nous appelons le tenseur de Gauss – tel que pour tout quadruplet (U, V, W, Z) de champs de vecteurs sur Σ

$$(78) \quad G(U, V, W, Z) = F(U, W)F(V, Z) + F(U, Z)F(V, W)$$

En particulier G satisfait les symétrie 1 et 2 ainsi que la bi-symétrie en ce sens que

$$G(U, V, W, Z) = G(V, U, W, Z) = G(U, V, Z, W) = G(W, Z, U, V)$$

Corollaire 10.5. Si x est un système de coordonnées gaussiennes en un point X de Σ , alors les composante de G en X coïncident avec les symboles de Riemann : en d'autres termes

$$G_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X)$$

10.3. A partir de l'identité (78) du Théorème 10.4, il est clair que d'une part $G|_X \in \mathcal{Q}_B^+(T_X\Sigma)$, mais que d'autre part $G_{\mu\mu,\mu\mu}(X) = 2F_{\mu\mu}(X)^2$; nous allons voir qu'en général $G_{\mu\mu,\mu\mu}(X) \neq 0$, ce qui dans ce cas signifie que $G|_X \in \mathcal{Q}_B^+(T_X\Sigma) \setminus \mathcal{Q}_C^+(T_X\Sigma)$.

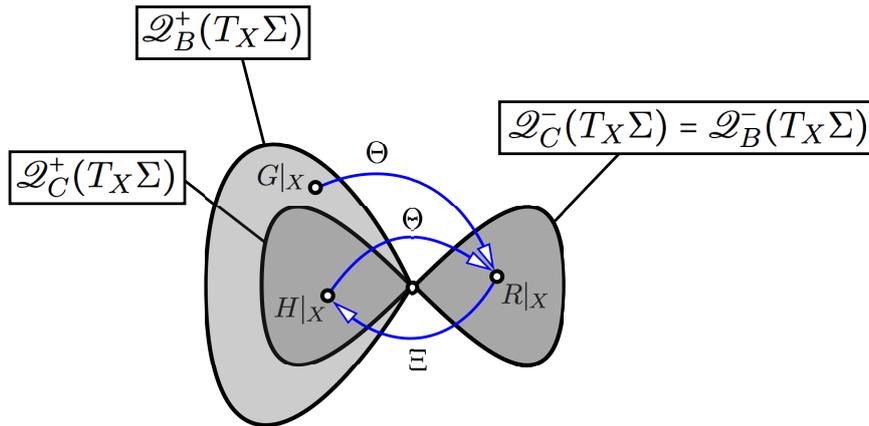


FIGURE 6. Nous considérons ici que Σ est une surface plongée isométriquement dans \mathbb{R}^3 et munie de sa structure euclidienne naturelle ; alors pour tout point X de Σ , l'espace tangent $T_X\Sigma$ est un sous espace vectoriel de \mathbb{R}^3 de dimension 2 (muni de la structure euclidienne induite par celle de \mathbb{R}^3). Nous savons que les espaces $\mathcal{Q}_C^+(T_X\Sigma)$ et $\mathcal{Q}_C^-(T_X\Sigma)$ sont tous les deux isomorphes ; ici (i.e. dans le cas d'une surface) il sont tous les deux de dimensions 1. L'inclusion $\mathcal{Q}_C^+(T_X\Sigma) \subset \mathcal{Q}_B^+(T_X\Sigma)$ est stricte avec $H|_X \in \mathcal{Q}_C^+(T_X\Sigma)$ et $G|_X \in \mathcal{Q}_B^+(T_X\Sigma) \setminus \mathcal{Q}_C^+(T_X\Sigma)$; par contre, une spécificité de la dimension 2 (et 3) vient de l'identité $\mathcal{Q}_C^-(T_X\Sigma) = \mathcal{Q}_B^-(T_X\Sigma)$. Le fait que $\mathcal{Q}_C^-(T_X\Sigma)$ soit de dimension 1 (et que $R|_X$ soit dans $\mathcal{Q}_C^-(T_X\Sigma)$) a la conséquence importante que $R|_X = -K(X)\Omega|_X \otimes \Omega|_X$, où $\Omega|_X$ est la 2-forme déterminant sur $T_X\Sigma$ et où $K(X)$ est la courbure gaussienne de Σ au point X .

Proposition 10.6. Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 ; pour tout système de coordonnées x , les x -composantes du tenseur hessien métrique H et du tenseur de Gauss G sont reliées par l'identité suivante :

$$(79) \quad H_{\mu\nu\sigma\tau} = G_{\mu\nu\sigma\tau} - 1/3G_{\mu\{\nu\sigma\tau\}}$$

De plus, si $\kappa_1(X)$ et $\kappa_2(X)$ sont les courbures principales de Σ en un point X , alors

$$(80) \quad H|_X = G|_X \iff G|_X \in \mathcal{Q}_C^+(T_X\Sigma) \iff \kappa_1(X) = \kappa_2(X) = 0$$

Preuve. Pour démontrer la relation tensorielle (79), il suffit de l'établir en un point X arbitraire de Σ et dans un système donné de coordonnées x défini dans un voisinage de X . Nous choisissons pour x un système de coordonnées gaussiennes en X : nous déduisons alors la valeur des x -composantes $H_{\mu\nu\sigma\tau}(X)$ à partir de la formule générale donnée en (64). En utilisant les propriétés spécifiques des coordonnées gaussiennes (c.f. Proposition 9.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu\sigma\tau}(X) &= \frac{2}{3}g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) - \frac{1}{3}g_{\mu\sigma,\nu\tau}(X) - \frac{1}{3}g_{\mu\tau,\nu\sigma}(X) \\ &= g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) - \frac{1}{3}(g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) + g_{\mu\sigma,\nu\tau}(X) + g_{\mu\tau,\nu\sigma}(X)) \end{aligned}$$

soit encore que $H_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X) - 1/3g_{\mu\{\nu,\sigma\tau\}}(X)$; la validité de (79) vient alors du fait que $G_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = g_{\mu\nu,\sigma\tau}(X)$ lorsque les coordonnées considérées sont gaussiennes en X (c.f. Corollaire 10.5). La première équivalence de (80) découle immédiatement de (79). Pour la deuxième équivalence plaçons nous dans un système x de coordonnées gaussiennes et réduit au point X (i.e. $\partial_1|_X$ et $\partial_2|_X$ sont les directions des courbures principales) : en particulier, $F_{11}(X)$ et $F_{22}(X)$ coïncident avec les courbures principale de Σ en X , notées respectivement $\kappa_1(X)$ et $\kappa_2(X)$. Ainsi, partant du Théorème 10.4, nous avons

$$(81) \quad G_{\mu\mu\mu\nu}(X) = F_{\mu\mu}(X)F_{\mu\nu}(X) + F_{\mu\nu}(X)F_{\mu\mu}(X) = 2\kappa_\mu(X)F_{\mu\nu}(X)$$

Si $G|_X \in \mathcal{Q}_C^+(T_X\Sigma)$, alors $G_{\mu\mu\mu\mu}(X) = 0$ et pour $\mu = \nu = 1, 2$ nous obtenons d'après (81) que $2\kappa_\mu(X)^2 = 0$, soit encore $\kappa_\mu(X) = 0$. Réciproquement, si $\kappa_1(X) = \kappa_2(X) = 0$, alors (81) entraîne que $G_{\mu\mu\mu\nu}(X) = 0$ et par le Lemme de Moore (Lemme 5.1) $G|_X \in \mathcal{Q}_C^+(T_X\Sigma)$. \square

Corollaire 10.7. Soit (Σ, g) une variété riemannienne de dimension 2 plongée isométriquement dans \mathbb{R}^3 ; alors, pour tout quadruplet (U, V, W, Z) de champs de vecteurs sur Σ

$$R(U, V, W, Z) = G(U, W, V, Z) - G(U, Z, V, W)$$

Preuve. Nous démontrons le corollaire pour les composantes tensorielle relative à un système de coordonné x supposé quelconque. Nous partons de la Définition B où R est exprimer en fonction du tenseur hessien métrique H , de sorte que par a relation (79) qui existe entre les x -composantes de H et celle du tenseur de Gauss G , il vient :

$$R_{\mu\nu\sigma\tau} = H_{\mu\sigma\nu\tau} - H_{\mu\tau\nu\sigma} = G_{\mu\sigma\nu\tau} - G_{\mu\tau\nu\sigma} - \frac{1}{3}(G_{\mu\{\sigma\nu\tau\}} - G_{\mu\{\tau\nu\sigma\}})$$

La conclusion vient du fait que

$$G_{\mu\{\sigma\nu\tau\}} - G_{\mu\{\tau\nu\sigma\}} = (G_{\mu\sigma\nu\tau} + G_{\mu\nu\tau\sigma} + G_{\mu\tau\sigma\nu}) - (G_{\mu\tau\nu\sigma} + G_{\mu\nu\sigma\tau} + G_{\mu\sigma\tau\nu}) = 0$$

(où nous avons utilisé la symétrie 2 de G). \square

11. Theorema Egregium

11.1. La définition de la courbure gaussienne $K(X)$ d'une surface Σ de \mathbb{R}^3 en un point X , dépend d'une famille de paramétrisations spéciales de Σ dans le voisinage de X (i.e. les coordonnées gaussiennes). Une question naturelle est de savoir si $K(X)$ peut-être définie indépendamment d'un système de coordonnées (l'idée de « covariance » est donc déjà implicitement présente chez Gauss). D'une certaine manière le Théorème Egregium de Gauss répond à cette question : le lemme suivant va nous permettre de démontrer une version du « *Théorème Remarquable* » de Gauss.

Lemme 11.1. *Soit (Σ, g) une variété riemannienne de dimension 2 plongée isométriquement dans \mathbb{R}^3 ; alors, dans un système de coordonnées gaussiennes en X , la courbure de Gauss de Σ en X est reliée au tenseur de Riemann, en ce sens que*

$$(82) \quad K(X) = -R_{1212}(X)$$

Preuve. Nous savons (c.f. Théorème 10.4) que le tenseur de courbure R est relié au tenseur de Gauss G , de sorte que $R_{1212} = G_{1122} - G_{1212}$ dans tout système de coordonnées x . Or, nous savons que $G_{\mu\nu\sigma\tau}(X) = g_{\mu\nu\sigma\tau}(X)$ dès que les coordonnées x sont gaussiennes en X et dans ce cas il vient (c.f. Proposition 9.4) $R_{1212}(X) = g_{11,22}(X) - g_{12,12}(X) = -K(X)$. \square

11.2. Il est possible de déduire du Lemme 11.1 la version tensorielle de (82) grâce aux symétries du tenseur de Riemann. Nous aurons besoin pour cela d'une expression classique de l'aire des parallélogrammes du plan euclidien. Ce dernier résultat est un cas particulier de l'identité de Lagrange (c.f. Appendice B pour plus de détails).

Théorème 11.2. *Si u et v sont deux vecteurs du plan euclidien, alors :*

$$(83) \quad \det(u, v)^2 = \begin{vmatrix} \langle u|u \rangle & \langle u|v \rangle \\ \langle v|u \rangle & \langle v|v \rangle \end{vmatrix}$$

Afin d'établir la version tensorielle de (82), soient x et \hat{x} deux systèmes de coordonnées quelconques dont les domaines s'intersectent. Si nous notons respectivement $R_{\mu\nu\sigma\tau}$ et $\hat{R}_{\mu\nu\sigma\tau}$ les composantes du tenseur de Riemann dans les coordonnées x et \hat{x} alors la formule (7) du changement de coordonnées donnée au § 1.8 nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned} \hat{R}_{1212} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^2} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^\tau}{\partial \hat{x}^2} R_{\mu\nu\sigma\tau} \\ &= \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^2} \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^2} R_{1212} + \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^2} \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^2} R_{2121} \\ &\quad + \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^2} \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^2} R_{2112} + \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^2} \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^2} R_{1221} \end{aligned}$$

et compte tenu des symétries des composantes $R_{\mu\nu\sigma\tau}$, il vient :

$$(84) \quad \hat{R}_{1212} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^2} - \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^1} \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^2} \right)^2 R_{1212} = \begin{vmatrix} \partial x^1 / \partial \hat{x}^1 & \partial x^1 / \partial \hat{x}^2 \\ \partial x^2 / \partial \hat{x}^1 & \partial x^2 / \partial \hat{x}^2 \end{vmatrix}^2 R_{1212}$$

Ici, nous reconnaissons la matrice $(\partial x^i / \partial \hat{x}^j(X))$ représentant le changement de base entre les deux bases holonômes $(\partial / \partial x^1, \partial / \partial x^2)$ et $(\partial / \partial \hat{x}^1, \partial / \partial \hat{x}^2)$ de $T_X \Sigma$, de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}^\mu} = \frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^2}$$

Si les coordonnées x sont gaussiennes en X alors la base $(\partial / \partial x^1|_X, \partial / \partial x^2|_X)$ est une base orthonormée de $T_X \Sigma$; par suite, $\partial x^\mu / \partial \hat{x}^\nu = \langle \partial / \partial \hat{x}^\mu | \partial / \partial x^\nu \rangle$ et donc (Théorème 11.2) :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \partial x^1 / \partial \hat{x}^1 & \partial x^1 / \partial \hat{x}^2 \\ \partial x^2 / \partial \hat{x}^1 & \partial x^2 / \partial \hat{x}^2 \end{vmatrix}^2 &= \begin{vmatrix} \langle \partial / \partial \hat{x}^1 | \partial / \partial x^1 \rangle & \langle \partial / \partial \hat{x}^1 | \partial / \partial x^2 \rangle \\ \langle \partial / \partial \hat{x}^2 | \partial / \partial x^1 \rangle & \langle \partial / \partial \hat{x}^2 | \partial / \partial x^2 \rangle \end{vmatrix}^2 \\ &= \begin{vmatrix} \langle \partial / \partial \hat{x}^1 | \partial / \partial \hat{x}^1 \rangle & \langle \partial / \partial \hat{x}^1 | \partial / \partial \hat{x}^2 \rangle \\ \langle \partial / \partial \hat{x}^2 | \partial / \partial \hat{x}^1 \rangle & \langle \partial / \partial \hat{x}^2 | \partial / \partial \hat{x}^2 \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{g}_{11}(X) & \hat{g}_{12}(X) \\ \hat{g}_{21}(X) & \hat{g}_{22}(X) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

où nous reconnaissons les composantes $\hat{g}_{\mu\nu}(X) := \langle \partial / \partial \hat{x}^\mu | \partial / \partial \hat{x}^\nu \rangle$, du tenseur métrique en X . Partant de l'identité (84), nous obtenons grâce au Lemme 11.1 que

$$(85) \quad \hat{R}_{1212}(X) = \begin{vmatrix} \hat{g}_{11}(X) & \hat{g}_{12}(X) \\ \hat{g}_{21}(X) & \hat{g}_{22}(X) \end{vmatrix} K(X)$$

Comme conséquence du Lemme 11.1, nous pouvons énoncer le « *Theorema Egregium* ».

Théorème 11.3. Soit (Σ, g) une variété riemannienne de dimension 2 plongée isométriquement dans \mathbb{R}^3 ; alors dans tout systèmes de coordonnées, nous avons

$$(86) \quad K = -\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}$$

11.3. Pour tout $X \in \Sigma$ le tenseur métrique $g|_X$ coïncide avec la restriction à $T_X \Sigma$ du produit scalaire de \mathbb{R}^3 , de sorte que pour tout $v, u \in T_X \Sigma$, nous avons $g|_X(v, u) = \langle u | v \rangle$. Dans la suite, nous noterons $\Omega|_X(u, v)$ le déterminant du couple (u, v) de vecteurs de $T_X \Sigma$ pour la structure euclidienne de $T_X \Sigma$ associée à $g|_X$: il est alors facile de vérifier que $X \mapsto \Omega|_X$ définit un $(0, 2)$ -tenseur sur Σ . Nous pouvons aussi dire que Ω est le $(0, 2)$ -tenseur anti-symétrique tel que pour tout X et $u, v \in T_X \Sigma$ non colinéaires :

$$(87) \quad \Omega|_X(u, v) = \frac{1}{|u \times v|} \det(u, v, u \times v)$$

Nous allons démontrer [une deuxième forme du Théorème Egregium](#) :

Théorème 11.4. Soit (Σ, g) une variété riemannienne de dimension 2 plongée isométriquement dans \mathbb{R}^3 ; alors, la courbure de Gauss $X \mapsto K(X)$ définie en (71) est le champ scalaire tel que

$$(88) \quad R = -K \Omega \otimes \Omega$$

Preuve. Etant donné x un système de coordonnées quelconque sur Σ , il découle de l'identité de Lagrange (c.f. Théorème 11.2), que les x -composantes de Ω vérifie

$$(89) \quad (\Omega_{\mu\nu})^2 = \begin{vmatrix} \langle \partial_\mu | \partial_\mu \rangle & \langle \partial_\mu | \partial_\nu \rangle \\ \langle \partial_\nu | \partial_\mu \rangle & \langle \partial_\nu | \partial_\nu \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{\mu\mu} & g_{\mu\nu} \\ g_{\nu\mu} & g_{\nu\nu} \end{vmatrix} = g_{\mu\mu}g_{\nu\nu} - g_{\mu\nu}g_{\mu\nu}$$

Les propriétés de symétrie du tenseur de Riemann covariant R définie sur Σ assurent que pour tout $X \in \Sigma$, la forme quadrilinéaire $R|_X$ appartient à l'espace vectoriel $\mathcal{Q}_C^-(T_X \Sigma)$. Or, l'espace tangent $T_X \Sigma$ étant de dimension 2, nous savons (c.f. Proposition 6.2) que

$\mathcal{Q}_C^-(T_X \Sigma)$ est de dimension 1. Nous pouvons même dire un peu plus en utilisant le $(0, 2)$ -tenseur Ω défini en (87); en effet, il est immédiat³⁹ de vérifier que $\Omega|_X \otimes \Omega|_X$ est un élément non nul de $\mathcal{Q}_C^-(T_X \Sigma)$ et par suite, il existe un champ scalaire $X \mapsto \alpha(X)$ t.q.

$$R = -\alpha \Omega \otimes \Omega$$

Si x est un système de coordonnées gaussiennes en un point X donné, alors nous savons (c.f. Lemme 11.1) que la composante $R_{1212}(X)$ du tenseur de Riemann covariant coïncide, au signe près, avec la courbure gaussienne $K(x)$; mais d'autre part, nous savons (c.f. Proposition 9.1) que la base $(\partial_1|_X, \partial_2|_X)$ de $T_X \Sigma$ est orthonormée et par suite :

$$\begin{aligned} K(X) = -R_{1212}(X) &= -R|_X(\partial_1|_X, \partial_2|_X, \partial_1|_X, \partial_2|_X) \\ &= \alpha(X)\Omega|_X(\partial_1|_X, \partial_2|_X)\Omega|_X(\partial_1|_X, \partial_2|_X) = \alpha(X) \end{aligned}$$

□

11.4. Dans une troisième forme du Theorema Egredium (c.f. Théorème 11.6), la courbure s'exprime en fonction de la première et de la deuxième forme fondamentale. Pour voir cela, nous combinons la Proposition 9.4, le Lemme 11.1 avec le Théorème 10.4 pour obtenir le théorème suivant, où les composantes non nulles du tenseur de Riemann (dans un système quelconque de coordonnées) sont reliées à la seconde forme fondamentale.

Théorème 11.5. Soit (Σ, g) une variété riemannienne de dimension 2 plongée isométriquement dans \mathbb{R}^3 ; alors, dans tout système de coordonnées x les composantes du tenseur de Riemann sont reliés aux composantes de la seconde forme fondamentale de sorte que

$$R_{1212} = -(F_{11}F_{22} - F_{12}F_{21}) = - \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix}$$

Si nous nous plaçons dans une carte quelconque, nous savons (c.f. Théorème 11.4) que

$$(90) \quad K = -\frac{R_{1212}}{g_{\mu\mu}g_{\nu\nu} - g_{\mu\nu}g_{\mu\nu}} = R_{1212} \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{vmatrix}$$

où nous rappelons que $g^{\mu\nu}$ dénote le mineur d'indice (μ, ν) de la matrice (g_{ij}) des composantes du tenseur métrique. Nous pouvons aussi retrouver (90) à partir du Théorème 11.4; en effet, si U et V sont deux champs de vecteurs sur Σ , alors pour tout point $X \in \Sigma$ pour lequel $U|_X$ et $V|_X$ ne sont pas colinéaires, nous avons

$$(91) \quad K(X) = -\frac{R|_X(U, V, U, V)}{\Omega|_X(U, V)^2}$$

39. Les anti-symétries 1 et 2 sont évidentes et la cyclicité peut se vérifier directement du fait que

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta & \delta \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{vmatrix}$$

et que d'autre part, pour tout x, y :

$$\begin{vmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & \beta & \delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & x \\ 0 & \delta & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & x & \alpha \\ 0 & y & \beta \end{vmatrix} = 0$$

Si nous nous plaçons dans le domaine d'une carte x quelconque, alors nous pouvons retrouver le Théorème 11.3. En effet en appliquant localement (91) avec $U = \partial_1 = \partial/\partial x^1$ et $V = \partial_2 = \partial/\partial x^2$ (qui ne sont par définition jamais colinéaires) et (91) devient

$$(92) \quad K = -\frac{R(\partial_1, \partial_2, \partial_1, \partial_2)}{\Omega(\partial_1, \partial_2)^2} = -\frac{R_{1212}}{\Omega_{12}\Omega_{12}}$$

Nous retrouvons (90) grâce à l'identité de Lagrange qui assure par (89) que

$$\Omega_{12}\Omega_{12} = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{12}$$

Le Théorème 11.5 nous permet ainsi d'énoncer la troisième forme du Theorema Egregium annoncée comme suit.

Théorème 11.6. Soit (Σ, g) une variété riemannienne de dimension 2 plongée isométriquement dans \mathbb{R}^3 et K le champ scalaire de la courbure gaussienne sur Σ ; alors,

$$(93) \quad K = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{vmatrix}$$

11.5. Nous terminons par la formulation complète du *Theorema Egregium* telle qu'obtenue par Gauss en ce sens sens que la courbure d'une surface en un point peut s'exprimer (indépendamment de la paramétrisation) uniquement à partir des coefficients de la première forme fondamentale et de leurs dérivées premières et secondes. Partant de la formule (86) du Théorème 11.3, il nous « suffit » donc de vérifier que R_{1212} peut s'exprimer uniquement en utilisant les quantités $g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu,\sigma}$ et $g_{\mu\nu,\sigma\tau}$: ce dernier point est délicat et dépend de calculs difficiles initialement effectués par Gauss et Riemann (nous y reviendrons). Ici nous prenons un raccourci en partant de l'expression des composantes du tenseur de courbure (obtenus par Riemann) et donnés dans le Théorème 7.1, de sorte que :

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \frac{1}{2}(g_{11,22} + g_{22,11} - g_{12,21} - g_{21,12}) \\ &\quad + g^{\epsilon\eta}(\mathbb{C}_{11.\epsilon}\mathbb{C}_{22.\eta} - \mathbb{C}_{12.\epsilon}\mathbb{C}_{21.\eta}) \\ &= \frac{1}{2}(g_{11,22} + g_{22,11}) - g_{12,12} \\ &\quad + g^{11}(\mathbb{C}_{11.1}\mathbb{C}_{22.1} - \mathbb{C}_{12.1}\mathbb{C}_{21.1}) + g^{12}(\mathbb{C}_{11.1}\mathbb{C}_{22.2} - \mathbb{C}_{12.1}\mathbb{C}_{21.2}) \\ &\quad + g^{21}(\mathbb{C}_{11.2}\mathbb{C}_{22.1} - \mathbb{C}_{12.2}\mathbb{C}_{21.1}) + g^{22}(\mathbb{C}_{11.2}\mathbb{C}_{22.2} - \mathbb{C}_{12.2}\mathbb{C}_{21.2}) \\ &= \frac{1}{2}(g_{11,22} + g_{22,11}) - g_{12,12} \\ &\quad + \frac{g^{22}}{g}(\mathbb{C}_{11.1}\mathbb{C}_{22.1} - \mathbb{C}_{12.1}\mathbb{C}_{21.1}) - \frac{g^{21}}{g}(\mathbb{C}_{11.1}\mathbb{C}_{22.2} - \mathbb{C}_{12.1}\mathbb{C}_{21.2}) \\ &\quad - \frac{g^{12}}{g}(\mathbb{C}_{11.2}\mathbb{C}_{22.1} - \mathbb{C}_{12.2}\mathbb{C}_{21.1}) + \frac{g^{11}}{g}(\mathbb{C}_{11.2}\mathbb{C}_{22.2} - \mathbb{C}_{12.2}\mathbb{C}_{21.2}) \end{aligned}$$

où nous notons $g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$. En exprimant les symboles de Christoffel en fonction des dérivées premières des composantes métriques (et quelques calculs) :

$$\begin{aligned} R_{1212} &= \frac{1}{2}(g_{11,22} + g_{22,11}) - g_{12,12} \\ &\quad + \frac{g_{22}}{4g} \left(g_{11,1}(2g_{12,2} - g_{22,1}) - g_{11,2}g_{11,2} \right) \\ &\quad - \frac{g_{12}}{4g} \left(g_{11,1}g_{22,2} - 2g_{11,2}g_{22,1} + (2g_{12,1} - g_{22,1})(2g_{12,2} - g_{22,1}) \right) \\ &\quad + \frac{g_{11}}{4g} \left(g_{22,2}(2g_{12,1} - g_{11,2}) - g_{22,1}g_{22,1} \right) \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons l'expression de la courbure gaussienne annoncée, soit :

$$\begin{aligned} (94) \quad K &= -\frac{1}{2g}(g_{11,22} + g_{22,11}) + \frac{1}{g}g_{12,12} \\ &\quad - \frac{g_{22}}{4g^2} \left(g_{11,1}(2g_{12,2} - g_{22,1}) - g_{11,2}g_{11,2} \right) \\ &\quad + \frac{g_{12}}{4g^2} \left(g_{11,1}g_{22,2} - 2g_{11,2}g_{22,1} + (2g_{12,1} - g_{22,1})(2g_{12,2} - g_{22,1}) \right) \\ &\quad - \frac{g_{11}}{4g^2} \left(g_{22,2}(2g_{12,1} - g_{11,2}) - g_{22,1}g_{22,1} \right) \end{aligned}$$

Avec un effort calculatoire (substantiel) il est possible de donner une expression plus « compacte » de la courbure gaussienne K (c.f. [Kli72, Chap. 37 eq. (8)]) : nous en profitons pour introduire les notations utilisées par Gauss, où $(x^1, x^2) = (u, v)$ et $(g_{11}, g_{22}, g_{12}, g_{21}) = (E, F, G, G)$ et $H = (EF - G^2)^{1/2}$ (voir aussi Appendice C), de sorte que

$$(95) \quad K = \frac{1}{2H} \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{F}{EH} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{H} \frac{\partial G}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{2}{H} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{H} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{EH} \frac{\partial E}{\partial u} \right) \right)$$

12. Appendice A : Lemme de Gauss de la géométrie riemannienne

12.1. L'heuristique du § 3 basée sur les symétries des ellipsoïdes (et donc sur le « *théorème spectral* ») donne une interprétation géométrique claire du « *lemme de Gauss spectral* » (c.f. Théorème 3.4). Dans cet Appendice, nous allons retrouver ce résultat de plusieurs manières : nous verrons en particulier que c'est une forme équivalente d'un résultat de géométrie riemannienne (établi par Gauss pour les surfaces) et que nous appelons le « *lemme de Gauss géométrique* ».

12.2. Considérons que $t \mapsto \xi(t)$ est une courbe du plan euclidien représenté par \mathbb{R}^2 et supposons que $O = (0, 0)$ ne soit pas dans le support (C) de ξ . Dans des conditions raisonnables, si $|\xi(t)|$ est minimal en t_0 , alors la dérivée de $|\xi(t)|$ (par rapport à t) évaluée en $t = t_0$ est nulle, ce qui entraîne que $\langle \dot{\xi}(t_0) | \xi(t_0) \rangle = 0$. En considérant le plan euclidien comme une variété riemannienne, il est possible d'interpréter ce résultat de la manière suivante : si une géodésique (D) (i.e. une droite) issue de O coupe (C) en un point X de sorte que OX (distance euclidienne de O à X) réalise la distance de O à (C) , alors (D) et (C) se coupent orthogonalement en X . L'analogue de ce dernier résultat en géométrie riemannienne dépend de la forme spectrale du lemme de Gauss (c.f. Théorème 3.4).

Théorème 12.1. Soient ρ_X le rayon d'injectivité de l'exponentielle en un point X d'une variété riemannienne (M, g) de dimension n et soit (C) le support d'un chemin $t \mapsto \xi(t)$ sur M ne

contenant pas X et tel que la distance riemannienne $d_R(X, \xi(t))$ soit strictement inférieure à ρ_X . Si $Y = \xi(t_0)$ est un point t.q. $r := d_R(X, Y)$ réalise la distance (riemannienne) de X à (C) et si $t \mapsto \gamma(t)$ est la géodésique de vitesse unité, issue de X et t.q. $\gamma(r) = Y$ alors, $\langle \dot{\gamma}(r) | \dot{\xi}(t_0) \rangle = 0$.

Preuve. Soient x un système de coordonnées normales en un point X de M et (C) le support d'un chemin $t \mapsto \xi(t)$ supposé inclus dans le domaine de définition de x et ne contenant pas X . Alors, $x(X) = (0, \dots, 0) = 0$ et la carte $\mathbf{X} (\equiv \exp_X)$ associée est une isométrie radiale d'un voisinage de 0 (dans \mathbb{R}^n) sur un voisinage de X (dans M), de sorte que $d_R(X, \xi(t))^2 = \xi^\mu(t)\xi^\nu(t)\delta_{\mu\nu}$, où $(\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ sont les x -composantes de $\xi(t)$ pour tout t . Si $Y = \xi(t_0)$ est un point tel que $r := d_R(X, Y)$ est la distance riemannienne (> 0) de X à (C) , alors la dérivée de $\xi^\mu(t)\xi^\nu(t)\delta_{\mu\nu}$ par rapport à t s'annule en $t = t_0$, ce qui s'écrit :

$$(96) \quad \dot{\xi}^\mu(t_0)\xi^\nu(t_0)\delta_{\mu\nu} = 0$$

Or par le **lemme de Gauss spectral** (c.f. Théorème 3.4), nous déduisons de (96) que

$$(97) \quad \dot{\xi}^\mu(t_0)\xi^\kappa(t_0)g_{\mu\kappa}(Y) = 0$$

Si $t \mapsto \gamma(t)$ est la géodésique issue de X , de vitesse unité et t.q. $\gamma(r) = Y$ alors,

$$\gamma(t) = \mathbf{X} (t\xi^1(t_0)/r, \dots, t\xi^n(t_0)/r)$$

(où nous utilisons la définition de la géodésique γ et la relation entre \exp_X et la carte \mathbf{X}). Par suite, $r\dot{\gamma}(r) = \xi^\mu(t_0)\partial_\mu|_Y$ et nous pouvons conclure avec (97) que $\langle \dot{\gamma}(r) | \dot{\xi}(t_0) \rangle = 0$. \square

Soit X et Y deux points de M t.q. $0 < \rho = d_R(X, Y) < \rho_X$; alors en considérant les germes de chemin $t \mapsto \xi(t)$ en Y t.q. $d_R(X, \xi(t)) = \rho$, nous déduisons le Lemme de Gauss géométrique comme corollaire du Théorème 12.1 (et donc du le Lemme de Gauss spectral).

Théorème 12.2 (Lemme de Gauss Géométrique). *Soient ρ_X le rayon d'injectivité de l'exponentielle en un point X d'une variété riemannienne (M, g) de dimension n ; pour tout $0 < \rho < \rho_X$ l'hypersphère géodésique $\Sigma(X, \rho)$ formée des $Y \in M$ tels que $d_R(X, Y) = \rho$ est une sous-variété de M de dimension $n - 1$ qui est orthogonale aux géodésiques issues radialement de X .*

12.3. Soit $x = (x^1, \dots, x^n) \mapsto \phi(x)$ un champ scalaire (encore appelé potentiel) défini sur un ouvert de \mathbb{R}^n (euclidien) : le point x est dit régulier lorsque le **gradient vecteur** de ϕ au point x – noté $\mathbf{grad}|_x(\phi)$ – ne s'annule pas. Si $\phi(x) = a$, alors x appartient à l'**équipotentielle** $\{\phi = a\}$; l'hypothèse de régularité sur x signifie alors que $\{\phi = a\}$ est (localement) une hypersurface de \mathbb{R}^n . Considérons alors que $t \mapsto \xi(t) = (\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ est un germe de chemin en x (i.e. $\xi(0) = x$) dont le support est contenu dans $\{\phi = a\}$ (dans un voisinage de x) : en d'autres termes, il existe un intervalle ouvert I contenant 0 et tel que $\phi(\xi(t)) = a$ pour tout $t \in I$. Comme $\phi(\xi(t))$ est constant sur I , il vient :

$$(98) \quad 0 = \frac{d}{dt}\phi(\xi(t)) = \dot{\xi}^i(t)\frac{\partial\phi}{\partial x^i}(\xi(t)) = \left\langle \dot{\xi}(t) \middle| \mathbf{grad}|_{\xi(t)}(\phi) \right\rangle$$

Nous venons de montrer le fait bien connu affirmant que les lignes de champs d'un potentiel scalaire (courbe intégrale du gradient vecteur associé au potentiel) sont normales aux équipotentielles. Plaçons nous maintenant dans le cas particulier où le champ scalaire ϕ est défini sur un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n et possède la symétrie polaire, en ce sens

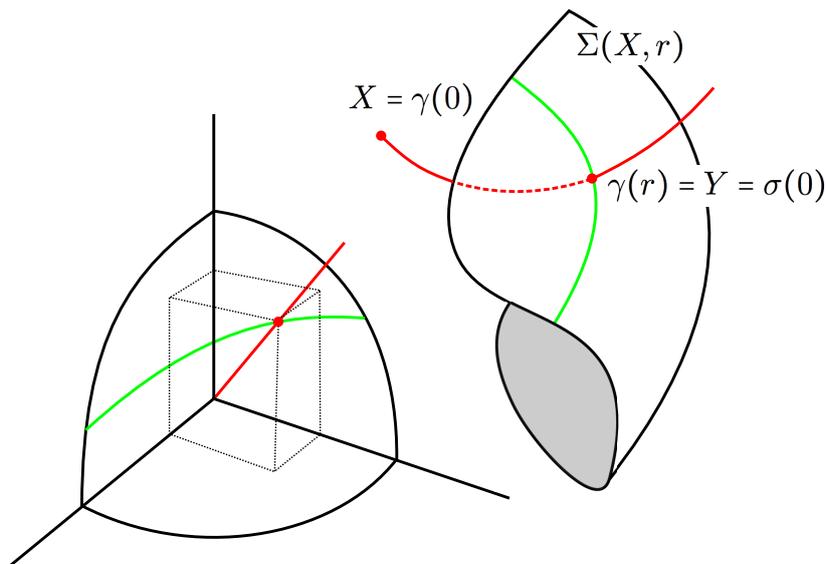


FIGURE 7. Lemme de Gauss géométrique

que $\phi(x) = \varphi(|x|)$, où $r \mapsto \varphi(r)$ est une fonction réelle (lisse) définie dans un voisinage de 0 dans \mathbb{R} et supposée paire : alors en calculant directement les dérivées partielles $\partial\phi/\partial x^i$ par dérivation des fonction composées il vient :

$$(99) \quad \mathbf{grad}|_x(\phi) = \dot{\varphi}(|x|)x/|x|$$

12.4. La version riemannienne des propriétés (98) et (99) du gradient d'un champ scalaire défini sur un ouvert de \mathbb{R}^n permet d'établir le lemme de Gauss géométrique ; nous pourrons aussi démontrer l'équivalence entre le lemme de Gauss géométrique et le lemme de Gauss spectral. Pour voir cela, considérons que φ un champ scalaire défini sur une variété riemannienne (M, g) de dimension n . Dans un premier temps, il est facile de vérifier qu'il existe un tenseur de valence $(0, 1)$ (i.e. une forme différentielle) qu'on appelle le **gradient covariant**⁴⁰ de φ et noté⁴¹ $\nabla\varphi$ et dont les x -composantes coïncident avec $\partial\varphi/\partial x^i$, lorsque x est un système de coordonnées sur M . Par définition, le **gradient vecteur (ou gradient contravariant)** $\mathbf{grad}(\varphi)$ est le champ de vecteur t.q. $\nabla\varphi(V) = \langle \mathbf{grad}(\varphi)|V \rangle$ pour tout champ de vecteur V sur M ; les x -composantes de $\mathbf{grad}(\varphi)$ se déduisent alors des x -composantes de $\nabla\varphi$ par le relèvement de l'indice covariant, en ce sens que

$$\mathbf{grad}(\varphi) = g^{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Proposition 12.3. Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n et φ un champ scalaire sur M . Étant donné X un point tel que $\varphi(X) = r$ et $t \mapsto \xi(t)$ un germe de chemin en X (i.e. $\xi(0) = X$) et tel que $\varphi(\xi(t)) = r$ pour tout t dans un voisinage de 0, alors :

$$\left\langle \dot{\xi}(0) \middle| \mathbf{grad}|_{\xi(0)}(\varphi) \right\rangle = 0$$

40. Attention aux confusions possibles avec les notations d'analyse vectorielle classique!

41. La notation est cohérente avec la dérivation covariante relativement à la connexion de Levi-Civita.

Preuve. Soit X la carte associée à un système de coordonnées \mathbf{x} et soient $(\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$ les \mathbf{x} -composantes de ξ , de sorte que $\xi(t) = X(\xi^1(t), \dots, \xi^n(t))$. Comme $\varphi(\xi(t)) \equiv r$ pour tout t dans un voisinage de 0 la dérivée de $d\varphi(\xi(t))/dt$ s'annule en $t = 0$, ce qui donne :

$$0 = \dot{\xi}^i(0) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(\xi(0)) = g_{ik}(\xi(0)) \dot{\xi}^i(0) g^{ki}(\xi(0)) \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(\xi(0)) = \left\langle \dot{\xi}(0) \middle| \mathbf{grad}_{|\xi(0)}(\varphi) \right\rangle$$

□

Nous supposons maintenant que (M, g) est géodésiquement complète : alors deux points quelconques X et Y sont toujours reliés par (au moins) une géodésique : cela permet de définir la distance riemannienne $d_R(X, Y)$ entre X et Y , comme l'infimum des longueurs des chemins reliant X et Y . L'hypothèse de complétude géodésique entraîne que pour tout $X, Y \in M$ il existe (au moins) une géodésique γ de vitesse unité issue de X et t.q. $Y = \gamma(d_R(X, Y))$. Fixons un point de base X et définissons le champ scalaire ρ t.q.

$$\rho(Y) := d_R(X, Y)$$

Théorème 12.4. Soit $r \mapsto \varphi(r)$ une fonction réelle (lisse) définie dans un voisinage de 0 dans \mathbb{R} et supposée paire. Si ρ_X est le rayon d'injectivité de l'exponentielle en un point X d'une variété riemannienne (M, g) de dimension n et si ϕ est un champ scalaire défini sur $\mathcal{U}_X := \{d_R(X, Y) < \rho_X\}$ et t.q. $\phi(Y) = \varphi(d_R(X, Y))$ alors, pour tout système de coordonnée \mathbf{x} normal en X

$$\mathbf{grad}|_Y(\phi) = \dot{\varphi}(d_R(X, Y)) \frac{\mathbf{x}^i(Y)}{d_R(X, Y)} \partial_i|_Y$$

Théorème 12.5. Soit (M, g) une variété riemannienne géodésiquement complète et \mathbf{x} un système de coordonnées normales en un point X de M ; alors, pour tout $Y \in \mathcal{U}_X \setminus \{X\}$

$$(100) \quad \mathbf{grad}|_Y(\rho) = \frac{\mathbf{x}^i(Y)}{\rho(Y)} \partial_i|_Y \iff g^{ij}(Y) \mathbf{x}^k(Y) \delta_{kj} = \mathbf{x}^i(Y)$$

Preuve. Rappelons que $\mathcal{U}_X := \exp_X \{v \in T_X M ; \langle v|v \rangle < r_X\}$ où r_X est le rayon d'injectivité de \exp_X . Soient \mathbf{x} un système de coordonnées normales en X et X la carte associée (i.e. $X \approx \exp_X$) : alors ⁴² l'unique géodésique $t \mapsto \gamma(t)$ de vitesse unité issue de $X = X(0, \dots, 0)$ et reliant X et $Y = X(y^1, \dots, y^n)$ vérifie

$$\gamma(t) = \exp_X \left(t \frac{y^\mu}{\rho(Y)} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_X \right) = X \left(t \frac{y^1}{\rho(Y)}, \dots, t \frac{y^n}{\rho(Y)} \right)$$

Du fait que $\rho(Y) = (y^i y^j \delta_{ij})^{1/2}$, nous avons

$$\mathbf{grad}|_Y(\rho) = \frac{g^{ij}(Y) y^k \delta_{kj}}{\rho(Y)} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_Y$$

L'équivalence entre (100) est alors évidente.

42. En effet, supposons que $Y = \gamma(t_0)$ où $\gamma(t) = \exp(tv)$ avec $v \in T_X M$ t.q. $g|_X(v, v) = 1$. Alors, par définition de la distance riemannienne entre X et Y , la condition $Y \in \mathcal{U}_X$, assure qu'il est nécessaire que

$$d_R(X, Y) = \int_0^{t_0} \sqrt{g|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

Or, par définition des géodésiques inertielles, $\dot{\gamma}(t)$ est transportée parallèlement (pour la connexion de Levi-Civita) le long de γ : le fait que $d_R(X, Y) = t_0$ découle directement du fait que

$$g|_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) \equiv g|_X(\dot{\gamma}(0), \dot{\gamma}(0)) = g|_X(v, v) = 1$$

□

Dans le contexte du Théorème 12.5, la distance riemannienne $\rho(Y)$ de X à Y (dans un voisinage de X) entraîne que l'équipotentielle $\Sigma_r = \{\rho = r\}$ coïncide avec l'hypersphère riemannienne $\Sigma(X, r)$ de centre X et de rayon r : d'après la Proposition 12.3, nous savons donc que si $Y \in \Sigma_r$, alors $\text{grad}_Y(\rho)$ est orthogonal à Σ_r en Y . Par définition la première équation de l'équivalence (100) signifie que $\text{grad}_Y(\rho)$ coïncide avec la dérivée $\dot{\gamma}(\rho(y))$ de la géodésique de vitesse unité issue de X et passant par Y au temps $\rho(y)$: c'est donc une forme équivalent du Lemme de Gauss.

13. Appendice B : L'identité de Lagrange

L'inégalité de Cauchy-Schwarz – affirmant que pour $u, v \in \mathbb{R}^n$ le produit scalaire $\langle u|v \rangle$ est majoré par $|u| \cdot |v|$ – peut être vue comme un corollaire de l'identité de Lagrange

$$(101) \quad \langle u|u \rangle \langle v|v \rangle - \langle u|v \rangle^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} \det_{ij}(u, v)$$

où nous notons \det_{ij} le mineur d'indice (i, j) . Dans le cas du plan euclidien, (101) est équivalente à « l'identité de Diophante » qui nous dit que⁴³ que pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$(102) \quad (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

Si $u = (a, b)$ et $v = (c, d)$ alors (dans \mathbb{R}^2 euclidien) le membre de gauche de (102) correspond à $\langle u|u \rangle \langle v|v \rangle$. Pour retrouver l'identité de Lagrange en dimension 2, nous devons légèrement modifier le membre de droite en écrivant

$$\begin{aligned} (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 &= \left((ac)^2 + (bd)^2 - 2(ac)(bd) \right) + \left((ad)^2 + (bc)^2 + 2(ad)(bc) \right) \\ &= \left((ac)^2 + (bd)^2 + 2(ac)(bd) \right) + \left((ad)^2 + (bc)^2 - 2(ad)(bc) \right) \\ &= \langle u|v \rangle^2 + \det(u, v) \end{aligned}$$

où $\det(\cdot, \cdot)$ est le déterminant sur \mathbb{R}^2 ; finalement (102) devient :

$$(103) \quad \det(u, v)^2 = \begin{vmatrix} \langle u|u \rangle & \langle u|v \rangle \\ \langle v|u \rangle & \langle v|v \rangle \end{vmatrix} = \langle u|u \rangle \langle v|v \rangle - \langle u|v \rangle^2$$

La différence de forme entre l'identité de Diophante (102) et l'identité de Lagrange (103) tient au fait que la première est adaptée à un problème d'arithmétique (le théorème des deux carrés) alors que la deuxième décrit une propriété géométrique (définition du déterminant indépendante des coordonnées⁴⁴).

43. L'identité de Diophante traduit aussi le fait que le module du produit des nombres complexes $a + ib$ et $c + id$ est égal au module du produit de ces deux nombres.

44. (1) : L'identité de Lagrange en dimension 3 traduit la propriétés de multiplicativité des modules dans l'espace des quaternions purs.)

(2) : L'identité de Lagrange est un cas particulier de l'identité de Cauchy-Binet : si A est une matrice $n \times m$ (avec $n \leq m$) et si S est un sous ensemble de $\{1, \dots, m\}$ de cardinal $|S| = s$, alors A_S est la matrice $s \times s$ extraite de A suivant les indices dans S ; alors ; si nous notons \det le déterminant agissant sur les matrices carrées, et si A (resp. B) est un matrice $n \times m$ (resp. $m \times n$), alors nous avons

$$\det(AB) = \sum_{S \subset \{1, \dots, m\}; |S|=n} \det(A_S) \det(B_S)$$

Lorsque $m = n$ nous retrouvons que $\det(AB) = \det(A) \det(B)$: il semblerait que la formule de Cauchy-Binet soit la première démonstration de la propriété de multiplicativité du déterminant.

14. Appendice C : Formule de la courbure gaussienne (d'après Wikipédia)

Nous donnons ici une démonstration classique de la formule donnant la courbure de Gauss en un point d'une surface en fonction des première et seconde formes fondamentale : la présentation qui en est faite ici (tirée de Wikipédia) respecte un certain nombre de notations qui remontent à Gauss (par exemple les variables u et v du paramétrage de la surface étaient utilisées par Gauss lui-même). Pour voir cela, considérons une surface Σ (supposée régulière) paramétrée au moyen de deux paramètres u et v , et soit

$$(104) \quad I = Edu^2 + 2Gdudv + Fdv^2$$

la première forme fondamentale et

$$(105) \quad II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

la seconde forme fondamentale. Alors la courbure de Gauss vaut :

$$K = \frac{LN - M^2}{EF - G^2}$$

Plus précisément, soit $(u, v) \rightarrow \theta(u, v)$ un paramétrage de la surface. Une base du plan (vectoriel) tangent $T_P\Sigma$ au point $P = \theta(u, v)$ est donnée par $\partial\theta/\partial u$ et $\partial\theta/\partial v$. Soient $X = a\partial\theta/\partial u + b\partial\theta/\partial v$ et $Y = c\partial\theta/\partial u + d\partial\theta/\partial v$; dans la suite nous utiliserons une représentation matricielle, où les vecteurs X et Y sont identifiés à des matrices 2×1 , de sorte que

$$X \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y \equiv \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

La première forme fondamentale donne l'expression dans la base $(\partial\theta/\partial u, \partial\theta/\partial v)$ du produit scalaire dans $T_P\Sigma$ et (104) se traduit matriciellement en écrivant :

$$I(X, Y) = \langle X|Y \rangle = {}^tX \begin{pmatrix} E & G \\ G & F \end{pmatrix} Y$$

La deuxième forme fondamentale est la forme bilinéaire associée à l'endomorphisme symétrique de Weingarten W , dont les deux valeurs propres sont les courbures principales de la surface au point considéré et (105) se traduit matriciellement en écrivant :

$$II(X, Y) = \langle X|W(Y) \rangle = {}^tX \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} Y$$

Par conséquent, si Y est un vecteur propre de W associé à la valeur propre λ , alors pour tout vecteur X nous avons $\langle X|W(Y) \rangle = \lambda \langle X|Y \rangle$, soit encore $II(X, Y) = \lambda I(X, Y)$; en notation matricielle nous avons :

$${}^tX \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} Y = \lambda {}^tX \begin{pmatrix} E & G \\ G & F \end{pmatrix} Y$$

Cette relation étant vraie pour tout X , il vient :

$$\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} Y = \lambda \begin{pmatrix} E & G \\ G & F \end{pmatrix} Y$$

Le vecteur propre Y étant non nul, cela entraîne que la matrice

$$\begin{pmatrix} L - \lambda E & M - \lambda G \\ M - \lambda G & N - \lambda F \end{pmatrix}$$

est non inversible : l'annulation de son déterminant s'écrit

$$(EF - G^2)\lambda^2 - (EN + FL - 2MG)\lambda + LN - M^2 = 0$$

Les racines de cette équation sont les courbures principales : leur produit vaut donc

$$\frac{LN - M^2}{EF - G^2}$$

qui n'est autre que la courbure de Gauss cherchée.

RÉFÉRENCES

- [Am13] V.I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.
- [BG68] R.L. Bishop and S.I. Goldberg. *Tensor Analysis on Manifolds*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1968.
- [Bou92] J.-P. Bourguignon. Transport parallèle et connexions en géométrie et en physique, in "1830-1930 : a century of geometry". *Springer-Verlag, Lect. Notes in Physics*, 402 :150–164, 1992.
- [DD87] A. Dahan-Dalmédica. Mécanique et théorie des surfaces : les travaux de Sophie Germain. *Historia Mathematica*, 14 :347–365, 1987.
- [Die86] J. Dieudonné. *Abrégé d'histoire des mathématiques : 1700-1900*. Hermann, 1986.
- [Eul60] L. Euler. Recherches sur la courbure des surfaces. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin*, pages 119–143, 1760.
- [Gau28] K. F. Gauss. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Typis Dieterichianis, 1828.
- [Kli72] M. Kline. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Presse – New York, 1972.
- [Mil63] J. Milnor. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.
- [Moo09] J. D. Moore. Lectures on differential geometry math 240bc, 2009.
- [Nas54] J. Nash. C1-isometric imbeddings. *Annals of Mathematics*, 60 :383–396, 1954.
- [Nas56] J. Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Annals of Mathematics*, 63 :20–63, 1956.
- [Oli17a] E. Olivier. Le tenseur de courbure II : dérivation covariante, preprint-2017.
- [Oli17b] E. Olivier. Le tenseur de courbure III : calcul extérieur et connexion de Ehresmann. preprint-2017.
- [Rie68] B. Riemann. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. (Habilitationsschrift – 1854)*, volume XIII. Abhandl. Kgl. Gesell. Wiss. Göttingen, 1868.
- [Rie92] B. Riemann. Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab III^{ma} Academia Parisiensi propositae (1861). *Riemann's Gesamm. Math. Werke*, XXII :391–423, 1892.
- [Spi99] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Number vol. 2 in A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Publish or Perish, inc. (Sec. Ed.), 1999.
- [Wei72] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology – Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley, 1972.