(2018) B.I.A.A. no **109** –Bulletin d'Informatique Approfondie et Applications
ISSN 0291-5413 (Université d'Aix-Marseille)

SYSTÈME DE NUMÉRATION ET RÉPARTITION

Alain THOMAS [1 2]

Résumé. – Il s'agit de donner une visions d'ensembles sur les questions portant sur les systèmes de numération, la répartition des suites modulo 1, la somme des chiffres, les nombres normaux

1. Introduction

1.1. **Définition générale.** Suivant la définition donnée par Galambos dans l'introduction de [Ga], on appellera système de développement en série des réels, un ensemble $\mathcal{U}$ de suites réelles $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ et une correspondance qui associe à certains réels x une suite $(u_n(x))_{n=0}^{\infty}$ telle que

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

1.2. **Algorithme glouton (ou développement régulier).** Pour tout $m \in N$, on note $\mathcal{U}_m$ l'ensemble des préfixes d'ordre $m+1$ des éléments de $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{U}_m = \{(u_n)_{n=0}^{m} : (u_n)_{n=0}^{\infty} \in u\}.$$

On définit par récurrence la suite $(u_n(x))_{n=0}^{\infty}$: si $u_0(x), \ldots, u_{m-1}(x)$ sont déja connus, ou si $m = 0$, $u_m(x)$ est le plus grand réel qui vérifie

$$(1) \qquad (u_n(x))_{n=0}^{m} \in \mathcal{U}_m \quad \text{et} \quad x = \sum_{n=0}^{m} u_n(x) \leq x.$$

On dit que x admet un développement régulier si les $u_n(x)$ existent et si leur somme est égale à x.

1.3. **Développement quasi régulier.** On remplace l'inégalité large par une inégalité stricte ; $v_m(x)$ est le plus grand réel tel que

$$(2) \qquad (v_n(x))_{n=0}^{m} \in \mathcal{U}_m \quad \text{et} \quad x = \sum_{n=0}^{m} v_n(x) < x.$$

Les développements sont alors infinis, en ce sens que $\{n : v_n(x) \neq 0\}$ ne peut pas être fini si x admet un développement quasi régulier. S'il admet aussi un développement régulier infini, on a $u_n(x) = v_n(x)$ pour tout n.

1. alain.thomas@univ-provence.fr
2. Université de Provence, 3 Pl. V. Hugo, 13331 Marseille Cedex 03

1.4. **Développement des entiers.** Ici $\mathcal{U}$ est un ensemble de suites réelles finies $(u_n)_{n=0}^s$ de longueur quelconque. Pour tout $s \geq 0$ et $h \leq s$ on pose $\lambda_s := \inf \mathcal{U}_{s,h} \backslash \{0\}$ où

$$\mathcal{U}_{s,h} := \{(u_n)_{n=s-h}^s \,:\, (u_n)_{n=0}^s \in \mathcal{U}\}\ ;$$

En supposant que $\lim_n \lambda_n = +\infty$, il est possible d'associer à tout entier N, l'entier $s = s(N) = \max\{n : \lambda_n \leq N\}$; et définir par récurrence $u_{s-h} = u_{s-h}(N)$ pour $h = 0, 1, \ldots, s$, comme étant le plus grand réel tel que

$$(3) \qquad (u_n(x))_{n=s-h}^s \in \mathcal{U}_{s,h} \quad \text{et} \quad x = \sum_{n=s-h}^{s} u_n(x) \leq x.$$

1.4.1. *Exemples 1.* Développement de Parry [Pa] en base réelle $\theta > 1$. Tout réel x se développe sous la forme

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n / \theta^n$$

avec pour $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\varepsilon_m = \left[\theta^m \left(x - \sum\nolimits_{n=0}^{m-1} \varepsilon_n \theta^{-n}\right)\right]$$

(où $[x]$ désigne la partie entière de x). C'est l'algorithme (1) avec

$$u = \left\{(\varepsilon_n \theta^{-n})_{n=0}^{\infty} : (\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{Z}^N\right\}.$$

Dans le cas $1 < \theta < 2$, la plus petite suite de $\{0,1\}^N$ qui le vérifie est obtenue par l'algorithme paresseux [Er1].

1.4.2. *Exemples 2.* Développement des entiers en base $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$, où $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite d'entiers telle que $\alpha_0 = 1$ et $\lim_n \alpha_n = +\infty$. Tout entier positif N admet un développement

$$N = \sum_{n=0}^{s} \varepsilon_n \alpha_n$$

avec $s = \max\{n \,:\, \alpha_n \leq N\}$ et où, pour $m = s, s-1, \ldots$

$$\varepsilon_n = \left[1/\alpha_m \left(N - \sum_{n=m+1}^{s} \varepsilon_n \alpha_n\right)\right]$$

C'est (3) avec $\mathcal{U} = \{(\varepsilon_n \alpha_n)_{n=0}^s : (\varepsilon_n)_{n=0}^s \in \mathbb{Z}^*\}$. (Nous donnons d'autres exemples de développements dans les paragraphes 3, 4 et 6.)

2. Somme des chiffres en base entière

On considère les développements en base entière $g \geq 2$ $N = \sum_{n=0}^s \varepsilon_n g_n$ avec $\varepsilon_n \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$ et la somme des chiffres $s_g(N) = \sum_{n=0}^s \varepsilon_n$. On notera $s(N)$ la somme des chiffres $s_2(N)$ en base 2.

2.1. **Répartition de** $s(N)$**.** La somme des chiffres $s(n)$, pour $0 \leq n < 2k$, a une répartition binomiale c'est-à-dire

$$\#\left\{n \leq 2^k \,:\, s(n) = h\right\} = \binom{h}{k}$$

Il est donc *normal* de se ramener à une répartition gaussienne. Le principal théorème de Schmid [Scm] porte sur la répartition du vecteur $(s(k_1 n), \ldots, s(k_s n))$, où $k_1, \ldots, k_s$ sont des constantes impaires distinctes. Ainsi, la proportion

$$\frac{1}{x}\#\left\{n \leq x \,:\, s(k_i n) = a_i,\ i = 1 \ldots, s\right\}$$

est égale à

$$\frac{1}{(2\pi\ell(x))^s\sqrt{\det(V)}}\exp\left(-\frac{1}{2\ell(x)}A_xV^{-1}A_x^*\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{\ell(x)}\right)^{s+1}}\right)$$

avec

$$A=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_s\end{bmatrix},\quad A_x=A-\frac{\ell(x)}{2}\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\quad \text{et}\quad V=\left[\frac{\operatorname{pgcd}^2(k_i,k_j)}{4k_ik_j}\right]_{i,j=1}^s.$$

Schmid explique ensuite comment redémontrer, comme conséquences de son théorème, d'autres résultats connus. On retrouve ainsi l'approximation de la fonction de répartition :

$$\#\left\{n\le x\ :\ \frac{s(k_in)-\ell(x)/2}{\sqrt{\ell(x)}}\le\xi_i\ :\ i=1,\dots,s\right\}$$

par celle d'une loi de Gauss [Sct] ; il traite aussi l'approximation de

$$\#\{n<x:s(k_1n)-s(k_2n)=a\}$$

[Stl] et de la fonction de répartition de $s(k_1n)-s(k_2n)$ [Kat] ; le résultat de Solinas [So] dans le cas $g=2$, c'est-à-dire l'équirépartition modulo tout entier m, de la suite

$$n\mapsto(s(k_1n),...,s(k_sn))$$

dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^s$ (pour g quelconque elle est équirépartie dans un sous ensemble de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^s$). Tous ces résultats se déduisent du théorème de Schmid par une sommation appropriée en $(a_1,...,a_s)$; mais pour éviter que la somme des termes d'erreur ne soit trop grande, on limite la sommation (grâce au théorème central limite) à un domaine défini par

$$\left|a_i-\frac{\ell(x)}{2}\right|\le C\sqrt{\ell(x)\log\ell(x)},\qquad i=1,\dots,s.$$

Autre résultat, moins lié au théorème de Schmid, la suite

$$n\mapsto(x_1s(k_1n),...,x_ss(k_sn))$$

est équirépartie modulo 1, c'est à dire dans $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^s$, si une des constantes x_n est irrationelle [Cq1] ; de même que la suite

$$n\mapsto(x_1s(k_n),x_2\omega(n))$$

où $\omega(n)$ est le nombre de diviseurs premiers de n. De plus l'équirépartition de la suite

$$n\mapsto xs(n)$$

est uniforme si x est irrationel et si les coefficients a_n de son développement en fraction continue sont bornés [Gr1, Ti]. La discrépance uniforme définie par

$$T_N:=\sup_{0\le a<b\le 1}\sup_{k\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{N}\#\Big\{n\ :\ k+1\le n\le k+N,\ a\le\operatorname{frac}\{xs(n)\}\le b\Big\}-(b-a)\right|,$$

de sorte que

$$T_N=o\left(\frac{\sqrt{\log(\log N)}}{\sqrt[4]{\log N}}\right).$$

2.2. **Formules asymptotiques pour la somme des chiffres.** La somme $\sum_{n=0}^{N}(-1)^{s(n)}$ étant égale à $(-1)^{s(N-1)}$ si N impair et 0 si N pair, elle ne presente pas d'intérêt ; Coquet [Cq2] s'est interessé à la somme $\sum_{n=0}^{N}(-1)^{s(3n)}$ et obtient :

Théorème 2.1. *Il existe $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue de période 1, nulle part dérivable telle que*

$$\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^{s(3n)} = N^\rho F(\ell)+o(1).$$

avec $\rho=\log_4 3$ et $\ell=\log_4 N$; de plus, $F(\mathbb{R})=[2\sqrt{3}/3, 55/3(3/65)^\rho]\approx[1.15,1.6]$.

Pour la moyenne de la somme des chiffres, il y a la formule de Delange ([De]) :

Théorème 2.2. *Il existe $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue de période 1, nulle part dérivable telle que*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}s_g(n)=\frac{g-1}{2}\ell+F(\ell)+o(1),$$

avec $\ell=\log_g N$; (Delange calcule aussi les coefficients de Fourier de F).

Pour les moments de la somme des chiffres en base 2 il y a l'estimation de Coquet [Cq3] :

Théorème 2.3. *Il existe $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue de période 1, nulle part dérivable telle que*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}s_g(n)^d=\begin{cases}(\ell/2)^d+G_{d,d-1}(\ell)+\cdots+G_{d,0}(\ell) & \text{pour } d\in\mathbb{N}\\ \\ (\ell/2)^d+(\ell/2)^{d-1}\left(dF(\ell)+d(d-1)/4\right)+O(\ell^{d-2}) & \text{pour } d\in\mathbb{R}\end{cases}$$

avec $\ell=\log_g N$ et où la fonction F est la même que dans la formule de Delange.

Flajolet, Grabner, Kirschenhofer, Prodinger et Tichy [Fl1] redémontrent entre autres la formule de Delange en base 2, mais par une méthode de théorie analytique des nombres : la transformation de Mellin donne la formule

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}s_g(n)=\frac{N-1}{2}-\frac{1}{2i\pi}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\frac{\zeta(s)}{2^s-1}N^s\frac{ds}{s(s+1)}.$$

(où ζ est la fonction de Riemann) et en calculant par résidus cette intégrale, on obtient F sous forme de série de Fourier. On a des formules analogues [Gr2] pour $\sum_{n=0}^{N-1}f(n)$, où f est une fonction complètement g-additive, c'est-à-dire vérifiant respectivement

$$f\left(\sum_{n=0}^{s}\varepsilon_n g^n\right)=\sum_{n=0}^{s}f(\varepsilon_n)\quad\text{(resp.)}\quad\text{ou}\quad f\left(\sum_{n=0}^{s}\varepsilon_n g^n\right)=\prod_{n=0}^{s}f(\varepsilon_n).$$

2.3. **Autres résultats sur la somme des chiffres.** Dans [Fl1], la somme $\sum_{n=0}^{N-1}2^{s(n)}$ (qui est aussi égale au nombre de coefficients impairs dans les N premières lignes du triangle de Pascal), peut se mettre sous la forme

$$\sum_{n=0}^{N-1}2^{s(n)}=N^\rho F(\ell)\tag{4}$$

avec $\rho=\log_2 3$ et $\ell=\log_2 N$ et où F est continue sur $\mathbb{R}$ de période 1, dérivable presque partout. Plus précisément F est dérivable en x si la fréquence du chiffre 1, dans son développement binaire, est inférieure à $\log_2(3/2)\approx 0.585$ et non dérivable en x si cette fréquence est supérieure à $\log_2(3/2)$. On a des généralisations dans [Ste] pour une base quelconque, dans [Dav] pour le triangle de Pascal modulo 4 et [We] modulo p ou p^2, p

premier. La formule (4) sur $\sum_{n=0}^{N-1} 2^{s(n)}$ est à rapprocher d'une autre formule de [Fl1] portant sur la fonction 2-additive définie par

$$h\left(\sum_{n=0}^{s} \varepsilon_n 2^n\right) = \sum_{n=0}^{s} \varepsilon_n 3^n$$

pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n=0}^{\infty}$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On a, avec les mêmes valeurs de ρ et ℓ, et une autre fonction F,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} h(n) = N^{\rho}F(\ell) + \frac{1}{4}.$$

D' autres articles ([Mc1], [Mc2], [Ya]) s' intéressent à l' ensemble des entiers n tels que $s_g(n) = \sum_i s_g(pi)$, avec $n = p_1...p_k$ et $p_1, ..., p_k$ premiers. D'après [Da1], l'ensemble

$$\left\{n \;:\; s_g(n) - \sum_i s_g(pi) = c\right\}$$

est infini si $g \geq 8$; l'ensemble

$$\left\{s_g(n)/\sum_i s_g(pi) \;:\; n \in \mathbb{N}\right\} \cap [0,1]$$

est dense ; il contient les irrationels si $b-1$ n'est pas premier. Senge et Strauss [Se] démontrent que, si g et g' sont multiplicativement indépendants, l'ensemble

$$\{n : s_g(n) \leq c \text{ et } s'_g(n) \leq c\}$$

est fini quelque soit c. On a des généralisations dans [Mi] et [Scl]. Slivka et Severo [Sl] calculent la mesure de Lebesgue de l'ensemble des réels $x \in [0,1]$ dont la somme des i premiers chiffres binaires est plus petite que $i(1/2+\varepsilon)$ pour tout i supérieur à j, sans l'être pour $i = j$.

2.4. **Occurences de blocs.** Soit $s(w,n)$ le nombre d'occurences du bloc w dans le développement binaire de n. Dans [Fl1] on a une formule analogue à celle de Delange, pour $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s(w,n)$. Dans [Al1], une formule de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \log 2(b(w,n))X^{s(w,n)} = -\frac{1}{1-X}$$

où, pour chaque bloc w, $b(w,n)$ est une fraction rationelle en n. Dans [Bri], une formule pour $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^{s(11,n)}$, analogue à celle de Coquet sur $\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^{s(3n)}$. Autres résultats sur $(-1)^{s(11,n)}$ (suite de Rudin-Shapiro), le lien entre cette suite et le pliage d'une feuille de papier [Mo]. D'aprés Allouche et Mendès France [Al2], pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module 1, avec $z \neq 1$, il existe $\alpha < 1$ tel que

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} z^{s(11,n)} = o(N^{\alpha})$$

d'où l'équirépartition de $n \mapsto x \cdot s(11,n) \mod 1$, par le critère de Weyl, pour x irrationel. D'après Safari [Sa],

$$\max_{\theta \in \mathbb{R}} \left|\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{s(11,n)} e^{in\theta}\right| \leq \psi(\log_2 N)\sqrt{N}$$

où la fonction ψ oscille entre $\sqrt{2}$ et $(2+\sqrt{2})\sqrt{3/5}$; la fonction ψ est continue de période 1 et presque partout non dérivable. La majoration en $O(\sqrt{N})$ ne peut pas être améliorée, car

$$\max_{\theta\in\mathbb{R}}\left|\sum_{n=0}^{N-1}u_n e^{in\theta}\right|\geq\sqrt{N},$$

quelle que soit la suite $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ de nombres complexes de module 1. Prodinger [Pr] a une formule sur la longueur du plus grand bloc de 1 dans le développement binaire de n, par une méthode proche de celle de [Fl1]. Drobot et Turner [Dr] calculent la dimension de Hausdorff de l'ensemble des $x\in[0,1]$ dont le développement binaire vérifie $\varepsilon_{j+1}+...+\varepsilon_{j+r}\geq c$ pour tout j (r étant fixé) ; par exemple, l'ensemble

$$\Big\{x:\varepsilon_{j+1}+\varepsilon_{j+2}\geq 1,\ j=0,1,\dots\Big\}$$

a pour dimension $\log_2\rho(M)$, où $\rho(M)$ est la plus grande valeur propre de la matrice M de la substitution σ, telle que $\sigma(ab)=b0b1$ si $b0$ appartient à $\mathcal{A}$ et $b1$ si non et où $\mathcal{A}$ est l'alphabet des mots ab, a et b valant 0 ou 1, tels que $a+b\geq 1$. C'est aussi l'entropie topologique du sous shift de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ associé.

3. **Développement des entiers en base réelle** $q>1$

La définition donnée par Grabner et Tichy [Gr1] utilise la representation infinie de θ en base θ : $\theta=\sum_{n=0}^{\infty}a_n/\theta^n$ où, pour $m=0,1,2,\dots$, l'entier a_m est le plus grand entier tel que $\theta=\sum_{n=0}^{m}a_n/\theta^n$. Puis il définit une suite $G=(G_n)_{n=0}^{\infty}$, qui servira de base au développement des entiers : $G_0=1$ et $G_{n+1}=1+a_0G_n+\cdots+a_nG_0$ pour $n=0,1,2,\dots$. On appelle alors développement des entiers en base θ, leur développement sous la forme

$$N=\sum_{n=0}^{s}\varepsilon_n G_n$$

par l'algorithme de l'introduction, I-5. Cette dénomination est justifiée par le fait que G_{n+1}/Gn tend vers θ, et d'autre part [Gr1] c'est la seule façon de définir la suite G, si on veut que les suites admissibles soient les mêmes que pour le développement des réels $\sum_{n=0}^{s}\varepsilon_n G_n$ est le développement d'un entier si et seulement si $\sum_{n=1}^{s+1}\varepsilon_{s+1-n}/\theta^n$ est le développement d'un réel. Toujours dans le même article, une formule analogue à celle de Delange (vue au § 2.2, pour la somme des chiffres $s_G(n)=\sum_{n=0}^{s}\varepsilon_n$, mais avec un reste en $o(1)$; ils calculent aussi la dimension de Hausdorff de la courbe de F, qui est 1 bien que F ne soit dérivable en aucun point. La définition donnée par Bertrand-Mathis ([Be1]) des dévelopements des entiers en base réelle, est la même, mais utilise le développement éventuellement fini de θ en base θ, d'où deux cas. Elle remarque aussi que G_n est égal au nombre de suites admissibles de longueur n. Dans l'article de Pethö et Tichy [Pe], on a la même formule dans un cas plus général, non lié à une base réelle. L'exposé de Coquet [Cq4] généralise l'équirépartition modulo 1 de la suite $n\mapsto xs_g(n)$ pour x irrationnel dans le cas d'une somme des chiffres définie à partir des développements en base $(q_k)_{k=0}^{\infty}$, formée d'une suite strictement croissante d'entiers, avec $q_0=1$. Sa condition sur la suite $(q_k)_{k=0}^{\infty}$ équivaut à dire qu'il existe un entier p tel que $\inf_{k\in\mathbb{N}}\{q_{k+1}/q_k>1\}$. C'est le cas, par exemple, pour la somme des chiffres associée à une fraction continue (c'est-à-dire quand les q_k sont les dénominateurs des bonnes approximations d'un irrationnel x).

4. **Substitutions ; automate associé et développement des entiers**

Ilt s'agit de résultats de Rauzy et Dumont qu'on trouve dans [Rz1, Rz2, Du1]. Soit σ une substitution sur un alphabet fini $\mathcal{A}=\{1,...,d\}$. On suppose $1<\sigma(1)$ (c'est-à-dire que 1 est préfixe strict du mot $\sigma(1)$) et σ primitive (pour un certain entier n, chaque $\sigma^n(a)$

contient toutes les lettres de $\mathcal{A}$). Par commodité, on numérotera les arcs de l'automate associé au moyen de l'alphabet

$$\mathcal{A}' = \{m \in \mathcal{A}* \,:\, \exists a \in \mathcal{A},\, m < \sigma(a)\}\ ;$$

autrement dit l'ensemble d'états est $\mathcal{A}$ et l'état a est relié à l'état b par un arc d'étiquette m si et seulement si $mb \leq \sigma(a)$. Tout entier N admet un développement $N = \sum_{n=0}^{s} |\sigma^n(m_n)|$ par l'algorithme de I-4, c'est à dire $s = \max\{n \,:\, |\sigma^n(1)| \leq N\}$ et pour $h = 0, 1, \ldots, s$, $m_{s-h} = m_{s-h}(N)$ est le mot le plus long tel que $(m_s, \ldots, m_{s-h})$ soit reconnu par l'automate (avec l'état initial 1), et

$$\sum_{n=s-h}^{s} |\sigma^n(m_n)| \leq N.$$

4.1. **Somme des chiffres.** On définit la somme des chiffres relative à une application $f : \mathcal{A}* \mapsto \mathbb{R}$ en posant $s_f(N) = \sum_{n=1}^{N} f(m_n)$ avec $m_n = m_n(N)$ pour tout n. Une autre définition, plus facile à utiliser, est équivalente à la première dans le cas où f vérifie $f(mm') = f(m) + f(m')$ et $f(\sigma(m)) = f(m)$ avec $s_f(N) = \sum_{n=1}^{N} f(u_n)$, pour tout m et m' dans $\mathcal{A}*$ et où où $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ est le point fixe de la substitution, avec $u_1 = 1$. Les formules sur les moments de la somme des chiffres (voir [Du2]) sont analogues à celles de Coquet (voir § 2.2 :

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} s_f(n)^d = (\alpha - \ell)^d + F_{d,d-1}(\ell)\ell^{d-1} + \cdots + F_{d,0}(\ell) + o(1)$$

pour $d \in \mathbb{N}$ et lorsque d pair,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} (s_f(n) - \alpha)^d = (d-1)(d-3)\cdots 1(\beta\ell)^{d/2-1} + G_{d,d/2-1}(\ell) + \cdots + G_{d,0}(\ell) + o(1)$$

avec α et β constantes réelles, $\ell = \log_q N$ (θ plus grande valeur propre de la matrice de σ) ; les fonctions $F_{d,i}$ et $G_{d,i}$ sont continues de période 1, nulle part dérivables si $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq f(w)$ (w mot vide) et $\beta \neq 0$. Outre qu'elles généralisent celles des paragraphes précédents, elles s'appliquent à d'autres problèmes n'ayant a priori pas de rapport avec les développements.

4.2. **Application à la rotation sur le tore.** Soit ω un nombre quadratique dont le développement en fraction continue a pour période 2, c'est-à-dire qu'on a

$$\omega = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \omega}}$$

On suppose de plus que a_2 est pair ; on s'intéresse à la suite $n \mapsto \mathrm{frac}\{n\omega/2\}$ et à l'écart relatif à l'intervalle $I =]0, 1/2[$, c'est-à-dire

$$E(\omega, NI) = A(\omega, N, I) - N/2,$$

avec

$$A(\omega, N, I) = \#\{n \leq N \,:\, \mathrm{frac}\{n\omega/2\} \in I\}.$$

Les formules du paragraphe précédent, avec une substitution appropriée (voit [Du2] ou [Go]), donnent

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} E(\omega, n, I) = \frac{a_1}{4}\log_\theta N$$

avec $\theta = a_1(a_2+\omega)+1$, et

$$\sum_{n=0}^{N-1}\Big(E(\omega,n,I)-\frac{a_1}{4}\log_\theta N\Big)^2 = \gamma\log_\theta N$$

où γ est une constante. Une autre façon d'étudier les oscillations de la fonction $N \mapsto A(w,N,I)$, utilise la limite (au sens des distributions) de distributions) de

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{i\theta x_n},$$

avec $x_n = n+\xi A(\omega,N,I)$, où ξ est une constante irrationelle. D'après [Au], cette limite est une mesure continue, non absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Par contre si on remplace l'intervalle $I =]0,1[$ par $I =]0,\omega/2[$, elle est combinaison linéaire de mesures de Dirac.

4.3. **Sommes de trois carrés.** Soit

$$\Delta(n) = \#\Big\{k<n\ :\ \exists u,v,w\in\mathbb{N},\ k=u^2+v^2+w^2\Big\} - 5n/6.$$

Obaldstein et Shiu ([Ob]) ont démontré la formule

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{n-1}\Delta(n) = \frac{3}{8}\log_4 N + F(\log_4 N) + o(1).$$

On peut retrouver ce résultat au moyen de la substitution

$$\begin{array}{rccc} s: & 1 & \mapsto & 12\\ & 2 & \mapsto & 13\\ & 3 & \mapsto & 14\\ & 4 & \mapsto & 54\\ & 5 & \mapsto & 62\\ & 6 & \mapsto & 52 \end{array}$$

et l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & 1 & \mapsto & 2/3\\ & 2 & \mapsto & -1/3\\ & 3 & \mapsto & -1/3\\ & 4 & \mapsto & -4/3\\ & 5 & \mapsto & 2/3\\ & 6 & \mapsto & -1/3 \end{array}$$

car alors $\Delta(N)$ est égal à $s_f(N)$ si n pair, $s_f(N)-1/2$ si n impair (on peut utiliser la deuxième définition $s_f(N)$ parce que la substitution σ_2 vérifie $f(\sigma_2(a)) = f(a)$ pour $a = 0,1,..,6$). D'autres articles ([Pl]) portent sur la somme de deux carrés :

$$d(n) = \#\{k<n\ :\ u,v\in\mathbb{N},\ k=u_2+v_22\}$$

est équivalent à $\beta n/\sqrt{\log n}$ où β est une constante ; sur l'ensemble des entiers non divisibles par p^2 quelque soit p premier [Ba, Krt] ; non somme de quatre cubes [Bru] et [As] sur le nombre de représentations d'un entier en u^2+v^2.

4.4. **Fonctions auto affines et substitutions (exemples).** La courbe de la fonction

$$N \mapsto S(N) : \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{s(11,n)}$$

est auto affine ; en observant cette courbe, on peut deviner quelle substitution σ et quelle fonction f vérifient $\sum_{n=1}^{N} f(u_n)$, où $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ est le point fixe de la substitution. Réciproquement, étant donnée une substitution vérifiant les conditions ci dessous, on peut trouver une formule pour $s_f(N)$ analogue à celle de Coquet (pour $S(N)$), et ses propriétés d'auto affinité (voir [Du3]). Si σ est primitive et les valeurs propres de sa matrice vérifient

$$\theta = \theta_1 > \theta_2 > \max_{i>2}\{\theta_i, 1\}$$

on a

$$s_f(N) = \lambda N + N^\beta \ell F(\ell) + o(N^\beta \ell^\alpha),$$

avec $\lambda = \sum_{i=1}^{d} f(i) v_i$, vecteur propre relatif à θ, $\sum_{i=1}^{d} v_i = 1$, $\ell = \log_\theta N$, $\beta = \log_\theta(\theta_2)$ et $\alpha + 1 =$ ordre de θ_2 dans le polynôme minimal. Autre exemple, l'article de Ito [It] porte sur les propriétés d'auto affinité de l'ensemble

$$E = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k/\alpha^k \;:\; a_k = 0, 1, \ldots, N-1,\; k \in \mathbb{N} \right\}$$

où $\alpha = a + b\sqrt{-m}$ est un nombre complexe, a, b et m entiers et N la norme de α. La substitution appropriée permet de calculer la dimension de Hausdorff de la frontière de E.

4.5. **Système dynamique associé à une substitution.** Soit X l'adhérence de $\{T^k(u) : k \in \mathbb{N}\}$, où u est point fixe d'une substitution d'alphabet fini $\mathcal{A}$, et T le shift sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Les propriétés du système dynamique (X, T) sont étudiées dans [Qu], et aussi dans [Rz2] ; [Lv1, Lv2] pour la propriété de mélange.

5. **Nombre de Champernowne, nombres (k, ε)-normaux.**

Soit $x \in [0, 1[$ et $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i / g^i$ son développement en base g, ce qu'on traduite en écrivant aussi $x =_g 0.\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\cdots$. On notera $N(w, \varepsilon_1 ... \varepsilon_n)$ le nombre d'occurrences d'un bloc w dans $\varepsilon_1 ... \varepsilon_n$. Le nombre x est dit normal si $\lim_n \frac{1}{n} N(w, \varepsilon_1 ... \varepsilon_n) = 1/g^k$, pour tout $k \geq 1$ et tout bloc w de longueur k. D'autre part, une suite finie $\varepsilon_1 ... \varepsilon_n$ est dite (k, ε)-normale si, pour tout bloc w de longueur k,

$$\left| \frac{1}{n} N(w, \varepsilon_1 ... \varepsilon_n) - 1/g^k \right| < \varepsilon.$$

5.1. **Généralisations du nombre de Champernowne.** La normalité en base $g = 10$ du nombre de Champernowne [Ch]

$$\alpha =_{10} 0.123456789101112\ldots$$

se généralise a certains nombres de la forme

$$x =_g 0.g(a1)g(a2)g(a3)\ldots$$

où $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ est une suite croissante d'entiers et, pour tout i, $g(a_i)$ est le développement de a_i en base g. D'après Copeland et Erdös ([Cp]), le nombre x est normale si la croissance de la suite $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ est suffisament lente, c'est-à-dire si pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\#\{a_i \;:\; a_i \leq N\} > N^{1-\varepsilon}$$

pour tout N assez grand. Ce résultat est redémontré dans [Sh] par une méthode semblable à celle de [Fl1]. D'après Nakaï et Shiokawa [Na], c'est aussi le cas s'il existe une fonction

$$x \mapsto f(x) = \alpha_1 x^{\beta_1} + \cdots + \alpha_d x^{\beta_d},$$

(avec α_i, β_i réels) et vérifiant $f(x) \geq 1$ pour tout $x \geq 1$, et telle que $a_i = [f(i)]$ pour tout i. D'autre part [Du4] quelle que soit la suite croissante d'entiers $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ et la constante entière C, la normalité du nombre $x =_g 0.g(a_1)g(a_2)\cdots$ implique celle de

$$xC =_g 0.g(Ca_1)g(Ca_2)\cdots$$

Szusz et Wolkmann [Sz] généralisent au cas où x n'est pas normal ; leur résultat porte donc sur l'ensemble des mesures de répartition de x et x_C. Mahler [Ma] associe à tout $N \in \mathbb{N}$ un entier $p(N)$, et à tout $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ un entier $X \leq p(N)$, tels que le développement décimal de $X\alpha$ contienne une infinité de fois tout bloc de N chiffres. On a des généralisations du nombre de Champernowne aux bases non entières, par exemple [Gr3] pour les bases quadratiques. La généralisation de [Be2] s'applique à une suite $a = a_1a_2a_3\ldots$, où les a_i sont des mots qui appartiennent à un langage $\mathcal{W}$ engendré par un code ; à certaines conditions, cette suite est normale pour la mesure d'entropie maximale sur le sous shift associé à $\mathcal{W}$.

5.2. **Suites (k,ε)-normales.** Soit $n_g = n_g(n,k,\varepsilon)$ l'ensemble des suites (k,ε)-normales de longueur n, à termes dans $\{0,...,g-1\}$. On a l'encadrement

$$1 - 6kg^k \exp\left(-4/9K\varepsilon^2 n\right) \leq \frac{1}{g_n}\#n_g \leq 1 - C\exp(-K\varepsilon^2 n),$$

pour tout $\varepsilon \leq 1/g^k$, avec

$$K = \frac{g^{2k}}{2k(g^k-1)}$$

et C constante indépendants de n et ε. La minoration se déduit d'une inégalité de Bernstein (voir [Re], 7-4 théorème 3), qui est une amélioration de l'inégalité de Chebyshev dans le cas d'une somme de variable aléatoires indépendantes. Stoneham [Stn] construit pour tout k et ε, des nombres rationnels dont les n premieres décimales forment une suite (k,ε)-normale si n est assez grand. D'autre part [Fl2], étant donnée une suite non décroissante d'entiers $(k(n))_{n=1}^{\infty}$, on dit qu'une suite $b \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est $k(n)$-équirépartie si

$$\max_w \left| N(w, b_1...b_n) - 1/2^{k(n)} \right| = o(1/2^{k(n)})$$

quand n tend vers l'infini. (maximum pour tout bloc w de longueur $k(n)$). Le principal résultat de [Fl2] est que presque toute suite est $k(n)$-équirépartie si

$$\lim_n(\log(n) - \log(\log(n)) - k(n)) = +\infty$$

et ([Gri]) presque toute suite ne l'est pas sinon.

6. **Autres développements**

6.1. **Interval filling sequences.** Daroczy, Jarai et Katai [Dar1, Dar2] appellent *interval filling sequence* toute suite de réels $\lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ vérifiant $\lambda_n > \lambda_n + 1 > 0$ pour tout n et $L = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < +\infty$ et telle que tout réel $x \in [0, L]$ admette au moins un développement :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \lambda_n$$

avec $\varepsilon_n \in \{0,1\}$ pour tout n. Cette dernière condition équivaut ([Dar1]) à

$$\lambda_n \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i$$

pour tout n. A tout $x \in [0,L]$ on associe un développement régulier $(\varepsilon_n(x))_{n=1}^{\infty}$ et un développement quasi régulier $(\varepsilon_n * (x))_{n=1}^{\infty}$ (voir introduction I-2 et I-3). Les deux vérifient l'égalité $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \lambda_n$. Dans [Dar2], Daroczy et Katai étudient les fonctions additives relativement à la suite ℓ, c'est à dire les fonctions F pour lesquelles il existe une suite de complexes $(an)_{n=1}^{\infty}$, ${}_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, telle que $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(x) a_n$; ils rappellent que F peut être discontinue à gauche en tout x de développement fini ; par exemple en base 2, la fonction

$$F\left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n/2^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n/n^2 \ ;$$

ils donnent la condition nécessaire et suffisante pour que F soit continue en tout x qui affirme que pour tout n

$$a_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} \varepsilon_i^*(\lambda_n) a_i.$$

Remarquons que si $\lambda_n = 1/\theta^n$ avec $\theta = (1+\sqrt{5})/2$, cette condition équivaut à $F(x) = Cx$, où C est une constante.

6.2. **Développement *-binaire.** C'est un cas particulier du paragraphe précédent, avec $\lambda_n = n/2^n$ étudié par Borwein et Loring [Brw] : tout réel $x \in [0,2]$ se développe sous la forme

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \frac{n}{2^n}$$

avec $d_n \in \{0,1\}$, pour tout n. L'algorithme de Borwein et Loring permet d'obtenir tous les développements de x (si x n'est pas dyadique). Il revient à choisir, pour $m = 1, 2, \ldots$, un élément quelconque $a_m \in \{0,1,2\}$, puis à choisir pour d_m le plus grand élément de $\{0,1\}$ qui vérifie

$$\sum_{n=1}^{m} d_n \frac{n}{2^n} \leq x - \frac{\alpha_m}{d_m}.$$

On obtient ainsi une infinité de développements, pour chaque élément x d'un sous-ensemble dense de $[0,2]$. D'autre part la conjecture *tout dyadique admet un développement $*$-binaire fini* équivaut à dire que la transformation $(n,a) \mapsto T(n,a) = (n+1, 2(a - n[a/n]))$ vérifie :

$$\forall (n,a) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ T_k(n,a) = (n+k, 0).$$

6.3. **Systèmes fibrés** [Scw1]. Un système fibré est une famille d'applications $T_j :]0,1[\to]0,1[$ dans lui-même, $j \geq 1$, et de partitions :

$$]0,1[= \bigoplus_{n \in \mathcal{I}_j}]a_j(n), b_j(n)[$$

l' ensemble d'indices $\mathcal{I}_j$ étant fini ou infini. On suppose que la restriction de T_j à chaque intervalle $]a_j(n), b_j(n)[$ est continue injective. On appelle alors développement d'un élément x de $]0,1[$, la suite d'entiers $(d_j)_{j=1}^{\infty} = (d_j(x))_{j=1}^{\infty}$ telle que, pour tout $j \geq 1$

$$T_{j-1} \circ T_{j-2} \circ \cdots \circ T_1(x) \in]a_j(d_j), b_j(d_j)[. \qquad (5)$$

L'exemple le plus simple est le développement en base 2 avec $]a_j(n), b_j(n)[=]n/2, (n+1)/2[$ avec $n = 0$ ou 1 et $T_j(x) = \text{frac}\{2x\}$ Il y a aussi le développement en fraction continue, où $]a_j(n), b_j(n)[=]1/(n+1), 1/n[$ avec $n \geq 1$ et $T_j(x) = \text{frac}\{1/x\}$. Dans le cas de la

$\alpha-\gamma$ expansions les fonctions T_j sont linéaires affines sur chaque intervalle, ce qui permet de déduire de (5) un développement en série de x (voir [Ga] chapitre 1). Comme on suppose aussi les intervalles semi-ouverts à gauche, les développements sont infinis. En prenant $T_j(x)=\frac{n}{n+1}(x-1/n)$ pour $x\in]1/n,1/(n-1)[$ avec $n\geq 2$ on en déduit aussi un développement en produit (produit de Cantor)

$$1+x=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{d_j}\right)$$

Les résultats de Galambos [Ga] portent sur la condition d'admissibilité des suites $(d_j)_{j=1}^{\infty}$, la condition pour que x soit égal à la somme de sa série associée, le développement des rationels ; sur la répartition des variables aléatoires $x\mapsto d_j(x)$ et des propriétés vérifiées presque partout par la suite $(d_j(x))_{j=1}^{\infty}$, ou par la vitesse de convergence de la série associée à x ; sur l'ergodicité et les mesures invariantes par T (dans le cas où $T_j=T$ est linéaire affine par morceaux, avec un nombre fini d'intervalles). Dans le cas général, d'autres résultats portent sur la répartition de la suite

$$j\mapsto t_j(x)=\frac{T_{j-1}\circ\cdots\circ T_1(x)-a_j(d_j)}{b_j(d_j)-a_j(d_j)}\in]0,1[.$$

En effet cette suite est équirépartie (pour presque tout x) dans la plupart des cas particuliers, ce qui n'est pas le cas de la suite $j\mapsto T_{j-1}\circ\cdots\circ T_1(x)$. Voir aussi dans [La], une condition suffisante pour que $(t_j(x))_{j=1}^{\infty}$ soit complètement équirépartie, c'est à dire pour que la suite

$$j\mapsto(t_j(x),t_{j+1}(x),...,t_{j+k}(x))$$

soit équirépartie dans $(0,1)^{k+1}$ pour tout $k\in\mathcal{N}$. Dans le prolongement de l'exposé de Galambos, il y a les articles de Kalpazidou et Knopfmacher [Kal, Kn1, Kn2] sur d'autres cas particuliers ; l'article de Schweiger [Scw2] selon lequel, si T est une homographie sur un nombre fini d'intervalles, la densité de la mesure invariante est de la forme

$$f(x)=\frac{1}{x+\alpha}-\frac{1}{x+\beta}\quad\text{ou}\quad f(x)=\frac{1}{(x+\alpha)^2}\quad\text{ou}\quad f(x)=\frac{1}{x+\alpha}\quad\text{ou}\quad f(x)=1.$$

Les séries de Cantor, représentations sous la forme dj

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{d_j}{q_1\cdots q_j}$$

avec $d_j\in\{0,1,...,q-1\}$ pour tout j, sont un cas particulier des systèmes fibrés, mais pas des $\alpha-\gamma$-expansions car les développements peuvent être finis. Bick [Bi] démontre l'équirépartition de la suite

$$n\mapsto\sum_{j=1}^{\infty}\frac{r(j,n)}{q_1\cdots q_j}$$

où $(q_j)_{j=1}^{\infty}$ est une suite strictement croissante d'entiers premiers entre eux deux à deux, et $r(j,n)$ le reste de la division de n par q_j. Dans [Ha] on a un développement en série de Cantor associé à la fraction continue d'un nombre quadratique ; dans ce cas x est rationnel si et seulement si son développement est ultimement périodique.

6.4. **Autres exemples, développements des entiers.** Soit C une partie finie de $\mathbb{N}$; l'ensemble

$$E_C:=\left\{\sum\nolimits_{n=0}^{s}c_ng^n\ :\ c_n\in C,\ n=0,1,\ldots,s\right\}$$

étant égal à $\mathbb{N}$ si $C=\{0,1,...,g-1\}$, la question se pose de caractériser les ensembles C tels que $\mathbb{N}\backslash E_C$ soit fini. Rauzy [Rz3] traite le cas de l'ensemble $C=\{1,5,6,25,26,30,31\}$

en base $g = 3$. Il définit un automate qui reconnaît les développements en base 3 des éléments de E : l'ensemble des états est l'ensemble des parties de

$$\mathbb{N} \cap \left[0, \frac{\sup C}{g-1}\right[= \{0, 1, \ldots, 15\};$$

l'alphabet est $\{0, 1, 2\}$; quelque soit r dans cet alphabet, chaque état X est relié par un arc d'étiquette r à l'état

$$\{r + 3h - c \,:\, h \in X, c \in C\} \cap \{0, 1, ..., 15\} \;;$$

l'état initial est $\{0\}$, et tout état contenant 0 est final. On peut alors répondre à la question, car l'ensemble $\mathbb{N} \backslash E_C$ est fini si et seulement si tout état récurrent accessible à partir de $\{0\}$ est final. Rauzy fait le lien entre ce problème et celui du développement des rationnels sous la forme $\sum_{k=1}^{s} 1/n_k$, où les entiers distincts n_k appartiennent à un ensemble donné. Autres articles sur ces développements, [Yo] pour le nombre d'entiers n representables en $\sum_{k=1}^{s} 1/n_k$ (avec $n_k < n_k + 1 \leq n$ pour tout k),[Ans] pour les fractions égyptiennes et [Er2] pour la réductibilité des sommes $\sum_{k=1}^{\infty} a_k/n_k$. La généralisation pour les développements en base 2 se trouve dans [He] : étant donnés deux réels α et β, Hegyvari donne une condition suffisante pour que tout entier assez grand se développe sous la forme $\sum_{k=1}^{s} \varepsilon_k a_k$, avec $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$ pour tout k, et

$$a_k \in \{[2na] \,:\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{[2nb] \,:\, n \in \mathbb{N}\}.$$

6.5. **Fraction continues.** Angell [Ang] et Tong [To] donnent une condition nécessaire et suffisante sur les suites d'entiers positifs $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, pour que la suite

$$n \mapsto [0; x_n, \ldots, x_1] = \cfrac{1}{x_n + \cfrac{1}{x_{n-1} + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{x_1}}}}$$

n'aie pas de point d'accumulation autre que 0 Dans [Bs1] on a la distribution de la suite $n \mapsto q_n|q_n x - p_n|$ pour presque tout x, où la fraction irréductible p_n/q_n est le n-ième convergent de $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ de la fraction continue de x. Ce résultat est généralisé dans [Bs2] aux convergents intermédiaires :

$$\frac{p_n(a)}{q_n(a)} = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a] \quad \text{avec } a \in \mathbb{N}.$$

Le même résultat est démontré dans [Krk] et [Bs3] pour les fractions continues semi-régulières :

$$[a_0; e_1, a_1; e_2, a_2; \ldots] = a_0 + \cfrac{e_1}{a_1 + \cfrac{e_2}{a_2 + \cfrac{e_3}{\ddots}}}$$

avec $e_k \in \{0, 1\}$ pour tout n, et des contraintes sur a_n et e_n. Au sujet de la répartition des chiffres dans les fractions continues, Iofescu [Io] démontre une propriété de mélange ; Nolte [No] et Knopfmacher [**?**] calculent la fréquence (pour presque tout x) de $\{n \,:\, a_n \equiv a \mod m\}$. Dans [**?**] on a les estimations

$$\sum_{n=0}^{N} \mathrm{frac}\{n\alpha + \beta\} = \frac{N}{2} + O(\sqrt{\log N}) = \frac{N}{2} + O(\sqrt{N \log N})$$

la première étant uniforme en β et la seconde en α, β, avec une condition de mauvaise approximation de α par sa fraction continue $[a_0; a_1, \ldots, a_n] = p_n/q_n$ et le terme d'erreur de la seconde approximation dépendant du développement de N en base $(q_n)_{n=0}^{\infty}$.

Références

[Al1] ALLOUCHE, J.; SHALLIT, J. (90g 11013) : Infinite products associated with counting blocks in binary strings. J. London Math. Soc. (2) 39 (1989), no.2, 193-204.

[Al2] ALLOUCHE, J.; MENDES FRANCE, M. (87h 11020) : Suite de Rudin Shapiro et modèle d'Ising. Bull. Soc. Math. France 113 (1985), no.3, 273-283.

[Ang] ANGELL, D. (90a 11015) : The limiting behaviour of certain sequences of continued fractions. Bull. Austral. Math. Soc. 38 (1988), no.1, 67-76.

[Ans] ANSHEL, M.; GOLDFELD, D. (91h 11104) : Partitions, Egyptian fractions, and free products of finite abelian groups. Proc. Amer. Math. Soc. 111 (1991), no.4, 889-899.

[As] ASKEY, R. (91h 33026) : The number of representations of an integer as the sum of two squares. Indian J. Math. 32 (1990), no.2, 187-192.

[Au] AUBRY, S.; GODRECHE, C.; LUCK, J.-M. (90a 58154) : Scaling properties of a structure intermediate between quasiperiodic and random. J. Statistic. Phys. 51 (1988), no. 5-6, 1033-1075.

[Ba] BALASUBRAMANIAN, R.; RAMACHANDRA, K. (90c 11063) : On square-free numbers. Proceedings of the Ramanujian Centenni al International Conference (Annamalainagar, 1987), 27-30, RMS Publ., 1, Ramanujian Math. Soc., Annamalainagar, 1988.

[Be1] BERTRAND-MATHIS, A. (91d 11089) : Comment écrire les nombres entiers dans une base qui n'est pas entière. Acta Math. Hungar. 54 (1989), no. 3-4, 237-241.

[Be2] BERTRAND-MATHIS, A.; VOLKMANN, B. (90m115) : On (e,k)-normal words in connecting dynamical systems. Monats. Math. 107 (1989), no.4, 267-279.

[Bi] BICK, T. (92d 80) : A class of examples of D-sequences. Ergodic Theory Dynamical Systems 11 (1991), no.1, 1-6.

[Brw] BORWEIN, P.; LORING, T. (90e 11020) : Some questions of Erdös and Graham on ***

[Bs1] BOSMA, W.; JAGER, H.; WIEDIJK, F. (85f 11059) : Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 45 (1983), no.3, 281-299.

[Bs2] BOSMA, W.(90m 11119) : Approximation by mediants. Math. Comput. 54 (1990), no.189, 421-434.

[Bs3] BOSMA, W.; KRAAIKAMP, C. (91d 11095) : Metrical theory for optimal continued fractions. J. Number Theory 34 (1990), no.3, 251-270.

[Bri] BRILLHART, J.; ERDOS, P.; MORTON, P. (85i 11080) : On sums of Rudin-Shapiro coefficients II. Pacific J. Math. 107 (1983), no.1, 39-69.

[Bru] BRÜDERN, J. (90g 11136) : Jörg Sums of four cubes. Monatsh. Math. 107 (1989), no.3, 179-188.

[Ch] CHAMPERNOWNE, E. : The construction of decimals normal in the scale of ten. J. London Math. Soc. 8 (1933), 254-260.

[Cp] COPELAND, A.; ERDOS, P. (8-194) : Note on normal numbers. Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 857-860.

[Cq1] COQUET, J. (85m 11045) : Sur la representation des multiples d'un entier dans une base. Hubert Delange colloquium (Orsay, 1982), 20-37, Publ. Math. Orsay, 83-4, Univ. Paris XI, Orsay, 1983.

[Cq2] COQUET, J. (85c 11012) : A summation formula related to the binary digits. Invent. Math. 73 (1983), no.1, 107-115.

[Cq3] COQUET, J. (87d 11070) : Power sums of digital sums. J. Number Theory 22 (1986), no.2, 161-176.

[Cq4] COQUET, J. (85c 11012) : Representations lacunaires des entiers naturels. Arch. Math. (Basel) 38 (1982), no.2, 184-188.

[Dar1] DAROCZY, Z. ; JARAI, I. ; KATAI, I. (88k 11021) : Intervallfüllende Folgen und Volladditive Funktionen. Acta Sci. Math. (Szeged) 50 (1986) no.3-4, 337-350.

[Dar2] DAROCZY, Z. ; KATAI, I. (90a 11019) : Intervall filling sequences and additive functions. Acta Sci. Math. (Szeged) 52 (1988) no.3-4, 337-347.

[Dav] DAVIS, K. ; WEBB, W. (91k 11019) : Pascal's triangle modulo 4. Fibonacci Quart. 29 (1991), no.1, 79-83.

[De] DELANGE, H. (52 #319) : Sur la fonction sommatoire de la fonction "Somme des chiffres". Enseign. Math. (2) 21 (1975), no.1, 31-47.

[Dr] DROBOT, V. ; TURNER, J. (90a 11097) : Hausdorff dimension and Perron-Frobenius theory. Illinois J. Math. 33 (1989), no.1, 1-9.

[Du1] DUMONT, J.-M. (90m 11023) : Formules sommatoires et systèmes de numération liés aux substitutions. Séminaire de théorie des nombres, 1987-1988 (Talence, 1987-1988), exp. no. 39, 12 pp., Univ. Bordeaux I, Talence.

[Du2] DUMONT, J.-M. ; THOMAS, A. : Digital sum moments and substitutions. Acta Arithmetica (à paraitre).

[Du3] DUMONT, J.-M. ; THOMAS, A. (90m 11022) : Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions. Theoret. Comput. Sci. 65 (1989), no.2, 153-169.

[Du4] DUMONT, J.-M. ; THOMAS, A.(89h 11047) : Une modification multiplicative des nombres g normaux. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5) 8 (1986/87), no.3, 367-376.

[Er1] ERDÖS, P. ; JOO, I. ; KOMORNIK, V. (91j 11006) : Characterization of the unique expansions $1 = \sum_{i=1}^{\infty} q^{-n_i}$ and relatedproblems. Bull. Soc. Math.France118(1990), no.3, 377-390.

[Er2] ERDÖS, P. ; ZAKS, A. (91k 11025) : Reductible sums and splittable sets. J. Number Theory 36 (1990), no.1, 89-94.

[Fl1] FLAJOLET, P. ; GRABNER, P. ; KIRSCHENHOFER, P. ; PRODINGER, H ; TICHY, R. : Mellin Transform and asymptotic digital sums. Theoret. Comput. Sci. (to appear).

[Fl2] FLAJOLET, P. ; KIRSCHENHOFER, P. ; TICHY, R. (90a 11087) : Deviations from uniformity in random strings. Probab. Theory Related Fields 80 (1988) no.1, 139-150.

[Ga] GALAMBOS, J. (58 #27873) : Representations of real numbers by infinite series. Lecture notes in mathematics, vol. 502. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[Go] GODRECHE, C. ; LUCK, J.-M. ; VALLET, F. (89c 82054) : Quasiperiodicity and types of order : a study in one dimension. J. Phys. A 20 (1987), no. 13, 4483-4499.

[Gr1] GRABNER, P. ; TICHY, R. (92a 11089) : a-expansions, linear recurrences, and the sum-of-digits function. Manuscripta Math. 70 (1991), no.3, 311-324.

[Gr2] GRABNER, P. : q-additive and q-multiplicative functions : the Mellin-transform approach (to appear).

[Gr3] GRABNER, P. (92d 11078) : On digit expansions with respect to second order linear recurring sequences. Number theoretic analysis (Vienna, 1988-89), 58-64, Lecture Notes in Math., 1452, Springer, Berlin, 1990.

[Gri] GRILL : à paraitre.

[Ha] HARA, Y. ; ITO, S. (90m 11021) : On real quadratic fields and periodic expansions. Tokyo J. Math. 12 (1989), no.2, 357-370.

[He] HEGYVARI, N. (90e 11026) : Some remarks on a problem of Erdös and Graham. Acta Math. Hungar. 53 (1989), no.1-2, 149-154.

[Io] IOFESCU, M. (91h 11079) : On mixing coefficients for the continued fraction expansion. Stud. Cerc. Mat. 41 (1989), no.6, 491-499.

[It] ITO, S. (91d 11096) : On the fractal curves induced from the complex radix expansion. Tokyo J. Math. 12 (1989), no.2, 299-320.

[Kal] KALPAZIDOU, S. ; KNOPFMACHER, A. ; KNOPFMACHER, J. (91i 11011) : Lüroth-type alternating series representations for real numbers. Acta Arith. 55 (1990), no.4, 311-322.

[Kat] KATAI, I. (57 #9660) : Change the sum of digits by multiplication. Acta Sci. Math. (Szeged) 39 (1977), no.3-4, 319-328.

[Kn1] KNOPFMACHER, A. ; KNOPFMACHER, J. (90m 11116) : Representations for real numbers via kth powers of integers. Fibonacci Quart. 27 (1989), no.1, 49-60.

[Kn2] KNOPFMACHER, A. (91j 11007) : A radix product representation for real numbers. Fibonacci Quart. 28 (1990), no.4, 290-297.

[Kn3] KNOPFMACHER, A. ; LUBINSKY, D. (92d 11082) : Nonnormality of continued fraction partial quotients modulo q. Rev.Colombiana Mat. 24 (1990), no.3-4, 179-182.

[Krk] KRAAIKAMP, C. (90m 11120) : Statistic and ergodic properties of Minkowski's diagonal continued fraction. Theoret. Comput. Sci. 65 (1989), no.2, 197-212.

[Krt] KRÄTZEL, E. (90g 11129) : The distribution of powerful integers of type 4. Acta Arith. 52 (1989), no.2, 141-145.

[La] LACROIX, Y. : Number systems and l-a.e. repartition modulo 1. J. Number Theory (à paraitre).

[Lv1] LIVSHITS, A.N. (90c 28027) : Translation in Math. Notes 44 (1988), no.5-6, 920-925.

[Lv2] LIVSHITS, A.N. : à paraitre. Akad Nauk. SSSR.

[Ma] MAHLER, K. (47 #8448) : Arithmetical properties of the digits of the multiple of an irrational number. Bull. Austral. Math. Soc. 8 (1973), 191-203.

[Mc1] Mc DANIEL, W. ; YATES, S. (90e 11021) : Difference of the digital sum of an integer base b and its prime factors. J. Number Theory 31 (1989), no.2, 91-98.

[Mc2] Mc DANIEL, W. ; YATES, S. (90g 11014) : The sum of digits function and its application to a generalisation of the Smith number problem. Nieuw Arch.Wisk. (4) 7 (1989), no.1-2, 39-51.

[Mi] MIGNOTTE, M. (90g 11015) : Sur les entiers qui s'écrivent simplement en différentes bases. European J. Combin. 9 (1988), no.4, 307-316.

[Mo] MORTON, P. ; MOURANT, W. (91c 1107) : Paper folding, digit patterns and groups of arithmetic fractals. Proc. London Math. Soc. (3) 59 (1989), no.2, 253-293.

[Na] NAKAÏ, Y.-N. ; SHIOKAWA, I. (91h 11074) : A class of normal numbers. II. Number theory and cryptography (Sydney, 1989), 204-210, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 154, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[No] NOLTE, V. (92b 11053) : Some probabilistic results on the convergents of continued fractions. Indag. Math. (N.S.) 1 (1990), no.3, 381-389.

[Ob] OBALDSTEIN, A. ; SHIU, P. (90f 11023) : A correlated digital sum problem associated with sums of three squares. Bull. London Math. Soc. 21 (1989), no.4, 369-374.

[Pa] PARRY, W. (26 #288) : On the b-expansions of real numbers. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 11 (1960), 401-416.

[Pe] PETHÖ, A. ; TICHY, R. (91c 11008) : On digit expansions with respect to linear recurrences. J. Number Theory 33 (1989), no.2, 243-256.

[Pl] PLAKSIN, V.(90a 11113) : The distribution of numbers represented by the sum of two squares. Dokl. Akad. Nauk. SSSR 229 (1988), no.6, 1320-1323 ; translation in Soviet. Math. Dokl. 37 (1988), no2, 573-576.

[Pr] PRODINGER, H. (90g 11106) : ÜBER längste 1-Teilfolgen in 0-1-Folgen. Zahlentheoretische Analysis, II, 124-133, Lecture Notes in Math., 1262, Springer, Berlin-New York, 1987.

[Qu] QUEFFELEC, M. (89g 54094) : Substitution dynamical systems. Spectral analysis. Lecture Notes in Mathematics, 1294. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1987. xiv+240 pp.

[Rz1] RAUZY, G. (91d 28038) : Sequences defined by iterated morphisms. Sequences (Naples / Positano, 1988), 275-286, Springer, New York, 1990.

[Rz2] RAUZY, G. (90g 11017) : Rotation sur les groupes, nombres algébriques, et substitutions. Séminaire de théorie des nombres, 1987-1988 (Talence, 1987-1988), Exp. No. 21, 12pp., Univ. Bordeaux I, Talence.

[Rz3] RAUZY, G. : Systèmes de numération. Journées mathématiques., théorie élémentaire et analytique des nombres, Valenciennes (1982), 137-145.

[Re] RENYI, A. (34 #2034) : Calcul des probabilités. Collection Universitaiore de Mathématiques, No. 21. Dunod, Paris, 1966. xv+620 pp.

[Sa] SAFFARI, B. (88a 11024) : Une fonction extremale liée à la suite de Rudin Shapiro. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 303 (1986), no.4, 97-100.

[Scl] SCHLICKEWEI, H. (91j 11008) : Linear equations in integers with bounded sum of digits. J. Number Theory 35 (1990), no.3, 335-344.

[Scm] SCHMID, J. (85j 11093) : The joint distribution of the binary digits of integer multiples. Acta Arith. 43 (1984), no.4, 391-415.

[Sct] SCHMIDT, Wolfgang M. (87h 11072) : The joint distribution of the digits of certain integer s-tuples. Studies in pure mathematics, 605-622, Birkhäuser, Basel-Boston, Mass., 1983.
***Number-theoretic analysis (Vienna, 1988-89), 199-205, Lecture Note in Math., 1452, Springer, Berlin, 1990.

[Scw1] SCHWEIGER, F. (82k 28019) : Ergodic properties of fibered systems. Proceeding of the Sixth Conference on Probability Theory (Brasov, 1979), pp. 221-228. Ed. Acad. R.S. România, Bucharest, 1981.

[Scw2] SCHWEIGER, F. (88m 11064) : Piecewise fractional maps with explicit invariant measure. Ostereich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber. II. 195 (1986), no.1-3, 171-174.

[Se] SENGE, H. ; STRAUSS, E. (49 #4941) : PV-numbers and sets of multiplicity. Period. Math. Hungar. 3 (1973), 93-100.

[Sh] SHIOKAWA, I. (91g 11082) : Asymptotic distributions of digits in integers. Number theory, Vol.I (Budapest, 1987), 505-525, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 51, North-Holland, Amsterdam, 1990.

[Sl] SLIVKA, J. ; SEVERO, N. (92b 11054) : Measures of sets partitioning Borel's simply normal numbers to base 2 in

[***] . Fibonacci Quart. 29 (1991), no.1, 19-23.

[So] SOLINAS, J. (90m 11142) : On the joint distribution of digital sums. J. Number Theory 33 (1989), no.2, 132-151.

[Ste] STEIN, A. (90m 11025) : Exponential sums of digit counting functions. Théorie des nombres (Quebec, PQ, 1987), 861-868, de Gruyter, Berlin-New York, 1989.

[Stl] STOLARSKY, K. (82h 10012) : Integers whose multiples have anomalous digital frequencies. Acta Arith 38 (1980), no.2, 117-128.

[Stn] STONEHAM, R. (42 #207a) : On (j,e)-normality in the rational fractions. Acta Arith. 16 (1969 / 70), 221-237.

[Sz] SZUZ, P. ; VOLKMANN, B. (90h 11068) : On numbers with digit distributions. Arch. Math. (Basel), 52 (1989), no.3, 237-244.

[To] TONG, J. (91h 11008) : Limits of unbounded sequences of continued fractions. Bull. Austral. Math. Soc. 41 (1990), no.3, 509-512.

[Ti] TICHY, R. ; TURNWALD, G. (89b 11067) : Gleichmässige Diskrepazabschätzung für Ziffernsummen. Anz. Österreich. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. 123 (1986), 17-21 (1987).

[We] WEBB, W. (92b 11010) : The number of binomial coefficients in residue classes modulo p and p2. Colloq. Math. 60 / 61 (1990), no.1, 275-280.

[Ya] YATES, S. (92c 11008) : Digital sum sets. Number theory (Banff, AB, 1988), 627-634, de Gruyter, Berlin, 1990.

[Yo] YOKOTA, H. (91g 11029) : On the number of integers representable as sums of unit fractions. Canad. Math. Bull. 33 (1990), no.2, 235-241.

URL: `http://univ-provence.fr`