# Conservation de la généricité et de l'aléatoirité

Alain THOMAS [1] [2]

**Résumé.** – Diverses conditions suffisantes sont données, pour qu'un couplage de deux systèmes dynamiques $(X, T_X, \mu)$ et $(X', T_{X'}, \mu')$ transforme les points $\mu$-génériques en points $\mu'$-génériques. Le lien est fait avec les résultats connus sur la conservation de l'aléatoirité par transducteur.

## 0. **Introduction**

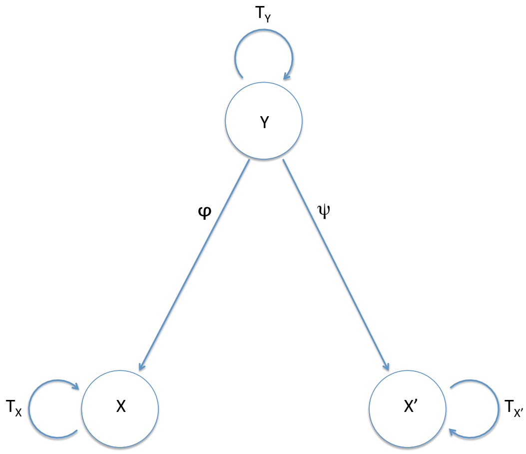
Les deux premières sections reprennent en les généralisant les résultats de F. Blanchard [1] relatifs au couplage de systèmes dynamiques, et aux mesures associées aux éléments qui sont en relation par couplage. Les conditions de conservation de la généricité sont rendues plus explicite dans le cas d'un couplage par transducteur, c'est à dire par un automate à étiquettes doubles (une étiquette d'entrée et une étiquette de sortie). La troisième section fait le lien avec la condition [4, Theorème 2] de conservation de l'aléatoirité. La définition des suites aléatoires qu'on utilise ne fait pas référence à l'équiré-partition et semble donc sans rapport avec la généricité ; cependant les premières tentatives de définition des suites aléatoires (Richard von Mises, Karl Poper, Alonzo Church) faisaient usage des suites équiréparties.

## 1. **Couplages**

On dira que $\mathcal{C} = (X, X', Y, T_X, T_{X'}, T_Y, \varphi, \psi)$ est un couplage si $X$, $X'$, $Y$ sont compacts métrisables, $T_X, T_{X'} T_Y$ sont trois applications continues respectivement de $X$, $X'$, $Y$ vers lui-même, et $\varphi, \psi$ deux applications de $Y$ vers $X$ et $X'$ respectivement, commutant avec les applications $T$ :

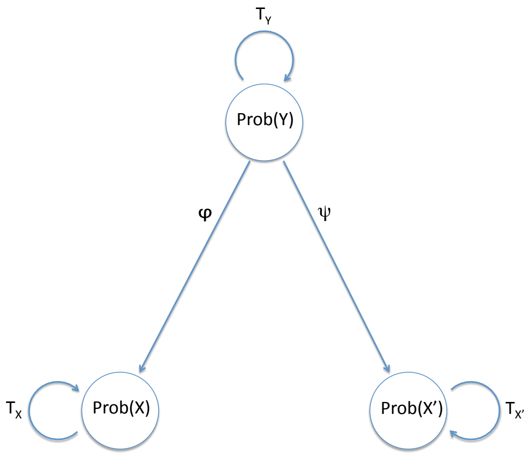
$$T_X \circ \varphi = \varphi \circ T_Y \quad \text{et} \quad T_{X'} \circ \psi = \psi \circ T_Y .$$

On dit que deux éléments $x \in X$ et $x' \in X'$ sont relatés s'ils ont un antécédent commun : $\exists y \in Y \;\; x = \varphi(y)$ et $x' = \psi(y)$.




1. alain.thomas@univ-provence.fr
2. Université de Provence, 3 Pl. V. Hugo, 13331 Marseille Cedex 03

Comme on le sait [3], pour tout espace compact métrisable $X$ l'ensemble $\mathrm{Prob}(X)$ des probabilités sur $X$ est compact métrisable pour la topologie faible. On a donc un couplage des trois espaces $\mathrm{Prob}(X)$, $\mathrm{Prob}(X')$, $\mathrm{Prob}(Y)$. Par commodité on notera $\varphi$ (resp. $T_X, \dots$) les applications continues définies par $\varphi(\mu) = \mu \circ \varphi^{-1}$ (resp. $T_X(\mu) = \mu \circ T_X^{-1}, \dots$).




Dans le système dynamique $(X, T_X)$, on appelle mesure associée à un élément $x \in X$ toute limite d'une suite extraite de la suite de mesures discrètes $S_n(x)$ définie par

$$S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{{T_X}^k(x)}.$$

On dit que $x$ est $\mu$-générique si $\mu$ est la seule mesure associée à $x$, c'est à dire si la suite $S_n(x)$ converge.

En utilisant la démonstration de la proposition 2.1 de [1] on obtient le résultat suivant :

**Théorème 1.1.** *Étant donné un couplage $\mathcal{C}$ et deux éléments relatés $x \in X$ et $x' \in X'$, toute mesure associée à $x'$ est relatée à une des mesures associée à $x$.*

**Preuve.** Une mesure $\mu'$ associée à $x'$, est la limite de la suite de mesures $S_n(x')$ pour $n \in E$, où $E$ est un sous-ensemble infini de $\mathbb{N}$. Soit $y$ un antécédent commun de $x$ et $x'$. Comme $\mathrm{Prob}(Y)$ est compact il existe un sous-ensemble infini $E'$ de $E$ tel que la suite de mesures $S_n(y)$, $n \in E'$, converge vers une mesure $\nu$, qui est donc une mesure associée à $y$. Sa projection sur $\mathrm{Prob}(X)$ est une mesure associée à $x$, et sa projection sur $\mathrm{Prob}(X')$ est $\mu'$. $\square$

Le corollaire suivant est calqué sur les propositions 2.2 et 2.7 de [1].

**Corollaire 1.2.** *(i) Soit $\mathcal{C}$ un couplage tel que le nombre de préimages de chaque élément de $Y$ par les applications $\varphi$ et $\psi$ soit borné. On suppose que chacun des deux systèmes dynamiques $(X, T_X)$ et $(X', T_{X'})$ admet une unique mesure invariante d'entropie maximale (ce qui est le cas par exemple du shift sur $\{0, 1, \dots, d-1\}^{\mathbb{N}}$ ou $\{0, 1, \dots, d-1\}^{\mathbb{Z}}$). En appelant $\mu$ et $\mu'$ les mesures d'entropie maximale sur $X$ et sur $X'$ respectivement, tout élément de $X'$ relaté à un élément $\mu$-générique est $\mu'$-générique.*

*(ii) En particulier si $X = X' = \{0, 1, \dots, d-1\}^{\mathbb{N}}$ ou $\{0, 1, \dots, d-1\}^{\mathbb{Z}}$, $T_X$ est le shift sur $X$, et si le nombre de préimages de chaque élément de $Y$ par les applications $\varphi$ et $\psi$ est borné, toute suite $(x'_n) \in X'$ relatée à une suite normale (c'est à dire générique pour la mesure produit uniforme) est normale.*

3. Théorème 3 de http ://jbuzzi.files.wordpress.com/2011/10/compacite-prob.pdf

*(iii) Soit $\mathcal{C}$ un couplage et $\nu$ une probabilité ergodique sur $Y$ telle que*

$$\forall E \text{ borélien}, \nu(E) = 0 \Rightarrow \nu(\varphi^{-1}(\varphi(E)) = 0.$$

*Alors tout élément de $X'$ relaté à un élément $\varphi(\nu)$-générique de $X$ est $\psi(\nu)$-générique.*

**Preuve.** (i) L'entropie topologique de $X$ ou de $X'$, c'est à dire le maximum des entropies des mesures invariantes sur $X$ et $X'$ respectivement, est inférieure ou égale à celle de $Y$. Mais dans le cas présent elle lui est égale, puisqu'il existe au moins une mesure d'entropie maximale $\nu$ sur $Y$ et $h_\nu = h_{\varphi(\nu)} = h_{\psi(\nu)}$ d'après [6]. Les images de $\nu$ par $\varphi$ et $\psi$ sont les mesures d'entropie maximale $\mu$ et $\mu'$, qui sont donc relatées et on peut utiliser le théorème.

(ii) C'est un cas particulier du (i), car dans ce cas la mesure produit uniforme est la mesure d'entropie maximale.

(iii) Soit $x' \in X'$, relaté à un élément $\varphi(\nu)$-générique de $X$, on veut démontrer que toute mesure $\mu'$ associée à $x'$ est égale à $\psi(\nu)$. D'après le théorème il existe une mesure $\nu'$ sur $Y$ telle que $\varphi(\nu') = \varphi(\nu)$ et $\psi(\nu') = \mu'$.

En appelant $G_\nu$ l'ensemble des éléments $\nu$-génériques de $Y$, supposons d'abord que $\nu'(G_\nu) = 1$. Alors la suite de mesures $S_n(y)$ converge pour $\nu'$-presque tout $y$ et donc $\nu'$ est ergodique. L'ensemble $G_\nu \cap G_{\nu'}$, de mesure 1, aurait au moins un élément $y$, d'où $\lim_{n\to\infty} S_n(y) = \nu = \nu'$ et par conséquent $\mu' = \psi(\nu)$.

Supposons maintenant $\nu'(G_\nu^c) > 0$. Comme $\varphi(\nu') = \varphi(\nu)$ on a

$$\nu(\varphi^{-1}(\varphi(G_\nu^c))) = \nu'(\varphi^{-1}(\varphi(G_\nu^c))) \geq \nu'(G_\nu^c) > 0$$

et, en utilisant l'hypothèse sur $\nu$, $\nu(G_\nu^c) > 0$, ce qui contredit l'ergodicité de $\nu$.

$\square$

## 2. **Transducteurs**

Utilisons les mêmes définitions que dans [1], illustrées par l'exemple ci-dessous.

On appellera automate tout graphe orienté fini dont les arcs sont étiquetés. Tout ensemble de triplets $(s, a, s')$, où $s, s'$ appartiennent à un ensemble fini $S$ et $a$ à un ensemble fini $A$, définit un automate dont les sommets sont étiquetés par les éléments de $S$ et les arcs par les éléments de $A$. Un transducteur est un cas particulier d'automate, où les étiquettes sont des couples (étiquette d'entrée et étiquette de sortie).

On peut considérer tout automate comme une chaîne de Markov topologique, défini par un graphe sans étiquette dont les sommets sont les éléments de $S \times A$ : dans ce graphe un arc va du sommet $(s, a)$ au sommet $(s', a')$ chaque fois que $(s, a, s')$ est un arc de l'automate.

Le couplage associé à un transducteur est constitué par :

$X$ = ensemble des labels d'entrée $(a_n)$ des chemins infinis (ou bi-infinis),

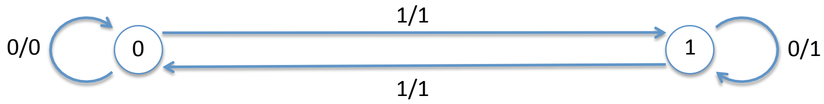
$X'$ = ensemble des labels de sortie $(a'_n)$ des chemins infinis (ou bi-infinis),

$Y$ = ensemble markovien des suites de terme général $(s_n, a_n, a'_n)$, où $s_n$ est l'étiquette du $n$-ième sommet et $(a_n, a'_n)$ l'étiquette du $n$-ième arc d'un chemin infini (ou bi-infini),

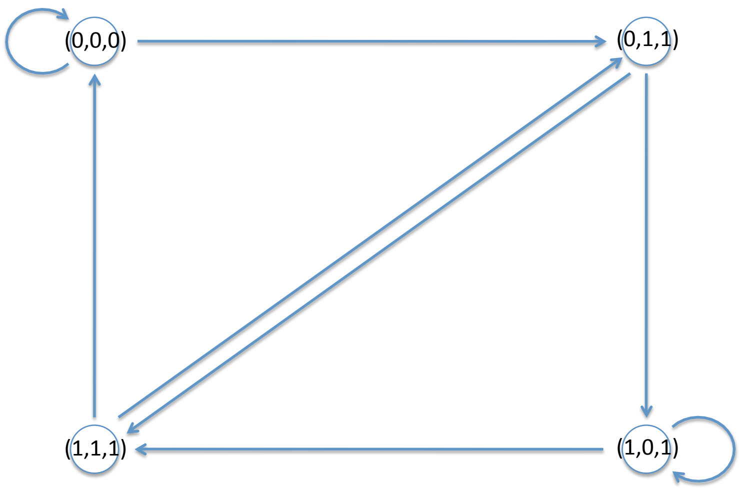
$T_X$, $T_{X'}$, $T_Y$ sont les shifts et $\varphi : Y \to X$, $\psi : Y \to X'$ les projections.

Le corollaire 2.4 de [1] dit que les conditions du corollaire 1.2 (i) sont satisfaites si le transducteur est non-ambigu (c'est à dire, entre deux états donnés il existe au plus un chemin labellisé en entrée (resp. en sortie) par un mot $m$ donné) et transitif (si deux mots $m$ et $m'$ sont reconnus en entrée (resp. en sortie), il existe $m''$ tel que $mm''m'$ le soit).

**Exemple 2.1.** *Un transducteur avec $A = \{0, 1\}$ (alphabet d'entrée), $A' = \{0, 1\}$ (alphabet de sortie), $S = \{0, 1\}$ (étiquettes des sommets) :*




*On a $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ou $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$, tandis que $X' \subset X$ est constitué des suites qui n'ont pas de 1 isolé, et $Y \subset \{0,1\}^3$ est l'ensemble des chemins du graphe ci-dessous :*




*Remarquons que si on entre (à partir du sommet 0) la suite infinie*

$$a_1 a_2 \cdots = 010^2 10^4 10^{16} 1 \ldots 10^n 10^{2^n} 1 \ldots,$$

*qui est $\delta_{\bar{0}}$-générique (où $\bar{0}$ est la suite constante nulle), on obtient en sortie la suite*

$$a'_1 a'_2 \cdots = 011^2 10^4 11^{16} 1 \ldots 10^n 11^{2^n} 1 \ldots$$

*qui n'est générique pour aucune mesure : les mesures associées sont les $\alpha\delta_{\bar{0}} + (1-\alpha)\delta_{\bar{1}}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.*

## 3. Suites aléatoires

Les suites aléatoires (voir [5]) peuvent être définies à partir des fonctions récursives ([2]). Le théorème 2 de [4] caractérise les transducteurs déterministes en entrée qui conservent les suites aléatoires :

**Théorème 3.1.** *Dans un transducteur déterministe, tout chemin infini $\gamma$ d'état initial $q$ et de label aléatoire en entrée*

– *a une étiquette de sortie aléatoire si et seulement si le sous-transducteur formé par les états récurrents de $\gamma$ est non-ambigu en sortie ;*
– *a une étiquette de sortie non récursive, sauf si tous les chemins infinis dont l'état initial est un des états récurrents ont même label en sortie (auquel cas ce label est périodique).*

## Références

[1] François Blanchard, Jean-Marie Dumont & Alain Thomas, *Generic sequences, transducers and multiplication of real numbers*, Israël journal of mathematics, 80, 1992, 257-287.

[2] Cristian Calude, *Theory of computational complexity*, Annals of discrete mathematics, 35, 487 p., 1988.

[3] Cristian Calude, *Borel normality and algorithmic randomness*, Developments in langage theory, Word scientific Singapore, 1994, 113-129.

[4] Max Dauchet, Bruno Durand, Sylvain Porrot & Nikolai K. Vereshchagin, *Deterministic rational transducers and random sequences*, Lecture notes in computer science, 1378, Springer 1998.

[5] Per Martin-Löf, *The definition of random seqences*, Inform. and control, 9, 1966, 602-619, 1967.

[6] William Parry, *Entropy and Generators in Ergodic Theory*, Benjamin New York, 1969.

*URL*: `http://univ-provence.fr`