(2014) B.I.A.A. no **97** BULLETIN D'INFORMATIQUE APPROFONDIE ET APPLICATIONS
ISSN 0291-5413 (Université d'Aix-Marseille)

Approximations décimales et développement en fraction continue

Christian FAIVRE [1]

Résumé. – Nous abordons dans cet article (sans chercher à être exhaustif) un problème pratique, celui de déterminer les k premiers quotients partiels (où $k \geq 1$ est un entier fixé) du développement fraction continue d'un nombre x défini "formellement" comme par exemple $x = \sqrt[3]{2}$ ou bien $x = \pi$.

1. Calculer les quotients partiels

Nous abordons dans cet article (sans chercher à être exhaustif) un problème pratique, celui de déterminer les k premiers quotients partiels (où $k \geq 1$ est un entier fixé) du développement fraction continue d'un nombre x défini "formellement" comme par exemple $x = \sqrt[3]{2}$ ou bien $x = \pi$. En général, le seul moyen est de passer par le développement décimal de x. Le schéma est alors le suivant : à partir des n premières décimales de x (avec n à choisir convenablement) on en déduit une approximation rationnelle r_n de x. On développe alors r_n en fraction continue. Notons que le développement en fraction continue de r_n peut se déterminer exactement car il s'agit d'un nombre rationnel. En effet pour un nombre rationnel p/q l'algorithme de développement en fraction continue montre que l'on a besoin de faire uniquement des opérations sur des nombres entiers. Si r_n est suffisamment proche de x, alors les k premiers quotients partiels de r_n coïncideront avec ceux de x. Le problème est donc le choix de n par rapport à k, en admettant bien entendu que l'on puisse déterminer concrètement les n premières décimales de x, ce qui n'est pas toujours évident selon le nombre x surtout si n est grand.

2. Une exception : les nombres algébriques

Dans le cas très particulier d'un nombre algébrique non rationnel x, Lagrange a donné le premier une méthode directe pour déterminer le développement en fraction continue de x sans utiliser le développement décimal. C'est cette méthode que nous allons rapidement exposer ici. Soit $S \in \mathbf{Q}[X]$ de degré ≥ 2 tel que $S(x) = 0$. On ne suppose pas dans ce qui suit que S est le polynôme minimal de x. On peut toujours supposer (quitte à remplacer S par le polynôme $S/PGCD(S, S')$) que S n'a pas de racine multiple. Notons $a_0 = [x]$, de sorte que $a_0 < x < a_0 + 1$. On supposera ici pour simplifier l'exposition de la méthode que x est la seule racine de S dans l'intervalle $[a_0, a_0 + 1]$. On écrit alors :

$$x = a_0 + \frac{1}{\alpha_1},$$

avec $\alpha_1 > 1$. En substituant alors cette valeur dans l'équation à la place de x, on aura (après avoir tout multiplié par α_1^d, où $d = d^\circ S$) que α_1 est racine d'un polynôme S_1 de même degré que S et que α_1 est la seule racine de S_1 dans l'intervalle $(1, \infty)$ car dans

1. Université d'Aix-Marseille

le cas contraire S aurait alors plusieurs racines dans (a_0, a_0+1). On calcule ensuite les valeurs :

$$S_1(1),\ S_1(2),\ S_1(3), \ldots,$$

jusqu'à trouver deux entiers consécutifs a_1 et a_1+1 tels que les quantités $S_1(a_1)$ et $S_1(a_1+1)$ soient de signes différents. Le polynôme S_1 admet donc une racine dans l'intervalle (a_1, a_1+1) d'où $a_1 = [\alpha_1]$ puisque α_1 est la seule racine de S_1 dans $(1, \infty)$. On écrit alors :

$$\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2},$$

avec $\alpha_2 > 1$ et on recommence. On remplace α_1 par $a_1 + \frac{1}{\alpha_2}$ dans l'équation $S_1(\alpha_1) = 0$ et on en déduit un polynôme S_2 tel que $S_2(\alpha_2) = 0$ qui n'a qu'une seule racine dans l'intervalle $(1, \infty)$. On calcule les valeurs $S_2(1), S_2(2), \ldots$, etc... On en déduit ainsi de proche en proche une suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, de réels > 1 et une suite $a_1, a_2, \ldots$, d'entiers ≥ 1 tels que

$$x = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \qquad \alpha_k = a_k + \frac{1}{\alpha_{k+1}} \quad (k \geq 1).$$

On a alors par construction

$$x = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}} = \cdots,$$

ce qui donne le développement en fraction continue de x :

$$x = [a_0; a_1, a_2, \ldots].$$

On constate que α_k, l'unique racine > 1 de S_k coincïde avec le quotient complet d'ordre k de x. On a donc l'algorithme suivant pour calculer de proche en proche les polynômes S_k et les entiers a_k :

$$\begin{cases} S_{k+1}(x) = x^d S_k(a_k + \frac{1}{x}) \\ S_{k+1}(a_{k+1}) \cdot S_{k+1}(a_{k+1}+1) < 0 \end{cases}$$

pour tout $k \geq 0$, avec $S_0 = S$ et $a_0 = [x]$. Pour k suffisamment grand, on peut montrer (voir par exemple [BvdP]) que les polynômes S_k deviennent "réduits" i.e. à part la racine $\alpha_k > 1$, les autres racines β de S_k vérifient toutes les inégalités $-1 < Re(\beta) < 0$ et $|\beta| < 1$. Si S_{k+1} est réduit, on peut alors en déduire un procédé rapide pour calculer $a_{k+1} = [\alpha_{k+1}]$. En écrivant

$$S_{k+1}(x) = s_{k+1,d}x^d + \cdots + s_{k+1,1}x + s_{k+1,0},$$

on a $\alpha_{k+1} + \sigma = -s_{k+1,d-1}/s_{k+1,d}$, où σ désigne la somme de toutes les racines de S_{k+1} autres que α_{k+1}. On a donc $u < \alpha_{k+1} < u + (d-1)$, avec $u = -s_{k+1,d-1}/s_{k+1,d}$, ce qui permet de limiter la recherche de a_{k+1} aux d valeurs $[u], [u]+1, \ldots, [u]+(d-1)$.

Dans le cas particulier de $x = \sqrt{N}$, Lagrange a décrit un autre algorithme pour déterminer le développement en fraction continue. On pose $P_0 = 0$ et $Q_0 = 1$, puis on détermine α_0 et a_0 par

$$\alpha_0 = \frac{P_0 + \sqrt{N}}{Q_0}, \quad a_0 = [\alpha_0].$$

Ensuite P_k, Q_k, α_k, a_k étant déterminés, on calcule $P_{k+1}, Q_{k+1}, \alpha_{k+1}, a_{k+1}$ par les formules :

$$P_{k+1} = a_k Q_k - P_k, \qquad Q_{k+1} = \frac{N - P_{k+1}^2}{Q_k}$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{P_{k+1} + \sqrt{N}}{Q_{k+1}}, \qquad a_{k+1} = [\alpha_{k+1}].$$

Dès que l'on a trouvé un entier $h \geq 1$ tel que $\alpha_{h+1} = \alpha_1$, on a alors le développement en fraction continue :

$$\sqrt{N} = [a_0; \overline{a_1, \ldots, a_h}].$$

Dans cet algorithme, les α_k coincident avec les quotients complets de $\sqrt{N}$.

3. La méthode de Lochs

Reprenons le problème abordé au début, celui de déterminer les k premiers quotients partiels du développement en fraction continue d'un nombre irrationnel x à partir de son développement décimal. Pour tout $n \geq 1$, soient x_n, y_n, les approximations décimales d'ordre n respectivement par défaut et par excès de x i.e.

$$x_n = \frac{[10^n x]}{10^n}, \qquad y_n = x_n + \frac{1}{10^n}.$$

Suivant Lochs [Loc64], supposons que l'on ait trouvé un entier $n \geq 1$ pour lequel les développements en fraction continue de x_n et y_n (ces deux développements sont finis puisqu'il s'agit de nombres rationnels) coïncident jusqu'à l'ordre k i.e.

$$x_n = [u_0; u_1, \ldots, u_k, \ldots], \quad y_n = [u_0; u_1, \ldots, u_k, \ldots]. \tag{1}$$

Alors si $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$, on aura

$$a_0 = u_0, \ldots, a_k = u_k,$$

en d'autres termes $u_0, \ldots, u_k$ seront les k premiers quotients partiels exacts de x. En effet les nombres qui admettent un développement en fraction continue qui commence par $u_0, \ldots, u_k$ est un intervalle (intervalle fondamental). Désignons par $k_n(x)$ pour tout entier $n \geq 1$, le nombre maximal de quotients partiels de x donnés par x_n et y_n suivant le procédé ci-dessus c'est-à-dire que $k_n(x)$ est le plus grand entier $p \geq 0$ tel que l'on puisse écrire

$$x_n = [u_0; u_1, \ldots, u_p, \ldots], \qquad y_n = [u_0; u_1, \ldots, u_p, \ldots], \tag{2}$$

pour certains entiers $u_0, \ldots, u_p$. Notons qu'un tel entier p existe toujours ; en effet en posant $u_0 = [x]$, on a $[x_n] = u_0$ et $[y_n] = u_0$ ou bien $y_n = u_0 + 1$. Dans ce dernier cas, on peut écrire $y_n = [u_0; 1]$. La quantité $k_n(x)$ peut donc s'interpréter comme le nombre maximal de quotients partiels de x donnés par les n premières décimales de x. Remarquons que le développement en fraction continue d'un nombre rationnel n'est pas unique. En fait il existe exactement deux développements. Habituellement celui où le dernier quotient partiel est ≥ 2 est appelé le développement régulier et l'autre le développement irrégulier. Il faut souligner que nous ne choisisssons pas systématiquement un de ces deux développements au profit de l'autre, mais on essaie d'obtenir le maximum de quotients partiels en jouant sur les deux développements. Par exemple si le développement décimal de x commence par $x = 0.5\ldots$, alors

$$x_1 = 0.5 = [0; 2], \qquad y_1 = 0.6 = [0; 1, 1, 2].$$

Mais $[0; 2] = [0; 1, 1]$, donc ici on a $k_1(x) = 2$ (et non $k_1(x) = 0$) et on en déduit $x = [0; 1, 1, \ldots]$. Il faut cependant souligner que cette situation est plutôt exceptionnelle car dans la majorité des cas, les développements réguliers de x_n et y_n se présenteront suivant le schéma :

$$\begin{cases} x_n = [u_0; u_1, \ldots, u_l, u_{l+1}, u_{l+2}, \ldots] \\ y_n = [u_0; u_1, \ldots, u_l, u'_{l+1}, u'_{l+2}, \ldots] \end{cases}$$

avec $u_{l+1} \neq u'_{l+1}$ et donc on aura $k_n(x) = l$. A titre illustratif, considérons maintenant des exemples de calcul de quantités $k_n(x)$. Prenons $x = \pi = 3.14159265\cdots$. Nous avons les développements en fraction continue :

$$\begin{cases} 3.1 = [3; 10] \\ 3.2 = [3; 5] \end{cases} \qquad \begin{cases} 3.14 = [3; 7, 7] \\ 3.15 = [3; 6, 1, 2] \end{cases}$$

Ainsi $k_1(\pi) = k_2(\pi) = 0$. Ensuite

$$\begin{cases} 3.141 = [3; 7, 10, 1, 5, 2] \\ 3.142 = [3; 7, 23, 1, 2] \end{cases}$$

et donc $k_3(\pi) = 1$. Même avec six décimales nous n'obtenons qu'un seul quotient partiel puisque

$$\begin{cases} 3.141592 = [3; 7, 15, 1, 84, 6, 2] \\ 3.141593 = [3; 7, 16, 983, 4, 2] \end{cases}$$

d'où $k_6(\pi) = 1$. L'exemple de π pourrait donc faire penser qu'en général $k_n(x)$ est beaucoup plus petit que n. De manière étonnante cette affirmation est fausse en général et c'est précisément le résultat opposé qui est vrai. En 1964, G. Lochs [Loc64] a démontré le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Pour presque tout nombre irrationnel x (au sens de la mesure de Lebesgue), on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n(x)}{n} = \frac{6 \log 2 \log 10}{\pi^2} \simeq 0.9702.$$

La constante $6 \log 2 \log 10/\pi^2$ étant très proche de 1, on peut presque dire que les n premières décimales déterminent les n premiers quotients partiels de x. Ainsi les conclusions que l'on peut tirer de l'examen des 6 premières décimales de π sont tout à fait erronées. L'explication de ce phénomène réside dans le développement en fraction continue de π :

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, \ldots].$$

On constate en effet la présence du grand quotient partiel 292, un nombre inhabituellement grand pour un quatrième quotient partiel. Il est donc intéressant de regarder un plus grand nombre de décimales. Il a été prouvé par Lochs lui-même [Loc63] que les 1000 premières décimales de π déterminent 968 quotients partiels exacts i.e. $k_{1000}(\pi) = 968$. Avec 10000 décimales, on obtient 9757 quotients partiels. Il semble donc que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n(\pi)}{n} = \frac{6 \log 2 \log 10}{\pi^2},$$

c'est-à-dire que π n'est pas dans l'ensemble exceptionnel du théorème de Lochs. Pour certains nombres irrationnels x, $k_n(x)$ peut être plus grand que n (c'est le cas pour le Nombre d'Or G, voir l'exemple après le corollaire 4.2), en revanche $k_n(x)$ est toujours un $O(n)$. On a en effet le résultat suivant [Fai01] :

Théorème 3.2. *Pour tout nombre irrationnel x et $n \geq 1$, on a l'inégalité*

$$k_n(x) \leq Cn + \frac{1}{2},$$

avec $C = \log 10/(2\log G) \simeq 2.3924$. La constante Cest optimale.

Le théorème de Lochs est un résultat relatif à deux développements distincts d'un même nombre réel (en l'occurrence le développement décimal et le développement en fraction continue). La constante $(6\log 2\log 10)/\pi^2$ est égale au rapport des entropies

$$\frac{h_m(S)}{h_\mu(T)}$$

où S désigne la transformation associée au développement décimal (i.e. $S(x) = 10x - [10x]$) et T la transformation de Gauss associée au développement en fraction continue. En utilisant le théorème de Shannon–McMillan–Breiman, Bosma, Dajany et Kraaikamp [BDK06] ont pu généraliser le théorème de Lochs à d'autres développements.

4. Améliorations du théorème de Lochs

Je me suis intéressé au théorème de Lochs et j'ai pu améliorer ce théorème dans deux directions différentes. Dans la première, je montre que la suite $k_n(x)/n$ admet toujours une limite si x a une constante de Lévy et si les quotients partiels de x ne sont pas trop grands [Fai01] :

Théorème 4.1. *Soit $x = [a_0; a_1, a_2, \dots,]$ un nombre irrationnel ayant une constante de Lévy et tel que $a_n = o(\alpha^n)$ pour tout $\alpha > 1$. Alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n(x)}{n} = \frac{\log 10}{2\beta(x)}.$$

Le théorème de Lochs découle de ce résultat puisque presque tout x admet une constante de Lévy égale à $\pi^2/(12\log 2)$ (théorème de Lévy) et que toujours pour presque tout x, on a par exemple $a_n(x) = O(n^2)$. Ce dernier résultat découlant du théorème classique de Bernstein sur les fractions continues puisque la série $\sum n^{-2}$ est convergente. Une application importante du théorème 4.1 concerne le cas des nombres quadratiques. Le développement en fraction continue d'un nombre quadratique étant périodique et tout nombre quadratique admettant une constante de Lévy, on peut alors énoncer :

Corollaire 4.2. *Pour tout nombre quadratique x, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n(x)}{n} = \frac{\log 10}{2\beta(x)}.$$

Par exemple si l'on prend $x = G$, le Nombre d'Or, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n(x)}{n} = \frac{\log 10}{2\log G} \simeq 2.3924,$$

puisque $\beta(G) = \log G$. Ce qui montre bien que l'on ne peut améliorer la constante C dans le théorème 3.2. Dans [Fai01], il est aussi prouvé que si pour un irrationnel x, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log q_n(x) = \infty$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n(x)}{n} = 0.$$

C'est le cas par exemple de e. Le théorème 4.1 a été amélioré récemment par Wu [Wu06] qui a montré en substance que la condition sur les quotients partiels $a_n = o(\alpha^n)$ pouvait être supprimée. Précisément, le résultat de Wu est que l'on a toujours pour tout nombre irrationnel x :

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{k_n(x)}{n} = \frac{\log 10}{2\beta^*(x)}, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{k_n(x)}{n} = \frac{\log 10}{2\beta_*(x)},$$

où $\beta_*(x)$ et $\beta^*(x)$ sont définis par :

$$\beta_*(x) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log q_n(x)}{n}, \quad \beta^*(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log q_n(x)}{n}.$$

Le deuxième résultat mentionné sur k_n est un théorème de large déviations [Fai97] :

Théorème 4.3. *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe des constantes C, r avec $C > 0$ et $0 < r < 1$ telles que*

$$m\left\{x \in [0,1];\ \left|\frac{k_n(x)}{n} - a\right| \geq \epsilon\right\} \leq Cr^n \qquad (n \geq 1),$$

où $a = 6\log 2 \log 10/\pi^2$.

Ainsi pour tout $\epsilon > 0$,

$$\sum_{n\geq 1} m\left\{x \in [0,1];\ \left|\frac{k_n(x)}{n} - a\right| \geq \epsilon\right\} < \infty,$$

et le résultat de Lochs s'en déduit par une application du lemme de Borel–Cantelli. J'ai obtenu plus précisément les deux inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left[m\left\{x \in [0,1];\ \frac{k_n(x)}{n} \leq a - \epsilon\right\}\right] &\leq \theta_1(\epsilon),\\
\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left[m\left\{x \in [0,1];\ \frac{k_n(x)}{n} \geq a + \epsilon\right\}\right] &\leq \theta_2(\epsilon),
\end{aligned}$$

avec

$$\theta_1(\epsilon) = \inf_{0<t<\frac{1}{2}} \frac{1}{t+1}\Big(-t\log 10 + (a-\epsilon)\log\lambda(2-2t)\Big)$$

et

$$\theta_2(\epsilon) = \inf_{t>0}\Big(t\log 10 + (a+\epsilon)\log\lambda(2+2t)\Big).$$

Dans ces deux formules, $\lambda(2-2t)$ et $\lambda(2+2t)$ sont les valeurs propres dominantes des opérateurs de transfert L_{2-2t} et L_{2+2t} définis dans le chapitre 3. On peut montrer que $\theta_1(\epsilon) < 0$ et $\theta_2(\epsilon) < 0$. Par exemple pour prouver que $\theta_1(\epsilon) < 0$, on considère la fonction

$$h(t) = -t\log 10 + (a-\epsilon)\log\lambda(2-2t),$$

définie pour $t < \frac{1}{2}$. On a

$$h'(t) = -\log(10) - 2(a-\epsilon)\frac{\lambda'(2-2t)}{\lambda(2-2t)}.$$

Comme on l'a vu au chapitre 3,

$$\lambda(2) = 1, \qquad \lambda'(2) = -\frac{\pi^2}{12\log 2},$$

donc $h(0) = 0$ et $h'(0) < 0$. Ainsi $h(t) < 0$ pour $t > 0$ suffisamment petit ce qui implique que $\theta_1(\epsilon) < 0$.

5. Un théorème central limite. Application

Dans [Fai98], un théorème central limite est énoncé pour la suite $(k_n)_{n\geq 1}$.

Théorème 5.1. *Il existe une constante $\sigma > 0$ telle que*

$$\lim_{n\to\infty} m\left\{x \in [0,1];\ \frac{k_n(x)-na}{\sigma\sqrt{n}} \leq z\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\,dt,$$

pour tout $z \in \mathbf{R}$.

Récemment Wu [Wu] a montré que $(k_n)_{n\geq 1}$ vérifiait aussi une loi du logarithme itérée :

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{k_n(x)-na}{\sigma\sqrt{2n\log\log n}} = 1, \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{k_n(x)-na}{\sigma\sqrt{2n\log\log n}} = -1,$$

pour presque tout irrationnel x. La constante σ est reliée à une autre constante importante dans la théorie métrique des fractions continues. Comme on l'a vu au chapitre 4, la suite $(\log q_n)_{n\geq 1}$ vérifie un théorème central limite :

$$\lim_{n\to\infty} m\left\{x \in [0,1],\ \frac{\log q_n(x)-nb}{\sigma_1\sqrt{n}} \leq z\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-t^2/2}\,dt,$$

pour une certaine constante $\sigma_1 > 0$ et avec $b = \pi^2/(12\log 2)$. On a alors que les constantes σ and σ_1 sont reliées par la formule ([Fai98] p. 462) :

$$\sigma^2 = 864\,\frac{(\log 2)^3\log 10}{\pi^6}\,\sigma_1^2. \tag{3}$$

B. Vallée [Val97] a montré une belle expression entre σ_1 et la valeur propre dominante de l'opérateur de transfert L_2 (cf. chapitre 3) :

$$\sigma_1^2 = \lambda''(2) - (\lambda'(2))^2.$$

On en déduit alors une relation simple entre σ^2 et la constante de Hensley α_H qui intervient dans l'analyse en moyenne de l'algorithme d'Euclide. En effet, en utilisant (3) ainsi que l'expression suivante pour la constante de Hensley [FV98]

$$\alpha_H = -\frac{\lambda''(2)-(\lambda'(2))^2}{(\lambda'(2))^3},$$

on obtient

$$\sigma^2 = \frac{\log 10}{2}\alpha_H.$$

Des simulations sur ordinateur à partir de la loi de k_n avaient permis de donner dans [Fai01] l'approximation

$$\sigma \approx 0.769. \tag{4}$$

On peut faire maintenant beaucoup mieux. En effet Lohte [Lho04] a obtenu récemment des estimations précises de la constante de Hensley à partir de l'algorithme DFV introduit la première fois par Daudé, Flajolet et Vallée [DFV97]. On a par exemple

$$\alpha_H = 0.5160624089\cdots, \tag{5}$$

avec 10 décimales exactes, améliorant de ce fait une estimation antérieure de Flajolet et Vallée [FV00]. En utilisant (5), on obtient alors l'estimation suivante pour σ qui précise (4) :

$$\sigma = 0.7708039990\cdots$$

k	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$N_{k,\alpha}$	16	28	40	51	62	74	85	96	107	118

TABLE 1. Nombres de décimales

La distribution exacte de k_n (lorsque x est choisi au hasard dans $[0, 1]$ suivant une répartition uniforme) a été déterminée pour $1 \leq n \leq 7$. Même pour les petites valeurs de n et en fait pour $n \geq 4$, on peut considérer la distribution de k_n comme approximativement normale si on procède à une correction de continuité comme c'est habituellement le cas quand on essaie d'approcher une distribution discrète par une distribution continue. Des calculs sur ordinateur (voir annexe en fin de la thèse) ont justifié que pour tout entier i, on obtient une bonne approximation de $P(k_n \leq i)$ en prenant $P(N_n \leq i+1)$, où N_n suit une distribution normale de moyenne na et d'écart type $\sigma\sqrt{n}$. En utilisant cette approximation, on peut donner une règle pratique pour savoir combien il faut prendre de décimales si l'on veut obtenir (au moins) k quotients partiels exacts dans le développement en fraction continue d'un nombre irrationnel. La règle est la suivante :

Règle. *Pour un niveau de confiance de α%, (par exemple 95%), si l'on veut k quotients partiels (au moins), il faut prendre un nombre de décimales égal à $N_{k,\alpha}$ avec*

$$N_{k,\alpha} = \frac{\left(-q\sigma + \sqrt{q^2\sigma^2 + 4ak}\right)^2}{4a^2},$$

où q désigne le $(1-\alpha)$-quantile pour la distribution normale $N(0, 1)$.

Essayons de justifier cette règle. Si l'on veut au moins k quotients partiels, avec un niveau de confiance de α, on doit prendre n tel que

$$P(k_n \geq k) \geq \alpha.$$

Mais comme k_n ne prend que des valeurs entières,

$$P(k_n \geq k) = 1 - P(k_n \leq k-1) \simeq 1 - P(N_n \leq k),$$

grâce à l'approximation vue plus haut. Ainsi il faut prendre n tel que

$$P(N_n \leq k) \leq 1 - \alpha.$$

Mais

$$P(N_n \leq k) = \Psi\left(\frac{k - na}{\sigma\sqrt{n}}\right),$$

où Ψ est la fonction de répartition de la loi normale $N(0, 1)$. Donc n doit être choisi de telle sorte que

$$\frac{k - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq q,$$

ce qui donne

$$n \geq \frac{\left(-q\sigma + \sqrt{q^2\sigma^2 + 4ak}\right)^2}{4a^2}.$$

Remarque. Il n'existe pas de borne *absolue* N_k pour le nombre de décimales de telle sorte que pour tout irrationnel (ou même pour presque tout irrationnel) en prenant N_k

k	200	300	400	500	1000	2000	3000	4000	5000	10000
$N_{k,\alpha}$	226	334	440	546	1074	2122	3166	4208	5248	10440

TABLE 2. Nombres de décimales

décimales on soit sûr d'obtenir au moins k quotients partiels. Ainsi on ne peut améliorer le résultat précédent sans spécifier de niveau de confiance.

Les tableaux 1 et 2 donnent le nombre de décimales pour plusieurs valeurs de k et pour un seuil de confiance de 95% ($\alpha = 0.95$). Par exemple si l'on veut 1000 quotients partiels, on prendra 1074 décimales.

RÉFÉRENCES

[BDK06] W. Bosma, K. Dajani, and C. Kraaikamp. Entropy quotients and correct digits in number-theoretic expansions. *IMS Lecture Notes–Monograph Series Dynamics and Stochastics*, 48 :176–188, 2006.

[BvdP] E. Bombieri and A. van der Poorten. Continued fractions of algebraic numbers. Computational Algebra and Number Theory, Sydney 1992, W. Bosma and A. van der Poorten eds.,. (Kluwer 1995), 137–152.

[DFV97] H. Daudé, P. Flajolet, and B. Vallée. An average-case analysis of the Gaussian algorithm for lattice reduction. *Comb. Probab. Comput.*, 6(4) :397–433, 1997.

[Fai97] C. Faivre. On decimal and continued fraction expansions of a real number. *Acta Arith.*, 82(2) :119–128, 1997.

[Fai98] C. Faivre. A central limit theorem related to decimal and continued fraction expansions. *Arch. Math. (Basel)*, 70 :455–463, 1998.

[Fai01] C. Faivre. On calculating a continued fraction expansion from a decimal expansion. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 67 :505–519, 2001.

[FV98] P. Flajolet and B. Vallée. Continued fraction algorithms, functional operators, and structure constants. *Theor. Comput. Sci.*, 194(1–2) :1–34, 1998.

[FV00] P. Flajolet and B. Vallée. Continued fractions, comparison algorithms, and fine structure constants. Théra, Michel (ed.), Constructive, experimental, and nonlinear analysis. Selected papers of a workshop, Limoges, France, September 22-23, 1999. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), publ. for the Canadian Mathematical Society. CMS Conf. Proc. 27, 53-82 (2000)., 2000.

[Lho04] L. Lhote. Computation of a Class of Continued Fraction Constants. In *Proceedings of Alenex–ANALCO04*, pages 199–210, 2004.

[Loc63] G. Lochs. Die ersten 968 Kettenbruchnenner von π. *Monatsh. Math.*, 67 :311–316, 1963.

[Loc64] G. Lochs. Vergleich der Genauigkeit von Dezimalbruch und Kettenbruch. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 27 :142–144, 1964.

[Val97] B. Vallée. Opérateurs de Ruelle–Mayer généralisés et analyse en moyenne des algorithmes d'Euclide et de Gauss. *Acta Arith.*, 81 :101–144, 1997.

[Wu] J. Wu. An Iterated Logarithm Law Related to Decimal and Continued Fraction Expansions. To appear in Monatsh. Math.

[Wu06] J. Wu. Continued fraction and decimal expansions of an irrational number. *Adv. in Math.*, 206 :684–694, 2006.

6. ANNEXE : NORMALITÉ DE k_n

Comme on l'a vu, lorsque x est choisi au hasard dans $[0, 1]$ suivant une répartition uniforme la quantité

$$\frac{k_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$$

avec

$$a = \frac{6 \log 2 \log 10}{\pi^2} \simeq 0.9702, \qquad \sigma \simeq 0.7708039990,$$

tend vers une loi normale $N(0, 1)$ quand $n \to \infty$. Nous avons affirmé que la loi k_n pouvait être considérée comme approximativement normale dès que $n \geq 4$ à condition de faire une correction de continuité i.e. pour tout entier i, on obtient une bonne approximation de $P(k_n \leq i)$ en prenant $P(N_n \leq i+1)$, où N_n suit une distribution normale de moyenne na et d'écart type $\sigma\sqrt{n}$. Le but de cette annexe est de fournir une justification numérique de cette affirmation.

Dans les divers tableaux ci-après, on a fait figurer à titre comparatif l'approximation de $P(k_n \leq i)$ sans correction de continuité i.e. $P(N_n \leq i)$ et l'approximation avec correction de continuité $P(N_n \leq i + 1)$. Les diverses probabilités ont été arrondies avec deux chiffres après la virgule. Pour $1 \leq n \leq 7$, les probabilités $P(k_n \leq i)$ ont été calculées a partir de la loi exacte de k_n et par simulations pour $n \geq 8$. On peut voir sur les divers tableaux que l'approximation est très correcte dés que $n \geq 4$. En revanche, l'approximation par $P(N_n \leq i)$ n'est pas très bonne (surtout dans la partie centrale) même pour $n = 100$.

$n = 1$			
i	$P(k_n \leq i)$	$P(N_n \leq i)$	$P(N_n \leq i+1)$
0	0.40	0.10	0.52
1	0.90	0.52	0.91
2	1.00	0.91	1.00

$n = 2$			
i	$P(k_n \leq i)$	$P(N_n \leq i)$	$P(N_n \leq i+1)$
0	0.15	0.04	0.19
1	0.49	0.19	0.52
2	0.82	0.52	0.83
3	0.98	0.83	0.97
4	1.00	0.97	1.00

$n=3$			
i	$P(k_n \leq i)$	$P(N_n \leq i)$	$P(N_n \leq i+1)$
0	0.06	0.01	0.08
1	0.23	0.08	0.25
2	0.53	0.25	0.53
3	0.80	0.53	0.79
4	0.94	0.79	0.94
5	0.99	0.94	0.99
6	1.00	0.99	1.00
7	1.00	1.00	1.00

$n=4$			
i	$P(k_n \leq i)$	$P(N_n \leq i)$	$P(N_n \leq i+1)$
0	0.02	0.01	0.03
1	0.10	0.03	0.11
2	0.29	0.11	0.28
3	0.54	0.28	0.53
4	0.77	0.53	0.77
5	0.92	0.77	0.92
6	0.98	0.92	0.98
7	1.00	0.98	1.00
8	1.00	1.00	1.00
9	1.00	1.00	1.00

$n=5$			
i	$P(k_n \leq i)$	$P(N_n \leq i)$	$P(N_n \leq i+1)$
0	0.01	0.00	0.01
1	0.04	0.01	0.05
2	0.14	0.05	0.14
3	0.31	0.14	0.31
4	0.54	0.31	0.53
5	0.76	0.53	0.75
6	0.90	0.75	0.89
7	0.97	0.89	0.97
8	0.99	0.97	0.99
9	1.00	0.99	1.00
10	1.00	1.00	1.00
11	1.00	1.00	1.00

$n=6$			
i	$P(k_n \leq i)$	$P(N_n \leq i)$	$P(N_n \leq i+1)$
0	0.00	0.00	0.01
1	0.01	0.01	0.02
2	0.06	0.02	0.07
3	0.16	0.07	0.17
4	0.34	0.17	0.33
5	0.55	0.33	0.54
6	0.74	0.54	0.73
7	0.88	0.73	0.88
8	0.96	0.88	0.95
9	0.99	0.95	0.99
10	1.00	0.99	1.00
11	1.00	1.00	1.00
12	1.00	1.00	1.00
13	1.00	1.00	1.00
14	1.00	1.00	1.00

$n=7$			
i	$P(k_n \leq i)$	$P(N_n \leq i)$	$P(N_n \leq i+1)$
0	0.00	0.00	0.00
1	0.01	0.00	0.01
2	0.03	0.01	0.03
3	0.08	0.03	0.09
4	0.19	0.09	0.19
5	0.35	0.19	0.35
6	0.55	0.35	0.54
7	0.73	0.54	0.72
8	0.87	0.72	0.86
9	0.95	0.86	0.94
10	0.98	0.94	0.98
11	1.00	0.98	0.99
12	1.00	0.99	1.00
13	1.00	1.00	1.00
14	1.00	1.00	1.00

$n=8$			
i	$P(k_n \leq i)$	$P(N_n \leq i)$	$P(N_n \leq i+1)$
0	0.00	0.00	0.00
1	0.00	0.00	0.00
2	0.01	0.00	0.01
3	0.04	0.01	0.04
4	0.10	0.04	0.10
5	0.21	0.10	0.21
6	0.37	0.21	0.36
7	0.55	0.36	0.54
8	0.72	0.54	0.71
9	0.85	0.71	0.85
10	0.93	0.85	0.93
11	0.98	0.93	0.97
12	0.99	0.97	0.99
13	1.00	0.99	1.00
14	1.00	1.00	1.00
15	1.00	1.00	1.00

$n=9$			
i	$P(k_n \leq i)$	$P(N_n \leq i)$	$P(N_n \leq i+1)$
1	0.00	0.00	0.00
2	0.00	0.00	0.01
3	0.02	0.01	0.02
4	0.05	0.02	0.05
5	0.12	0.05	0.12
6	0.23	0.12	0.23
7	0.38	0.23	0.38
8	0.55	0.38	0.55
9	0.72	0.55	0.71
10	0.84	0.71	0.84
11	0.92	0.84	0.92
12	0.97	0.92	0.97
13	0.99	0.97	0.99
14	1.00	0.99	1.00
15	1.00	1.00	1.00

$n = 10$			
i	$P(k_n \leq i)$	$P(N_n \leq i)$	$P(N_n \leq i + 1)$
2	0.00	0.00	0.00
3	0.01	0.00	0.01
4	0.02	0.01	0.03
5	0.06	0.03	0.06
6	0.13	0.06	0.13
7	0.24	0.13	0.24
8	0.39	0.24	0.39
9	0.56	0.39	0.55
10	0.71	0.55	0.70
11	0.83	0.70	0.83
12	0.91	0.83	0.91
13	0.96	0.91	0.96
14	0.99	0.96	0.99
15	1.00	0.99	1.00
16	1.00	1.00	1.00

$n = 50$			
i	$P(k_n \leq i)$	$P(N_n \leq i)$	$P(N_n \leq i+1)$
32	0.00	0.00	0.00
33	0.00	0.00	0.00
34	0.01	0.00	0.01
35	0.01	0.01	0.01
36	0.02	0.01	0.02
37	0.03	0.02	0.03
38	0.04	0.03	0.04
39	0.06	0.04	0.06
40	0.08	0.06	0.08
41	0.12	0.08	0.12
42	0.16	0.12	0.16
43	0.21	0.16	0.20
44	0.26	0.20	0.26
45	0.32	0.26	0.32
46	0.39	0.32	0.39
47	0.47	0.39	0.46
48	0.54	0.46	0.54
49	0.61	0.54	0.61
50	0.68	0.61	0.68
51	0.74	0.68	0.74
52	0.80	0.74	0.79
53	0.84	0.79	0.84
54	0.88	0.84	0.88
55	0.92	0.88	0.92
56	0.94	0.92	0.94
57	0.96	0.94	0.96
58	0.97	0.96	0.97
59	0.98	0.97	0.98
60	0.99	0.98	0.99
61	0.99	0.99	0.99
62	1.00	0.99	1.00
63	1.00	1.00	1.00
64	1.00	1.00	1.00

$n = 100$			
i	$P(k_n \leq i)$	$P(N_n \leq i)$	$P(N_n \leq i+1)$
75	0.00	0.00	0.00
76	0.00	0.00	0.00
77	0.01	0.00	0.01
78	0.01	0.01	0.01
79	0.01	0.01	0.01
80	0.02	0.01	0.02
81	0.02	0.02	0.03
82	0.03	0.03	0.03
83	0.04	0.03	0.05
84	0.06	0.05	0.06
85	0.08	0.06	0.08
86	0.10	0.08	0.10
87	0.12	0.10	0.12
88	0.15	0.12	0.15
89	0.18	0.15	0.18
90	0.22	0.18	0.22
91	0.26	0.22	0.26
92	0.30	0.26	0.30
93	0.35	0.30	0.35
94	0.40	0.35	0.40
95	0.45	0.40	0.45
96	0.50	0.45	0.50
97	0.55	0.50	0.55
98	0.60	0.55	0.60
99	0.65	0.60	0.65
100	0.70	0.65	0.70
101	0.74	0.70	0.74
102	0.78	0.74	0.78
103	0.82	0.78	0.82
104	0.85	0.82	0.85
105	0.88	0.85	0.88
106	0.90	0.88	0.90
107	0.92	0.90	0.92
108	0.94	0.92	0.94
109	0.95	0.94	0.95
110	0.96	0.95	0.97
111	0.97	0.97	0.97
112	0.98	0.97	0.98
113	0.99	0.98	0.99
114	0.99	0.99	0.99
115	0.99	0.99	0.99
116	1.00	0.99	1.00
117	1.00	1.00	1.00
118	1.00	1.00	1.00