(2014) B.I.A.A. no **99** BULLETIN D'INFORMATIQUE APPROFONDIE ET APPLICATIONS
ISSN 0291-5413 (Université d'Aix-Marseille)

Qu'est-ce qu'une machine ? (III/III)

Eric OLIVIER [1] [2]

Résumé. – La théorie des machines de Turing reformule et clarifie un certain nombre de questions portant sur les fondements (logiques) des mathématiques. Ainsi la question "*Qu'est-ce qu'une machine ?*" est-elle équivalente à la question "*Qu'est-ce qu'un calcul ?*". Richard Feynman résume cela en affirmant que *n'importe quelle procédure de calcul à laquelle on pourrait penser, est équivalente au calcul d'une machine de Turing – les fonctions récursives générales sont Turing-calculables et vice-versa – et on peut donc prendre "Turing-calculable" pour un synonyme effectif de "calculable"*. Notons enfin que le calcul *automatique* (i.e. le calcul effectué par une machine de Turing) distingue la notion de *proposition démontrable* de celles de *proposition vraie, décidable, indécidable* : cela éclaire les travaux révolutionnaires de Gödel sur la *complétude* et la *consistance* des théories mathématiques.

1. SYSTÈMES FORMELS

Soit $T \in \mathfrak{T}(\mathcal{A})$ une machine de Turing où $\mathcal{A} \supset \{\star, \mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ et $\star$ désigne le symbole de la case vide. L'ensemble $\mathcal{Q}$ des états internes de T sera toujours défini (par recodage si nécessaire) de sorte que $\mathcal{Q} \sqcup \{\,\mathtt{[}\,,\,\mathtt{)}\,\}$ soit disjoint du l'alphabet d'exécution $\mathcal{A}$. Dans [Oli14a] l'ensemble $\mathrm{St}(T)$ des *états courants* de T est défini comme l'ensemble des mots de la forme $w\,\mathtt{[Q)}\,m$, où w et m sont dans $\mathcal{A}^*$ et $\mathtt{Q} \in \mathcal{Q}$. Par abus de notation $T : \mathrm{St}(T) \to \mathrm{St}(T)$ est l'application telle que $T(w\,\mathtt{[Q)}\,m)$ soit l'état courant obtenu par application d'un cycle de T initialement dans l'état courant $w\,\mathtt{[Q)}\,m$; plus précisément :

$$
\begin{array}{rcll}
T(w\,\mathtt{[Q)}\,\mathtt{a}m') & = & w\mathtt{b}\,\mathtt{[P)}\,m' & \text{lorsque } T(\mathtt{Q},\mathtt{a}) = (\mathtt{P},\mathtt{b},\mathtt{R}) \\
T(w\,\mathtt{[Q)}\,\mathtt{a}m') & = & w\,\mathtt{[P)}\,\mathtt{b}m' & \text{lorsque } T(\mathtt{Q},\mathtt{a}) = (\mathtt{P},\mathtt{b},\mathtt{S}) \\
T(w'\mathtt{c}\,\mathtt{[Q)}\,\mathtt{a}m') & = & w'\,\mathtt{[P)}\,\mathtt{cb}m' & \text{lorsque } T(\mathtt{Q},\mathtt{a}) = (\mathtt{P},\mathtt{b},\mathtt{L}) \\
T(\,\mathtt{[Q)}\,\mathtt{a}m') & = & \mathtt{[P)}\,\star\,\mathtt{b}m' & \text{lorsque } T(\mathtt{Q},\mathtt{a}) = (\mathtt{P},\mathtt{b},\mathtt{L}) \\
T(w\,\mathtt{[Q)}\,) & = & w\mathtt{b}\,\mathtt{[P)} & \text{lorsque } T(\mathtt{Q},\star) = (\mathtt{P},\mathtt{b},\mathtt{R}) \\
T(w'\mathtt{c}\,\mathtt{[Q)}\,) & = & w'\,\mathtt{[P)}\,\mathtt{cb} & \text{lorsque } T(\mathtt{Q},\star) = (\mathtt{P},\mathtt{b},\mathtt{L})
\end{array}
\tag{1}
$$

avec $w = w'\mathtt{c}$ pour $\mathtt{c} \in \mathcal{A}$, lorsque $w \neq \phi$ et $m = \mathtt{a}m'$ lorsque $m \neq \phi$. L'ensemble des entrées de T est le sous-ensemble de $\mathrm{St}(T)$ formé des états courants de la forme $w\,\mathtt{[I)}\,m$. L'ensemble des sorties de T est noté $\mathrm{Out}(T)$ et $\mathrm{Stop}(T, w\,\mathtt{[Q)}\,m)$ ($\in \{0, 1, \ldots\} \cup \{+\infty\}$) est le temps d'arrêt de l'état courant $w\,\mathtt{[Q)}\,m$. L'application $T^* : \mathrm{St}(T) \to \mathrm{Out}(T) \cup \{\omega\}$ est aussi définie avec la convention $T^*(m\,\mathtt{[Q)}\,m) = \omega$ lorsque $\mathrm{Stop}(T, w\,\mathtt{[Q)}\,m) = +\infty$. Soient maintenant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{X}$ deux alphabets finis disjoints et n, N deux entiers arbitrairement donnés ; une *Post-production* P (d'ordre [3] 1) est une *règle d'inférence* du type

$$u_0 X_1 u_1 \ldots u_{n-1} X_n u_n \xrightarrow{R} v_0 X_{\varphi(1)} v_1 \ldots v_{N-1} X_{\varphi(N)} v_N$$

1. GDAC-I2M UMR 7373 CNRS Université d'Aix-Marseille
2. eric.olivier@univ-amu.fr
3. Il existe une notion de Post-production d'ordre $r \geq 1$.

où les u_i et les v_j (resp. les X_k) sont dans $\mathcal{A}^*$ (resp. $\mathcal{X}$) et où $\varphi : \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots, n\}$ est une application quelconque. Les X_k sont des *variables de production* représentant des mots de $\mathcal{A}^*$: pour $w, m \in \mathcal{A}^*$, on écrit $R : w \to m$ (ou que m *dérive* de w par R), lorsque

$$w = u_0 x_1 u_1 \ldots u_{n-1} x_n u_n, \quad \text{et} \quad m = v_0 x_{\varphi(1)} v_1 \ldots v_{N-1} x_{\varphi(N)} v_N.$$

(ici les x_k sont dans $\mathcal{A}^*$). Le couple $S = (\mathcal{O}, (P_1, \ldots, P_N))$ est un *système formel* sur $\mathcal{A}$ lorsque $\mathcal{O}$ (l'ensemble des S-*axiomes*) est une partie finie ou infinie et récursive [4] de $\mathcal{A}^*$ et que $P_1, \ldots, P_N$ sont N Post-productions sur $\mathcal{A}^*$. Le système S détermine un langage noté $\mathrm{Form}(S)$ dont les éléments sont appelés des S-*formules* ; $\mathrm{Form}(S)$ est défini comme le plus petit des langages $\mathcal{F}$ t.q.

$$\mathcal{O} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{A}^* \quad \text{et} \quad \forall w \in \mathcal{F}, \quad w \xrightarrow{P_i} w \implies w \in \mathcal{F}$$

ou encore que $\mathrm{Form}(S)$ est l'ensemble des mots de $m \in \mathcal{A}^*$ qui *dérivent d'un axiome* w, en ce sens qu'il existe une suite finie de mots $w_1, \ldots, w_n \in \mathcal{A}^*$ avec $w_n = m$ et une suite du Post-production $P_{i_1}, \ldots, P_{i_n}$ du système S t.q.

$$\mathcal{O} \ni w \xrightarrow{P_{i_1}} w_1 \ \cdots \ w_{n-1} \xrightarrow{P_{i_n}} w_n = m \tag{2}$$

Une séquence de Post-production telle que (2) signifie que m dérive de l'axiome w : dans la suite la notation $w \xrightarrow{*} m$ permet d'éviter de faire la liste des Post-productions mises en jeu. Pour un système formel S donné, le langage $\mathrm{Form}(S)$ est récursivement énumérable : la réciproque (moins facile) est aussi vraie.

Théorème 1.1. *[admis] Un langage $\mathcal{L}$ est récursivement énumérable si et seulement si il existe un système formel S tel que $\mathcal{L} = \mathrm{Form}(S)$.*

Une Post production (sur $\mathcal{A}$) est dite *normale* lorsqu'elle de la forme $uX \longrightarrow Xv$ où $u, v \in \mathcal{A}^*$ et X est une variable de production. Un système formel est dit normal si toutes les Post-productions sont normales : on montre (voir [Bia79]) que tout système formel S possède une forme normale S' de sorte que $\mathrm{Form}(S') = \mathrm{Form}(S)$.

Une *Thue-production* P sur un alphabet $\mathcal{A}$ est un cas particulier de Post-production dont l'ensemble des variables de production se réduit à $\mathcal{X} = \{X, Y\}$ et prenant la forme

$$XwY \xrightarrow{P} XmY$$

(avec w et m deux mots donnés dans $\mathcal{A}^*$). Pour simplifier la notation, on pourra aussi définir la Thue-production P sous forme de *substitutions* en écrivant

$$w \xrightarrow{P} m$$

Les systèmes formels munis de Thue-productions (on parlera de *systèmes formels de Thue*) pourraient sembler engendrer une classe plus restreinte de langages : il n'en est rien.

Théorème 1.2. *[admis] Un langage $\mathcal{L}$ est récursivement énumérable si et seulement si il existe un système formel de Thue S tel que $\mathcal{L} = \mathrm{Form}(S)$.*

---

4. Dans le cas où $\mathcal{O}$ est infini et récursif, on peut étendre l'ensembles des règles d'inférence pour se ramener au cas où $\mathcal{O}$ est fini ; il est cependant pratique de conserver dans la définition la possibilité que $\mathcal{O}$ soit infini et récursif.

1.1. **Le système MIU.** Dans le système MIU introduit par Post (et repris par Douglass Hofstadter dans [Hof79]), on prend $\mathcal{A} := \{\mathtt{M}, \mathtt{I}, \mathtt{U}\}$ et $S := (\mathcal{O}, (P_1, P_2, P_3, P_4))$, avec $\mathcal{O} = \{\mathtt{MI}\}$ et les Post-productions :

$$\begin{array}{rcll} x\mathtt{I} & \xrightarrow{P_1} & x\mathtt{IU} & \text{(inflation)} \\ \mathtt{M}x & \xrightarrow{P_2} & \mathtt{M}xx & \text{(inflation)} \\ x\mathtt{III}y & \xrightarrow{P_3} & x\mathtt{U}y & \text{(déflation)} \\ x\mathtt{UU}y & \xrightarrow{P_4} & xy & \text{(déflation)} \end{array}$$

(où x et y sont des variables de production). Nous allons voir que $\mathtt{MU} \notin \mathrm{Form}(S)$. En effet, considérons le nombre de $\mathtt{I}$ se trouvant dans un mot de $\mathrm{Form}(S)$. Les productions P_1 et P_4 le laissent inchangé. La production P_3 diminue le nombre de $\mathtt{I}$ de 3 et ne change pas sa divisibilité par 3. La production P_2 double le nombre de $\mathtt{I}$; comme $2n$ ne peut être divisé par 3 que si n est divisible par 3, la production P_2 ne donnes pas de multiple de 3. Donc aucune des productions ne donne de multiple de 3. L'ensemble des axiomes étant réduit au singleton $\mathcal{O} = \{\mathtt{MI}\}$ et $\mathtt{MI}$ ne contenant qu'un nombre de $\mathtt{I}$ non multiple de 3, aucun mot de $\mathrm{Form}(S)$ ne peut contenir un nombre de $\mathtt{I}$ qui soit un multiple de 3 (et en particulier lorsque ce nombre est zéro). Ainsi, on a démontré que le mot $\mathtt{MU}$ n'est pas dans $\mathrm{Form}(S)$; cependant cette démonstration (utilisant la partition des entiers modulo 3) ne peut être déduite d'un nombre fini de S-dérivations du système MIU (essentiellement du fait que $\mathrm{Form}(S)$ est infini).

Exercice 1.3. *Le langage des formules du système MIU est-il récursif ?*

1.2. **La conjecture de Syracuse.** Notons $\mathbb{N}_* := \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $s : \mathbb{N}_* \to \mathbb{N}_*$ la transformation telle que $s(n) = n/2$ si n est pair et $s(n) = 3n + 1$ si n est impair. La *conjecture de Syracuse* affirme que pour tout n non nul, il existe un rang N tel que $s^N(n) = 1$. En *inversant* s, il est possible de reformuler cette conjecture en terme de système de Post. Considérons l'alphabet $\mathcal{O} = \{\mathtt{I}\}$ et le système de Post $S = (\mathcal{O}, (P_1, P_2))$ où les Post-productions sont données comme suit :

$$\begin{array}{rcll} x & \xrightarrow{P_1} & xx & \text{(inflation)} \\ xx\mathtt{I}xx\mathtt{I}xx\mathtt{II} & \xrightarrow{P_2} & xx\mathtt{I} & \text{(déflation)} \end{array}$$

(où x est une variable de production). La conjecture de Syracuse équivaut à l'affirmation que $\mathrm{Form}(S) = \{\mathtt{I}^{(n)}\ ;\ n \geq 1\}$ (ici on pose $\mathtt{I}^{(0)} := \not{o}$ avec l'induction $\mathtt{I}^{(n+1)} := \mathtt{I}^{(n)}\mathtt{I}$ pour tout entier $n \geq 0$). La difficulté de cette conjecture montre à quel point il peut être difficile de cerner $\mathrm{Form}(S)$ pour un système formel S donné.

2. Grammaires formelles et hiérarchie de Chomsky

Dans les années 50, le linguiste Noam Chomsky dégage la notion de *grammaire formelle* et introduit une classification des langages maintenant appelée *hiérarchie de Chomsky* [Cho56] (voir aussi [GL67]). Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}$ deux alphabets finis disjoints et $\mathtt{S}$ une élément spécial de $\mathcal{N}$. Une *grammaire formelle* est un système formel

$$G = (\mathcal{O} = \{\mathtt{S}\}, (P_1, \cdots, P_N))$$

sur $(\mathcal{A} \sqcup \mathcal{N})^*$ où les Post-productions sont des Thue-productions d'un type particulier, appelées *règles de production* : ainsi P_i est de la forme (substitutive)

$$u_i \mathtt{X}_i v_i \xrightarrow{P_i} w_i.$$

où $u_i, v_i w_i$ sont des mots dans $(\mathcal{A} \cup \mathcal{N})^*$ et où $\mathtt{X}_i \in \mathcal{N}$. Les deux alphabets $\mathcal{A}$ et $\mathcal{N}$ ne jouent pas un rôle symétrique : ils sont appelés respectivement l'*alphabet terminal* et l'*alphabet auxiliaire* (ou *non-terminal*) de la grammaire. Le langage engendré par G (en tant que grammaire) est par définition

$$\mathrm{Lang}(G) = \mathrm{Form}(G) \cap \mathcal{A}^*.$$

Le symbole spécial $\mathtt{S}$ qui est le seul axiome du système formel G est appelé le *point d'entrée de la grammaire formelle associée à G*. Considérons, par exemple, la grammaire $G = (\{\mathtt{S}\}, (P_1, P_2))$, avec $\mathcal{A} = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, $\mathcal{N} = \{\mathtt{S}\}$ et les deux règles de production

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{S} & \xrightarrow{P_1} & \mathtt{aSb} \\ \mathtt{S} & \xrightarrow{P_2} & \not\phi \end{array}$$

(où $\not\phi$ représente le mot vide) ; alors $\mathrm{Lang}(G)$ est formé des mots de la forme $\mathtt{a}^{(n)}\mathtt{b}^{(n)}$ (avec $n \geq 0$). Soit maintenant $G = (\{\mathtt{S}\}, (P_1, P_2, P_3, P_4))$, avec $\mathcal{A} = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$, $\mathcal{N} = \{\mathtt{S}, \mathtt{B}\}$ et les règles de production suivantes :

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{S} & \xrightarrow{P_1} & \mathtt{aBSc} \\ \mathtt{S} & \xrightarrow{P_2} & \mathtt{abc} \\ \mathtt{Ba} & \xrightarrow{P_3} & \mathtt{aB} \\ \mathtt{Bb} & \xrightarrow{P_4} & \mathtt{bb} \end{array}$$

On peut montrer que cette grammaire définit le langage

$$\mathrm{Lang}(G) = \left\{ \mathtt{a}^{(n)}\mathtt{b}^{(n)}\mathtt{c}^{(n)} \ ; \ n \geq 1 \right\}.$$

Théorème 2.1. *[admis] Un langage $\mathcal{L}$ est récursivement énumérable si et seulement si il existe une grammaire formelle G telle que $\mathcal{L} = \mathrm{Lang}(G)$.*

La *hiérarchie de Chomsky* définit quatre types de langages récursivement énumérables classés suivant certaines caractéristiques des grammaires formelles qui les engendrent. Soit $G = (\{\mathtt{S}\}, (P_1, \cdots, P_N))$ une grammaire formelle d'alphabet terminal $\mathcal{A}$ et d'alphabet auxiliaire $\mathcal{N}$. Le langage $\mathrm{Lang}(G)$ est dit de *type 0* lorsqu'il est récursivement énumérable : d'après le Théorème 2.1 le type 0 recouvre tous les langages possiblement engendrés par grammaire formelle. $\mathrm{Lang}(G)$ est de *type 1*, ou encore *contextuel* (*context sensitive* en anglais), lorsque les règles de production de G sont de la forme

$$u\mathtt{A}v \to uwv$$

pour $\mathtt{A} \in \mathcal{N}$ et $u, v, w \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{N})^*$ avec $w \neq \not\phi$.

Proposition 2.2. *Les langages contextuels sont récursifs.*

Le langage $\mathrm{Lang}(G)$ est de *type 2*, ou *langages algébriques*, ou encore *hors-contexte* (*context free* en anglais), lorsque les règles de production de G sont de la forme

$$\mathtt{A} \to u$$

pour $\mathtt{A} \in \mathcal{N}$ et $u \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{N})^*$ (de tels langages peuvent être considérés comme des langages contextuels à contexte vide). Le langage $\mathrm{Lang}(G)$ est de *type 3*, ou *rationnels* (ou *régulier*) lorsqu'il est engendré, soit par une *grammaire linéaire à gauche*, et dans ce cas les règles de production de G sont de la forme (pour $\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathcal{N}$ et $\mathtt{a} \in \mathcal{A}$)

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{A} & \to & \mathtt{Ba} \\ \mathtt{A} & \to & \mathtt{a} \end{array}$$

($\mathtt{A}, \mathtt{B} \in \mathcal{N}$ et $\mathtt{a} \in \mathcal{A}$), soit par une *grammaire linéaire à droite*, et dans ce cas les règles de production de G sont de la forme

$$\begin{array}{lcl} \mathtt{A} & \to & \mathtt{aB} \\ \mathtt{A} & \to & \mathtt{a} \end{array}$$

Théorème 2.3 (Kleene)**.** *Les langages rationnels sont les langages reconnus par automates finis.*

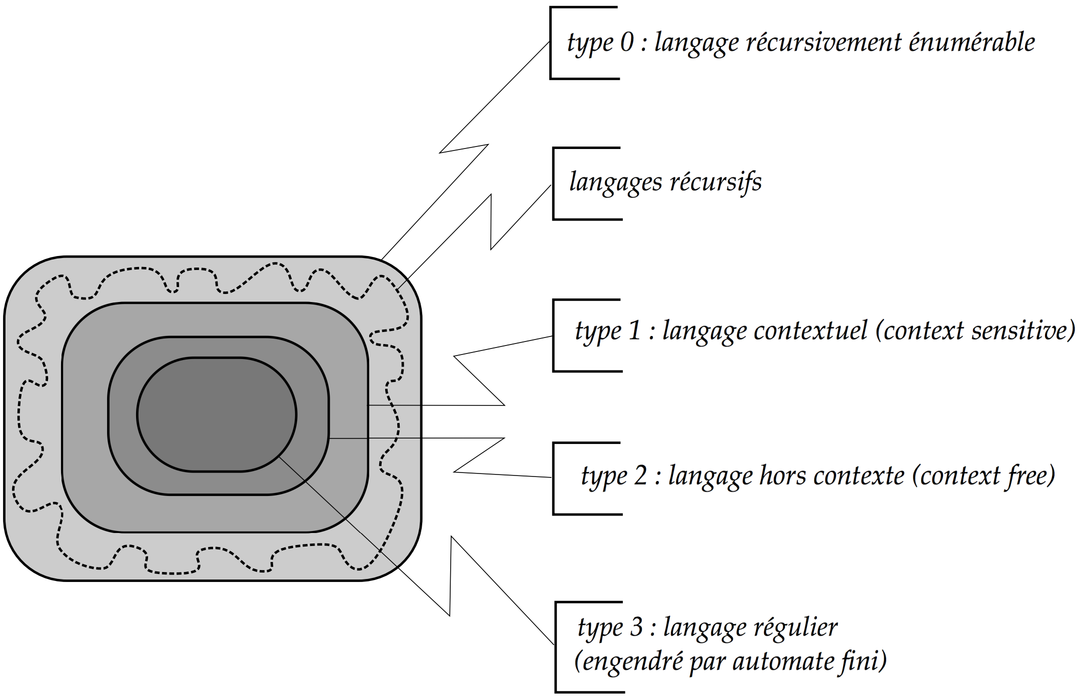

FIGURE 5. Hiérarchie des langages de Chomsky.

3. HEURISTIQUE DES THÉORIES FORMELLES BOOLÉENNES

Depuis Saussure [Sau79, Sau02] – et l'introduction des concepts de *signifiant* et de *signifié* – l'étude des langages amène à distinguer la *syntaxe* de la *sémantique*. La syntaxe est l'objet de la théorie des *grammaires formelles* et des diverses formes de *règles d'écriture*. L'aspect sémantique est une question plus difficile et plus profonde, qui touche aussi bien la *linguistique* que la *logique mathématique*. En logique, la *théorie des modèles* de Tarski [Tar44], introduit une forme de sémantique basée sur le concept de *vérité mathématique*. Il n'est pas envisageable ici de donner une approche systématique de ces questions, mais plutôt d'en fournir des éléments *heuristiques*. Pour simplifier, commençons par définir une classe de langages possédant une *symétrie* dont l'origine est la négation logique (contraposition) des propositions (et donc la dualité *vrai/faux*). Dans la suite, le langage $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}^*$ est appelé *booléen* lorsqu'il existe un symbole spécial dans $\mathcal{A}$ – notons le $\texttt{\$}$ – pour lequel $\texttt{\$}\mathcal{L} = \mathcal{L}$ ($\texttt{\$}\mathcal{L}$ est l'ensembles des mots $\texttt{\$}w$ obtenus comme la concatenation du symbole $\texttt{\$}$ avec un mot $w \in \mathcal{L}$) : nous dirons dans ce cas que $\mathcal{L}$ est *\$-booléen.*

Définition 3.1 (Heuristique). *Soit $\mathcal{A}$ ($\ni \texttt{\$}$) un alphabet ; alors le couple $\mathcal{T} = (\mathrm{Ass}(\mathcal{T}), \mathrm{Th}(\mathcal{T}))$ formées de deux sous-langages (non vides) de $\mathcal{A}^*$ est une* \$-théorie formelle *si les deux axiomes suivants sont satisfaits, soient : (i) :* $\mathrm{Ass}(\mathcal{T})$ *(les* $\mathcal{T}$-assertions*) est un langage* \$*-booléen récursif ; (ii) :* $\mathrm{Th}(\mathcal{T})$ *(les* $\mathcal{T}$-théorèmes*) est un langages récursivement énumérable t.q.*

$$\mathrm{Th}(\mathcal{T}) \subset \mathrm{Ass}(\mathcal{T}) \text{ et } \texttt{\$\$}\mathrm{Th}(\mathcal{T}) = \mathrm{Th}(\mathcal{T}).$$

De plus, (iii) : $\mathcal{T}$ est cohérente *(où* consistante *ou encore* non-contradictoire *), lorsque*

$$\mathrm{Th}(\mathcal{T}) \cap \texttt{\$}\mathrm{Th}(\mathcal{T}) = \emptyset$$

(iii) : $\mathcal{T}$ est complète *lorsque*

$$\mathrm{Th}(\mathcal{T}) \cup \texttt{\$}\mathrm{Th}(\mathcal{T}) = \mathrm{Ass}(\mathcal{T}).$$

Les assertions qui sont dans $\mathrm{Th}(\mathcal{T})$ (resp. $\texttt{\$}\mathrm{Th}(\mathcal{T})$) sont dites $\mathcal{T}$*-démontrables* (resp. $\mathcal{T}$*-réfutables*) ; les assertions dans $\mathrm{Ass}(\mathcal{T})\backslash\big(\mathrm{Th}(\mathcal{T}) \cup \texttt{\$}\mathrm{Th}(\mathcal{T})\big)$ sont dites $\mathcal{T}$*-indécidables* : ainsi l'existence d'assertions $\mathcal{T}$-indécidables équivaut à l'incomplétude de $\mathcal{T}$.

3.1. **Un premier exemple.** Nous allons construire une \$-théorie formelle $\mathcal{T}$ décrivant la divisibilité des entiers naturels par 2 et 3. Pour cela commençons par définir un système formel permettant de coder les assertions de la théorie, soit $S = (\mathcal{O}, (P_1, P_2))$, avec $\mathcal{O} = \{\texttt{2D}, \texttt{3D}\}$ et les Post-productions

$$\begin{array}{ccc} x\texttt{D}y & \xrightarrow{P_1} & x\texttt{DI}y \\ x\texttt{D}y & \xrightarrow{P_2} & \texttt{\$}x\texttt{D}y \end{array}$$

Il est évident que

$$\mathrm{Form}(S) = \left\{ \texttt{\$}^{(p)}\texttt{2DI}^{(q)}, \texttt{\$}^{(p)}\texttt{3DI}^{(q)} \ ; \ p, q \geq 0 \right\} =: \mathrm{Ass}(\mathcal{T})$$

est bien un langage \$-booléen. La deuxième étape consiste à définir le système formel Σ qui va donner les $\mathcal{T}$-théorèmes : ici, $\mathrm{Th}(\mathcal{T}) := \mathrm{Form}(\Sigma)$ avec

$$\Sigma = (\mathcal{O}, (P_+, P_-, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5))$$

et les Post-productions

$$\begin{aligned}
x\mathtt{D}y &\xrightarrow{P_+} \mathtt{\$\$}x\mathtt{D}y\\
\mathtt{\$\$}x\mathtt{D}y &\xrightarrow{P_-} x\mathtt{D}y\\
x\mathtt{2D}y &\xrightarrow{R_1} x\mathtt{2DII}y\\
x\mathtt{3D}y &\xrightarrow{R_2} x\mathtt{3DIII}y\\
\mathtt{2D}y &\xrightarrow{R_3} \mathtt{\$2DI}y\\
\mathtt{3D}y &\xrightarrow{R_4} \mathtt{\$3DI}y\\
\mathtt{3D}y &\xrightarrow{R_5} \mathtt{\$3DII}y
\end{aligned}$$

Proposition 3.2. $\mathcal{T} = (\mathrm{Ass}(\mathcal{T}), \mathrm{Th}(\mathcal{T}))$ *est cohérente et complète.*

3.2. **Addition des entiers positifs.** Le système formel S codant les assertions de $\mathcal{T}$ est $S = (\mathcal{O}, (P_1, \ldots, P_4))$, avec $\mathcal{O} = \{\mathtt{+=}\}$ et les Post-productions

$$\begin{aligned}
x\mathtt{=}y &\xrightarrow{P_1} x\mathtt{=I}y\\
x\mathtt{=}y &\xrightarrow{P_2} x\mathtt{I=}y\\
x\mathtt{+}y &\xrightarrow{P_3} x\mathtt{I+}y\\
x\mathtt{=}y &\xrightarrow{P_4} \mathtt{\$}x\mathtt{=}y
\end{aligned}$$

de sorte que

$$\mathrm{Form}(S) = \left\{\mathtt{\$}^{(p)}\mathtt{I}^{(a)}\mathtt{+I}^{(b)}\mathtt{=I}^{(c)}\ ;\ (p,a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4\right\} =: \mathrm{Ass}(\mathcal{T})$$

est un langage $\mathtt{\$}$-booléen. Les $\mathcal{T}$-théorèmes de $\mathcal{T}$ sont définis en posant $\mathrm{Th}(\mathcal{T}) := \mathrm{Form}(\Sigma)$ avec le système formel $\Sigma = (\mathcal{O}, (P_+, R_1, \ldots, R_6))$ dont les Post-productions sont :

$$\begin{aligned}
u &\xrightarrow{P_+} \mathtt{\$\$}u\\
u\mathtt{+}v\mathtt{=}w &\xrightarrow{R_1} u\mathtt{I+}v\mathtt{=}w\mathtt{I}\\
u\mathtt{II+}v\mathtt{=}w\mathtt{II} &\xrightarrow{R_2} u\mathtt{I+}v\mathtt{=}w\mathtt{I}\\
u\mathtt{+}v\mathtt{=}w\mathtt{II} &\xrightarrow{R_3} u\mathtt{I+}v\mathtt{=}w\mathtt{I}\\
u\mathtt{II+}v\mathtt{=}w &\xrightarrow{R_4} u\mathtt{I+}v\mathtt{I=}w\\
u\mathtt{+}v\mathtt{II=}w &\xrightarrow{R_5} u\mathtt{I+}v\mathtt{I=}w\\
u\mathtt{+}v\mathtt{=}w &\xrightarrow{R_6} \mathtt{\$I}u\mathtt{+}v\mathtt{=}w
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $a, b, c \geq 1$ et $n \geq 0$ on a $\mathtt{\$}^{(2n)}\mathtt{I}^{(a)}\mathtt{+I}^{(b)}\mathtt{=I}^{(c)} \in \mathrm{Form}(\Sigma)$ si et seulement si $a + b = c$ et $\mathtt{\$\$}^{(2n)}\mathtt{I}^{(a)}\mathtt{+I}^{(b)}\mathtt{=I}^{(c)} \in \mathrm{Form}(\Sigma)$ si et seulement si $a + b \neq c$. Par suite, $\mathrm{Form}(\Sigma) \cap \mathtt{\$}\mathrm{Form}(\Sigma) = \emptyset$ et $\mathrm{Form}(\Sigma) \cup \mathtt{\$}\mathrm{Form}(\Sigma) = \mathrm{Ass}(\mathcal{T})$.

Proposition 3.3. $\mathcal{T} = (\mathrm{Ass}(\mathcal{T}), \mathrm{Th}(\mathcal{T}))$ *est cohérente et complète.*

3.3. **PGCD.** Soit $a \wedge b$ le PGCD (Plus Grand Commun Diviseur) des deux entiers non nuls a et b. Nous allons définir une théorie formelle $\mathcal{T} = (\mathrm{Ass}(\mathcal{T}), \mathrm{Th}(\mathcal{T}))$ permettant de décider la validité des équations du type $a \wedge b = c$. Le système formel codant les assertions de $\mathcal{T}$ est $S = (\mathcal{O}, (P_1, P_2, P_3, P_4))$, avec $\mathcal{O} = \{\mathtt{I}\wedge\mathtt{I}=\mathtt{I}\}$ et les Post-productions

$$\begin{array}{rcl} x{=}y & \xrightarrow{P_1} & x{=}\mathtt{I}y \\ x{=}y & \xrightarrow{P_2} & x\mathtt{I}{=}y \\ x\wedge y & \xrightarrow{P_3} & x\mathtt{I}\wedge y \\ x & \xrightarrow{P_4} & \$x \end{array}$$

de sorte que

$$\mathrm{Form}(S) = \left\{ \$^{(p)}\mathtt{I}^{(a)}\wedge\mathtt{I}^{(b)}{=}\mathtt{I}^{(c)}\ ;\ p \geq 0,\ a, b, c \geq 1 \right\} =: \mathrm{Ass}(\mathcal{T})$$

est bien un langage $\$$-booléen. Le système formel Σ tel que $\mathrm{Form}(\Sigma) = \mathrm{Th}(\mathcal{T})$ est $\Sigma = (\mathcal{O}; (R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_+))$ avec les Post-productions suivantes

$$\begin{array}{rcl} u\wedge u{=}u & \xrightarrow{R_1} & \mathtt{I}u\wedge\mathtt{I}u{=}\mathtt{I}u \\ \mathtt{I}u\wedge v{=}w & \xrightarrow{R_2} & v\wedge\mathtt{I}u{=}w \\ u\wedge v{=}w & \xrightarrow{R_3} & u\wedge vu{=}w \\ u\wedge v{=}w & \xrightarrow{R_4} & \$u\wedge v{=}w\mathtt{I} \\ u\wedge v{=}w\mathtt{I}\mathtt{I} & \xrightarrow{R_5} & \$u\wedge v{=}w\mathtt{I} \\ u & \xrightarrow{P_+} & \$\$u \end{array}$$

Par exemple, l'équation $6 \wedge 8 = 2$ s'obtient par la dérivation suivante :

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{I}\wedge\mathtt{I}{=}\mathtt{I} & \xrightarrow{R_1} & \mathtt{II}\wedge\mathtt{II}{=}\mathtt{II} \\ & \xrightarrow{R_3} & \mathtt{II}\wedge\mathtt{IIII}{=}\mathtt{II} \\ & \xrightarrow{R_3} & \mathtt{II}\wedge\mathtt{IIIIII}{=}\mathtt{II} \\ & \xrightarrow{R_2} & \mathtt{IIIIII}\wedge\mathtt{II}{=}\mathtt{II} \xrightarrow{R_3} \mathtt{IIIIII}\wedge\mathtt{IIIIIIII}{=}\mathtt{II} \end{array}$$

Plus généralement (exercice), pour tout entiers $a, b, c \geq 1$ et $n \geq 0$,

$$\begin{array}{rcl} \$^{(2n)}\mathtt{I}^{(a)}\wedge\mathtt{I}^{(b)}{=}\mathtt{I}^{(c)} \in \mathrm{Form}(\Sigma) & \iff & a \wedge b = c \\ \text{et}\quad \$\$^{(2n)}\mathtt{I}^{(a)}\wedge\mathtt{I}^{(b)}{=}\mathtt{I}^{(c)} \in \mathrm{Form}(\Sigma) & \iff & a \wedge b \neq c \end{array}$$

Proposition 3.4. $\mathcal{T} = (\mathrm{Ass}(\mathcal{T}), \mathrm{Th}(\mathcal{T}))$ *est cohérente et complète.*

4. Problème de l'arrêt et incomplétude

Le langage $\mathrm{Ass}(\mathcal{T})$ des assertions d'une $\$$-théorie formelle $\mathcal{T}$ est toujours supposé récursif : si non, on ne pourrait pas savoir – dans tous les cas et en temps fini – si un mot donné est une $\mathcal{T}$-assertion, ce qui est absurde[5]. La même objection ne s'applique pas au langage $\mathrm{Th}(\mathcal{T})$ des théorèmes, qui peut donc être strictement récursivement énumérable. Supposons alors, par exemple, que $\mathcal{P}$ soit un langage strictement récursivement énumérable $\mathcal{P}$ tel que $\$\$\mathcal{P} = \mathcal{P}$ et $\$\mathcal{P} \cap \mathcal{P} = \emptyset$ (exercice : exhiber un tel lalngage). Alors pour tout langage récursif $\mathcal{Q}$ qui est $\$$-booléen et contenant $\mathcal{P}$, la $\$$-théorie formelle $\mathcal{T} = (\mathcal{Q}, \mathcal{P})$ est cohérente et nécessairement incomplète.

5. *"Le moins qu'on puisse demander à une statue, c'est qu'elle ne bouge pas !"*(Salvador Dalí)

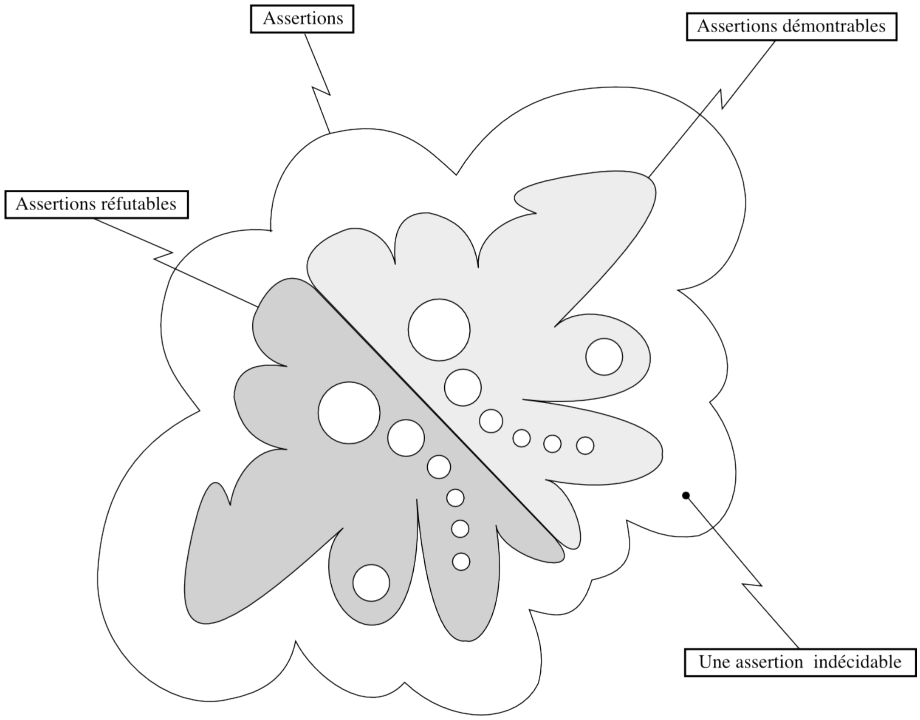

FIGURE 6. Une théorie mathématique cohérente mais incomplète.

Le deuxième problème posé par Hilbert à la *Conférence internationales des mathématiciens de Paris* en 1900 [Hil02] concerne la *consistance de l'arithmétique*. Une réponse négative à ce problème est donnée par le premier théorème d'incomplétude de Gödel [Göd31]. Dans une note de 1963 ajoutée à son article de 1931, Gödel écrit "*On peut démontrer rigoureusement que dans tout système formel consistant contenant une théorie des nombres finitaire relativement développée, il existe des propositions arithmétiques indécidables et que, de plus, la consistance d'un tel système ne saurait être démontrée à l'intérieur de ce système.*" (Voir [GNNG89] pour une présentation générale des travaux de Gödel sur l'incomplétude.)

L'idée d'une formalisation des théories mathématiques qui agite le début du 20-ème siècle est parallèle à une réflexion sur la mécanisation du calcul (voir la question de la thèse de Church dans [Oli14b]). En 1928 Hilbert et Ackermann [HA28] posent la question de la *décidabilité algorithmique du calcul des prédicats du premier ordre* aussi connue comme le *problème de la décision (Entscheidungsproblem)*. Pour une théorie formelle cohérente et complète, il existe (par définition) une machine Turing qui démontre ou réfute toute $\mathcal{T}$-assertion donnée [6]. La réponse négative au problème de la décision, proposée simultanément par Church et Turing [Chu36][Tur36] est basées sur le type d'incomplétude étudié par Gödel dans son article de 1931. Nous illustrons ce point avec l'idée de Turing, en présentant le *problème de l'arrêt* sous la forme d'une $\$$-théorie formelle cohérente et incomplète. Pour cela, soit U une machine de Turing universelle pouvant simuler toutes les machines de $\mathfrak{T}\{\star, \mathtt{0}, \mathtt{1}\}$ (voir [Oli14a]) ; rappelons que $\mathrm{Pr}(T, \mathtt{[I)}\, w)$ est le programme

6. Il demeure cependant que le temps d'attente nécessaire pour obtenir la réponse à une question donnée est, en général, impossible à estimer : on saura un jour, mais on ne sait pas quand !

de simulation du calcul de T sur l'entrée $\texttt{[I)}\,w$ et que

$$\mathcal{E}_U := \Big\{\mathrm{Pr}(T,\,\texttt{[I)}\,w)\ ;\ (T,w) \in \mathfrak{T}\{\star,\texttt{0},\texttt{1}\} \times \{\texttt{0},\texttt{1}\}^*\Big\}$$

est un langage récursif (par définition de U). Par suite, l'ensemble des $\mathcal{T}$-assertions, soit $\mathrm{Ass}(\mathcal{T}) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \texttt{\$}^{(n)}\mathcal{E}_U$, est un langage $-booléen qui est lui même récursif. Afin de définir les $\mathcal{T}$-théorèmes on commence par remarquer que l'ensemble

$$\mathcal{F}_U := \Big\{\mathrm{Pr}(T,\,\texttt{[I)}\,w) \in \mathcal{E}_U\ ;\ \mathrm{Stop}(T,\,\texttt{[I)}\,w) < \infty\Big\}$$

est strictement récursivement énumérable [Oli14a, Théorème 7.2]. Il est alors assez naturel de poser $\mathrm{Th}(\mathcal{T}) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \texttt{\$}^{(2n)}\mathcal{F}_U$, de sorte que (i) : $\texttt{\$\$}\mathrm{Th}(\mathcal{T}) = \mathrm{Th}(\mathcal{T})$; (ii) : $\mathrm{Th}(\mathcal{T}) \cap \texttt{\$}\mathrm{Th}(\mathcal{T}) = \emptyset$ et (iii) : $\mathrm{Th}(\mathcal{T}) \cup \texttt{\$}\mathrm{Th}(\mathcal{T}) \subset \mathrm{Ass}(\mathcal{T})$. Le langage $\mathcal{F}_U$ étant strictement récursivement énumérable, il en est de même de $\mathrm{Th}(\mathcal{T}) \cup \texttt{\$}\mathrm{Th}(\mathcal{T})$: l'inclusion $\mathrm{Th}(\mathcal{T}) \cup \texttt{\$}\mathrm{Th}(\mathcal{T}) \subset \mathrm{Ass}(\mathcal{T})$ est stricte car $\mathrm{Ass}(\mathcal{T})$ est une langage récursif.

Proposition 4.1. *La $-théorie formelle $\mathcal{T} = (\mathrm{Ass}(\mathcal{T}), \mathrm{Th}(\mathcal{T}))$, modélisant le problème de l'arrêt, est cohérente et incomplète.*

5. LE CALCUL DES PROPOSITIONS DE LUKASIEWICZ

Le *calcul des propositions* (ou encore *logique classique*) date de l'antiquité ; il est classiquement présentée sous sa forme sémantique, où la validité (vrai/faux) des propositions est déterminée à l'aide des tables de vérité. Nous présentons ici la théorie formelle[7] $\mathcal{P} = (\mathbf{Ass}(\mathcal{P})), \mathbf{Th}(\mathcal{P})$ du calcul des propositions proposée par Lukasiewicz[8] [Luk29].

Définition 5.1. *Le langage des $\mathcal{P}$-assertions (usuellement appelées Expressions Bien Formées ou EBF[9]) est $\mathbf{Ass}(\mathcal{P}) = \mathrm{Lang}(G)$, pour la grammaire formelle $G = (\mathcal{O} = \{S\}, (P_1, \dots, P_7))$ d'alphabet terminal (resp. auxiliaire) $\mathcal{A} = \{C, N, \texttt{[}, \texttt{i}, \texttt{]}\}$, (resp. $\mathcal{N} = \{S, A, B\}$) et dont les Thue-productions sont :*

$$\begin{array}{lcl} S & \xrightarrow{P_1} & \texttt{[}A\texttt{]} \\ A & \xrightarrow{P_2} & \texttt{i}A \\ A & \xrightarrow{P_3} & \not\phi \\ S & \xrightarrow{P_4} & B \\ B & \xrightarrow{P_5} & NB \\ B & \xrightarrow{P_6} & CBB \\ B & \xrightarrow{P_7} & S \end{array}$$

Un rôle spécial est joué par les mots $\texttt{[]}, \texttt{[i]}, \texttt{[ii]}, \dots$: ils représentent la suite des variables propositionnelles. En pratique, $\texttt{[]} =: \texttt{[0]}, \texttt{[i]} =: \texttt{[1]}, \texttt{[ii]} =: \texttt{[2]}, \dots$, le rôle crucial des variables propositionnelles $\texttt{[}p\texttt{]}$ $(p \geq 0)$ étant justifié par la propriété de substitution. Supposons que $W_0\,\texttt{[}p\texttt{]}\,W_1$ soit une EBF ; cela signifie que

$$\texttt{S} \longrightarrow W_0 \texttt{S} W_1 \xrightarrow{*} W_0\,\texttt{[}p\texttt{]}\,W_1$$

7. Ici la notion de théorie formelle est plus générale que celle des § 3 et § 4 : nous utilisons une fonte grasse pour $\mathbf{Ass}(\cdot)$ et $\mathbf{Th}(\cdot)$ afin de marquer la différence avec $\mathrm{Ass}(\cdot)$ et $\mathrm{Th}(\cdot)$.

8. C'est dans ce formalisme que Lukasiewicz introduit la *notation polonaise*.

9. En anglais on dit WFF (prononcer wouf !) pour Well Formed Formulae.

Si X est une autre EBF, alors $\texttt{S} \xrightarrow{*} X$ et W_0XW_1 est aussi une EBF, puisque par composition des productions

$$\texttt{S} \longrightarrow W_0\texttt{S}W_1 \xrightarrow{*} W_0XW_1$$

La forme d'une représentation syntaxique du calcul des propositions est déterminée par la *sémantique sous-jascente*. Dans la représentation de Lukasievicz, les variables propositionnelles `[]`, `[i]`, `[ii]`, ... sont susceptibles de prendre la valeur 0 (le faux) ou 1 (le vrai). Ainsi, $\texttt{N[}p\texttt{]}$ représente la négation de $\texttt{[}p\texttt{]}$ et $\texttt{C[}p\texttt{][}q\texttt{]}$ représente l'implication $\texttt{[}p\texttt{]}$ implique $\texttt{[}q\texttt{]}$. Nous nous contenterons ici d'une présentation heuristique du calcul des propositions de Lukasiewicz. Pour commencer rappelons les deux *tables de vérité* de la négation et de l'implication, soient :

$\texttt{[}p\texttt{]}$	$\texttt{N[}p\texttt{]}$
0	1
1	0

$\texttt{[}p\texttt{]}$	$\texttt{[}q\texttt{]}$	$\texttt{C[}p\texttt{][}q\texttt{]}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

On dira d'une EBF E qu'elle est n-aire si elle s'exprime en *fonction* de n variables, disons $\texttt{[}p_1\texttt{]}, \ldots, \texttt{[}p_n\texttt{]}$ (deux à deux distinctes) et de ces n variables seulement. Ainsi,

$$E = W_0\,\texttt{[}p_{\varphi(1)}\texttt{]}\,W_1\,\texttt{[}p_{\varphi(2)}\texttt{]}\,\cdots W_{m-1}\,\texttt{[}p_{\varphi(m)}\texttt{]}\,W_m$$

où les W_i sont des mots dans $\{\texttt{C},\texttt{N}\}^*$ et où $\varphi : \{1,\ldots,m\} \to \{1,\ldots,n\}$ est une application surjective. On écrit abusivement que $E = E(x_1,\cdots,x_n)$, ce qui revient à identifier E avec l'application $E : (x_1,\cdots,x_n) \mapsto E(x_1,\cdots,x_n)$, définie sur $\{0,1\}^n$ et à valeur dans $\{0,1\}$ et qu'on appelle la table de vérité de E. Les valeurs de la table de vérité d'une EBF s'obtiennent par un calcul récursif utilisant les tables de vérité de l'implication et de la négation. Par exemple $\texttt{C[}p\texttt{]CN[}p\texttt{][}q\texttt{]}$ est une EBF binaire et on peut calculer $E(0,1)$ comme suit [10] :

$$\begin{aligned} E(0,1) &= \texttt{C}0\texttt{CN}01 \\ &= \texttt{C}0\texttt{C}(\texttt{N}0)1 \\ &= \texttt{C}0\texttt{C}11 \\ &= \texttt{C}0(\texttt{C}11) \\ &= \texttt{C}01 \\ &= 1 \end{aligned}$$

de même pour l'EBF ternaire $E = \texttt{CC[}p\texttt{][}q\texttt{]CC[}q\texttt{][}r\texttt{]C[}p\texttt{][}r\texttt{]}$, on a :

$$\begin{aligned} E(0,0,1) &= \texttt{CC}00\texttt{CC}01\texttt{C}01 \\ &= \texttt{C}(\texttt{C}00)\texttt{C}(\texttt{C}01)(\texttt{C}01) \\ &= \texttt{C}1\texttt{C}11 \\ &= \texttt{C}1(\texttt{C}11) \\ &= \texttt{C}11 \\ &= 1 \end{aligned}$$

10. Les parenthèses ne sont introduites que pour faciliter la lecture du calcul : en principe, elles ne devraient pas figurer

Une EBF n-aire $E = E(x_1, \cdots, x_n)$ est appelée une *tautologie* (resp. *antilogie*) si

$$E(x_1, \ldots, x_n) = 1 \quad (\text{resp. } E(x_1, \ldots, x_n) = 0)$$

pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$. Si $E(x_1, \ldots, x_n) = 1$ pour au moins une valeur de $(x_1, \ldots, x_n)$, on dit que E est *satisfaisable* ; E est dite *contingente* si elle n'est ni une tautologie ni une antilogies. Dans la suite $\mathrm{Taut}(\mathcal{P})$ désigne l'ensemble des tautologies.

Définition 5.2. *(i) : L'ensemble des axiomes du système de Lukasiewicz est*

$$\mathcal{O} = \Big\{ \mathtt{CC}\,[p]\,[q]\,\mathtt{CC}\,[q]\,[r]\,\mathtt{C}\,[p]\,[r]\,,\ \mathtt{CCN}\,[p]\,[p]\,[p]\,, \mathtt{C}\,[p]\,\mathtt{CN}\,[p]\,[q]\ ;\ p,q,r \in \mathbb{N} \Big\}.$$

(on vérifie – exercice – que chacun des trois axiomes est une EBF).

(ii) : L'ensembles $\mathbf{Th}(\mathcal{P})$ *des* $\mathcal{P}$*-théorèmes est défini récursivement grâce à deux règles d'inférence : ainsi, un* $\mathcal{P}$*-théorème est une EBF qui est soit un axiome, soit déduite des axiomes par les règles suivantes :* $R1$ *est la règle de substitution : si dans un* $\mathcal{P}$*-théorème du système on substitue une EBF à une occurrence d'une variable, on obtient un nouveau* $\mathcal{P}$*-théorème : en d'autres termes, pour tout entier* $p \geq 0$,

$$R_1\ :\ si\ (x\,[p]\,y, z) \in \mathbf{Th}(\mathcal{P}) \times \mathrm{Lang}(G)\ alors\ xzy \in \mathbf{Th}(\mathcal{P})$$

$R2$ est la règle du modus ponens ou du détachement : si x et $\mathtt{C}xy$ sont des $\mathcal{P}$-théorèmes alors y est un théorème du système, soit encore,

$$R_2\ :\ si\ (\mathtt{C}xy, x) \in \mathbf{Th}(\mathcal{P}) \times \mathbf{Th}(\mathcal{P})\ alors\ y \in \mathbf{Th}(\mathcal{P}).$$

Proposition 5.3. *Les axiomes du système de Lukasiewicz sont des tautologies.*

Preuve. Le calcul des tables de vérité de chacun des trois axiomes dans $\mathcal{O}$ donne :

$[p]$	CCN $[p]$ $[p]$ $[p]$
0	1
1	1

$[p]$	$[q]$	C $[p]$ CN $[p]$ $[q]$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$[p]$	$[q]$	$[r]$	CC $[p]$ $[q]$ CC $[r]$ $[r]$ C $[p]$ $[r]$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

□

Remarque 5.4. *(1) : La règle R_2 est une Post-production d'ordre 2 (voir* [Bia79] *pour la définition généralisant l'ordre 1). Par contre, la règle R_1 n'est une Post-production d'ordre r pour aucun $r \geq 1$; en particulier, son domaine de définition n'est pas réduit à* $\mathbf{Th}(\mathcal{P}) \times \mathbf{Th}(\mathcal{P})$*) : en fait R_2 met implicitement en jeu une infinité de règles.*

(2) Les axiomes (tautologiques) de Lukasiewicz s'interprètent dans le système de Russel-Whitehead/Tarski qui est couramment utiliser de nos jours (voir [RW27]*) : si on note* (p) *la variable propositionnelle correspondant à* `[p]` *et* $\sim(p)$ *(Russel-Whitehead), ou encore* $\neg(p)$ *(Tarski) la négation* `N[p]` *de* `[p]`*.*

Lukasiewicz	*Russel/Tarski*
`CC[p][q]CC[q][r]C[p][r]`	$((p) \Rightarrow (q)) \Rightarrow (((q) \Rightarrow (r)) \Rightarrow ((p) \Rightarrow (r)))$
`CCN[p][p][p]`	$((\neg(p)) \Rightarrow (p)) \Rightarrow (p)$
`C[p]CN[p][q]`	$(p) \Rightarrow ((\neg(p)) \Rightarrow (q))$

(3) : Le premier axiome est la loi du syllogisme hypothétique, le second est la loi de Clavius (le raisonnement par l'absurde), le troisième axiome étant connu comme la loi de Dun Scott.

Proposition 5.5. *Les* $\mathcal{P}$*-théorèmes sont des tautologies (i.e.* $\mathbf{Th}(\mathcal{P}) \subset \mathrm{Taut}(\mathcal{P})$*).*

Preuve. Exercice.

□

Post et Lukasievicz ont simultanément démontrer le théorème suivant.

Théorème 5.6 (Post-Lukasiewicz)**.** *La théorie formelle* $\mathcal{P}$ *décrivant le calcul des propositions est cohérente et complète.*

6. APPENDICE : LANGAGE D'EXÉCUTION D'UNE MACHINE

Soit $T \in \mathfrak{T}(\mathcal{A})$ et $\mathcal{Q}$ l'ensemble des états internes de T ; pour une syntaxe consistante, on suppose que $\{\texttt{[}, \texttt{)}, \texttt{L}, \texttt{S}, \texttt{R}\}$ et $\mathcal{Q}$ sont disjoints de $\mathcal{A}$. Rappelons que l'ensemble des états courants $\mathrm{St}(T)$ de la machine T est constitué des mots de la forme $w\,\texttt{[Q)}\,m$ avec $\texttt{Q} \in \mathcal{Q}$ et $w, m \in \mathcal{A}^*$. Le langage d'exécution de T sur un langage $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}^*$ est le sous-langage (récursivement énumérable) de $\mathrm{St}(T)$ défini par :

$$\mathrm{Exec}(T, \mathcal{L}) := \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(\texttt{[I)}\,\mathcal{L}\backslash\{\not\phi\}).$$

Le langage d'exécution d'une machine de Turing sur un langage récursif coïncide avec le langage d'un système de Post. Pour voir cela considérons $T \in \mathfrak{T}(\mathcal{A})$ dont l'ensemble des états internes est $\mathcal{Q}$ (avec $\star \in \mathcal{A}$ et $\{\texttt{L}, \texttt{S}, \texttt{R}, \texttt{[}, \texttt{)}\} \cup \mathcal{Q}$ disjoint de $\mathcal{A}$) et $\mathcal{R} \subset \mathrm{St}(T)$ un langage récursif. On définit alors le système de Post $S_T = (\mathcal{R}, (P_1, \ldots, P_N))$ où les Post-productions P_i sont tirées de (1) : ainsi, avec les variables de production w et m on a :

$$(3)\qquad \begin{array}{rcll} w\,\texttt{[Q)}\,\texttt{a}m & \longrightarrow & w\texttt{b}\,\texttt{[P)}\,m & \text{lorsque } T(\texttt{Q}, \texttt{a}) = (\texttt{P}, \texttt{b}, \texttt{R}) \\ w\,\texttt{[Q)}\,\texttt{a}m & \longrightarrow & w\,\texttt{[P)}\,\texttt{b}m & \text{lorsque } T(\texttt{Q}, \texttt{a}) = (\texttt{P}, \texttt{b}, \texttt{S}) \\ w\texttt{c}\,\texttt{[Q)}\,\texttt{a}m & \longrightarrow & w\,\texttt{[P)}\,\texttt{cb}m & \text{lorsque } T(\texttt{Q}, \texttt{a}) = (\texttt{P}, \texttt{b}, \texttt{L}) \end{array}$$

(où $\texttt{a}, \texttt{b}, \texttt{c} \in \mathcal{A}$). Il est alors facile de vérifier que $\mathrm{Form}(S_T) = \mathrm{Exec}(T, \mathcal{R})$. Enfin, remarquons que les Post-productions (3) du système formel S_T sont en fait des Thue-productions ; en effet, il est possible d'écrire (3) sous la forme substitutive suivante

$$(4)\qquad \begin{array}{rcll} \texttt{[Q)}\,\texttt{a} & \longrightarrow & \texttt{b}\,\texttt{[P)} & \text{lorsque } T(\texttt{Q}, \texttt{a}) = (\texttt{P}, \texttt{b}, \texttt{R}) \\ \texttt{[Q)}\,\texttt{a} & \longrightarrow & \texttt{[P)}\,\texttt{b} & \text{lorsque } T(\texttt{Q}, \texttt{a}) = (\texttt{P}, \texttt{b}, \texttt{S}) \\ \texttt{c}\,\texttt{[Q)}\,\texttt{a} & \longrightarrow & \texttt{[P)}\,\texttt{cb} & \text{lorsque } T(\texttt{Q}, \texttt{a}) = (\texttt{P}, \texttt{b}, \texttt{L}) \end{array}$$

RÉFÉRENCES

[Bia79] E. Bianco. *Informatique fondamentale : de la machine de Turing aux ordinateurs modernes*. Basel, Boston, Stuttgart ISR 70, 1979.

[Cho56] N. Chomsky. Three models for the description of language. *IRE Transactions on Information Theory*, 2-(2) :113–123, 1956.

[Chu36] A. Church. A note on the Entscheidungsproblem (correction pp. 101-102). *Journal of Symbolic Logic*, 1 :40–41, 1936.

[GL67] M. Gross and A. Lentin. *Notions sur les grammaires formelles*. Gauthier-Villars, 1967.

[GNNG89] K. Gödel, E. Nagel, J. Newman, and J.-Y. Girard. *Le Théorème de Gödel*. Seuil, 1989.

[Göd31] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, i. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38 :173–198, 1931.

[HA28] D. Hilbert and W. Ackermann. *Grundz"uge der theoretischen Logik (Principles of Mathematical Logic)*. Springer-Verlag, 1928.

[Hil02] D. Hilbert. Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900 by Professor David Hilbert, (translated into english by Dr. Maby Winton Newson, with the author's permission). *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8 :437–479, 1902.

[Hof79] D. Hofstadter. *Gödel, Escher, Bach : les brins d'une guirlande éternelle*. Dunod, 1979.

[Luk29] J. Lukasiewicz. *Elements of Mathematical Logic*. MacMillan, New York, 1929.

[Oli14a] E. Olivier. Qu'est-ce-qu'une machine ? (I/III). *Bull. Info. Appr. et Appl.*, 97 :27–38, 2014.

[Oli14b] E. Olivier. Qu'est-ce-qu'une machine ? (II/III). *Bull. Info. Appr. et Appl.*, 98 :45–56, 2014.

[RW27] B. Russel and A. N. Whitehead. *Principia Mathematica*. Second Ed. University Press, Cambridge, 1927.

[Sau79] F. De Saussure. *Cours de linguistique générale (édition originale 1916)*. Payot, Paris, 1979.

[Sau02] F. De Saussure. *Écrits de linguistique générale*. Bibliothèque de Philosophie, Gallimard, Éd. S. Bouquet, R. Engler, A. Weil, 2002.

[Tar44] A. Tarski. The semantic conception of truth and the foundations of semantics. *Philosophy and Phenomenological Research*, 4 :341–376, 1944.

[Tur36] A. Turing. On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem (correction ibid. (1967) 43, p. 544-546). *Proc. Lond. Math. Soc.*, (2)-42 :230–265, 1936.

7. Postscriptum : Textes choisis

René Descartes (Discours de la Méthode)

Et enfin, comme ce n'est pas assez, avant de commencer à rebâtir le logis où on demeure, que de l'abattre, et de faire provision de matériaux et d'architectes, ou s'exercer soi-même à l'architecture, et outre cela d'en avoir soigneusement tracé de dessin, mais qu'il faut aussi s'être pourvu de quelque autre où on puisse être logé commodément pendant le temps qu'on y travaillera ; ainsi, afin que je ne demeurasse point irrésolu en mes actions, pendant que la raison m'obligerait de l'être en mes jugements, et que je ne laissasse pas de vivre dès lors le plus heureusement que je pourrais, je me formai une morale par provision, qui ne consistait qu'en trois ou quatre maximes dont je veux bien vous faire part.

René Descartes (Discours de la Méthode)

Et je m'étais ici particulièrement arrêté à faire voir que s'il y avait de telles machines qui eussent les organes et la figure extérieure d'un singe ou de quelque autre animal sans raison, nous n'aurions aucun moyen pour reconnaître qu'elles ne seraient pas en tout de même nature que ces animaux ; au lieu que s'il y en avait qui eussent la ressemblance de nos corps, et imitassent autant nos actions que moralement il serait possible, nous aurions toujours deux moyens très certains pour reconnaître qu'elles ne seraient point pour cela de vrais hommes : dont le premier est que jamais elles ne pourraient user de paroles ni d'autres signes en les composant, comme nous faisons pour déclarer aux autres nos pensées : car on peut bien concevoir qu'une machine soit tellement faite qu'elle profère des paroles, et même qu'elle en profère quelques-unes à propos des actions corporelles qui causeront quelque changement en ses organes, comme, si on la touche en quelque endroit, qu'elle demande ce qu'on lui veut dire ; si en un autre, qu'elle crie qu'on lui fait mal, et choses semblables ; mais non pas qu'elle les arrange diversement pour répondre au sens de tout ce qui se dira en sa présence, ainsi que les hommes les plus hébétés peuvent faire. Et le second est que, bien qu'elles fissent plusieurs choses aussi bien ou peut-être mieux qu'aucun de nous, elles manqueraient infailliblement en quelques autres, par lesquelles on découvrirait qu'elles n'agiraient pas par connaissance, mais seulement par la disposition de leurs organes : car, au lieu que la raison est un instrument universel qui peut servir en toutes sortes de rencontres, ces organes ont besoin de quelque particulière disposition pour chaque action particulière ; d'où vient qu'il est moralement impossible qu'il y en ait assez de divers en une machine pour la faire agir en toutes les occurrences de la vie de même façon que notre raison nous fait agir. Or, par ces deux mêmes moyens, on peut aussi connaître la différence qui est entre les hommes et les bêtes. Car c'est une chose bien remarquable qu'il n'y a point d'hommes si hébétés et si stupides, sans en excepter même les insensés, qu'ils ne soient capables d'arranger ensemble diverses paroles, et d'en composer un discours par lequel ils fassent entendre leurs pensées ; et qu'au contraire il n'y a point d'autre animal, tant parfait et tant heureusement né qu'il puisse être, qui fasse le semblable.

René Descartes (Discours de la Méthode)

J'avais décrit après cela l'âme raisonnable, et fait voir qu'elle ne peut aucunement être tirée de la puissance de la matière, ainsi que les autres choses dont j'avais parlé, mais qu'elle doit expressément être créée ; et comment il ne suffit pas qu'elle soit logée dans le corps humain, ainsi qu'un pilote en son navire, sinon peut-être pour mouvoir ses membres, mais qu'il est besoin qu'elle soit jointe et unie plus étroitement avec lui, pour avoir outre cela des sentiments et des appétits semblables aux nôtres, et ainsi composer un vrai homme.

René Descartes (Les Principes de la philosophie)

Il n'y a donc qu'une même matière en tout l'univers, et nous la connaissons par cela seul qu'elle est étendue ; pour ce que toutes les propriétés que nous apercevons distinctement en elle, se rapportent à ce qu'elle peut être divisée et mue selon ses parties, et qu'elle peut recevoir toutes les diverses dispositions que nous remarquons pouvoir arriver par le mouvement de ses parties.

René Descartes (Traité de l'Homme)

Tous les mouvements que nous faisons sans que notre volonté y contribue (comme il arrive souvent que nous respirons, que nous marchons, que nous mangeons, et enfin que nous faisons toutes les actions qui nous sont communes avec les bêtes) ne dépendent que de la conformation de nos membres et du cours que les esprits excités par la chaleur du cœur, suivent naturellement dans le cerveau, dans les nerfs et dans les muscles, en même façon que le mouvement d'une montre est produit par la seule force de son ressort et la figure de ses roues.

René Descartes (Traité de l'Homme)

Je désire que vous considériez, après cela, [. . .] que toutes les fonctions que j'ai attribuées à cette machine, comme la digestion des viandes, le battement du cœur et des artères, la nourriture et la croissance des membres, la respiration, la veille et le sommeil ; la réception de la lumière, des sons, des odeurs, des goûts, de la chaleur et de telles autres qualités, dans les organes des sens extérieurs ; l'impression de leurs idées dans l'organe du sens commun et de l'imagination, la rétention ou l'empreinte de ces idées dans la mémoire, les mouvements intérieurs des appétits et des passions [. . .] je désire, dis-je, que vous considériez que ces fonctions suivent toutes naturellement en cette machine, de la seule disposition de ses organes, ni plus ni moins que font les mouvements d'une horloge, ou autre automate, de celle de ses contrepoids et de ses roues ; en sorte qu'il ne faut point à leur occasion concevoir en elle aucune autre âme végétative, ni sensitive, ni aucun autre principe de mouvement et de vie, que son sang et ses esprits, agités par la chaleur du feu qui brûle continuellement dans son cœur, et qui n'est point d'autre nature que tous les feux qui sont dans les corps inanimés.

René Descartes (Méditation métaphysique)

La nature m'enseigne aussi par ces sentiments de douleur, de faim, de soif, etc, que je ne suis pas seulement logé dans mon corps, ainsi qu'un pilote en son navire, mais, outre cela, que je lui suis conjoint très étroitement et tellement confondu et mêlé, que je compose comme un seul tout avec lui. Car, si cela n'était, lorsque mon corps est blessé, je ne sentirais pas pour cela de la douleur, moi qui ne suis qu'une chose qui pense, mais j'apercevrais cette blessure par le seul entendement, comme un pilote aperçoit par la vue si quelque chose se rompt dans son vaisseau.

René Descartes (Traité des passions)

Il est besoin aussi de savoir que, bien que l'âme soit jointe à tout le corps, il y a néanmoins en lui quelque partie en laquelle elle exerce ses fonctions plus particulièrement qu'en toutes les autres. Et on croit communément que cette partie est le cerveau, ou peut-être le cœur : le cerveau, à cause que c'est à lui que se rapportent les organes des sens ; et le cœur, à cause que c'est comme en lui qu'on sent les passions. Mais, en examinant la chose avec soin, il me semble avoir évidemment reconnu que la partie du corps en laquelle l'âme exerce immédiatement ses fonctions n'est nullement le cœur, ni aussi tout le cerveau, mais seulement la plus intérieure de ses parties, qui est une certaine glande fort petite, située dans le milieu de sa substance, et tellement suspendue au-dessus du conduit par lequel les esprits de ses cavités antérieures ont communication avec ceux de la postérieure, que les moindres mouvements qui sont en elle peuvent beaucoup pour changer le cours de ces esprits, et réciproquement que les moindres changements qui arrivent au cours des esprits peuvent beaucoup pour changer les mouvements de cette glande.

Blaise Pascal (Les pensées)

Il y a beaucoup de différence entre l'esprit de Géométrie et l'esprit de finesse. En l'un les principes sont palpables, mais éloignez de l'usage commun, de sorte qu'on a peine à tourner la teste de ce côté là manque d'habitude ; mais pour peu qu'on s'y tourne on voit les principes à plein ; et il faudrait avoir tout à fait l'esprit faux pour mal raisonner sur des principes si gros qu'il est presque impossible qu'ils échappent.

Mais dans l'esprit de finesse les principes sont dans l'usage commun, et devant les yeux de tout le monde. On n'a que faire de tourner la teste ni de se faire violence. Il n'est question que d'avoir bonne vue : mais il faut l'avoir bonne ; car les principes en sont si déliés et en si grand nombre, qu'il est presque impossible qu'il n'en échappe. Or l'omission d'un principe mène à l'erreur : ainsi il faut avoir la vue bien nette, pour voir tous les principes ; et ensuite l'esprit juste, pour ne pas raisonner faussement sur des principes connus.

Tous les géomètres seraient donc fins, s'ils avaient la vue bonne ; car ils ne raisonnent pas faux sur les principes qu'ils connaissent : et les esprits fins seraient géomètres, s'ils pouvaient plier leur vue vers les principes inaccoutumés de Géométrie.

Ce qui fait donc que certains esprits fins ne sont pas géomètres, c'est qu'ils ne peuvent du tout se tourner vers les principes de Géométrie : mais ce qui fait que des géomètres ne sont pas fins, c'est qu'ils ne voient pas ce qui est devant eux, et qu'étant accoutumés aux principes nets et grossiers de Géométrie, et à ne raisonner qu'après avoir bien vu et manié leurs principes, ils se perdent dans les choses de finesse, où les principes ne se laissent pas ainsi manier. On les voit à peine : on les sent plutôt qu'on ne les voit : on a des peines infinies à les faire sentir à ceux qui ne les sentent pas d'eux-mêmes : ce sont choses tellement délicates et si nombreuses, qu'il faut un sens bien délicat et bien net pour les sentir, et sans pouvoir le plus souvent les démontrer par ordre comme en Géométrie, parce qu'on n'en possède pas ainsi les principes, et que ce serait une chose infinie de l'entreprendre. Il faut tout d'un coup voir la chose d'un seul regard, et non par progrès de raisonnement, au moins jusqu'à un certain degré. et ainsi il est rare que les géomètres soient fins, et que les fins soient géomètres ; à cause que les géomètres veulent traiter géométriquement les choses fines, et se rendent ridicules, voulant commencer par les définitions, et ensuite par les principes, ce qui n'est pas la manière d'agir en cette sorte de raisonnement. Ce n'est pas que l'esprit ne le fasse ; mais il le fait tacitement, naturellement, et sans art ; car l'expression en passe tous les hommes, et le sentiment n'en appartient qu'à peu.

Et les esprits fins au contraire ayant ainsi accoutumé de juger d'une seule vue, sont si étonnez quand on leur présente des propositions où ils ne comprennent rien, et où pour entrer il faut passer par des définitions et des principes stériles et qu'ils n'ont point accoutumé de voir ainsi en détail, qu'ils s'en rebutent et s'en dégoûtent. Mais les esprit faux ne sont jamais ni fins ni géomètres.

Les géomètres qui ne sont que géomètres ont donc l'esprit droit, mais pourvu qu'on leur explique bien toutes choses par définitions et par principes ; autrement ils sont faux et insupportables ; car ils ne sont droits que sur les principes bien éclaircis. Et les fins qui ne sont que fins ne peuvent avoir la patience de descendre jusqu'aux premiers principes des choses spéculatives et d'imagination qu'ils n'ont jamais vues dans le monde et dans l'usage.

Blaise Pascal
(La Machine d'Arithmétique – 1642-1645)

Au reste, si quelquefois tu as exercé ton esprit à l'invention des machines, je n'aurai pas grand-peine à te persuader que la forme de l'instrument, en l'état où il est à présent, n'est pas le premier effet de l'imagination que j'ai eue sur ce sujet : j' avais commencé l'exécution de mon projet par une machine très différente de celle-ci et en sa matière et en sa forme, laquelle (bien qu'en état de satisfaire à plusieurs) ne me donna pas pourtant la satisfaction entière ; ce qui fit qu'en la corrigeant peu à peu j'en fis insensiblement une seconde, en laquelle rencontrant encore des inconvénients que je ne pus souffrir, pour y apporter le remède, j'en composai une troisième qui va par ressorts et qui est très simple en sa construction. C'est celle de laquelle, comme j'ai déjà dit, je me suis servi plusieurs fois, au vu et su d'une infinité de personnes, et qui est encore en état de servir autant que jamais. Toutefois, en la perfectionnant toujours, je trouvai des raisons de la changer, et enfin reconnaissant dans toutes, ou de la difficulté d'agir, ou de la rudesse aux mouvements, ou de la disposition à se corrompre trop facilement par le temps ou par le transport, j'ai pris la patience de faire jusqu'à plus de cinquante modèles, tous différents, les uns de bois, les autres d'ivoire et d'ébène, et les autres de cuivre, avant que d'être venu à l'accomplissement de la machine que maintenant je fais paraître ; laquelle, bien que composée de tant de petites pièces différentes, comme tu pourras voir, est toutefois tellement solide, qu'après l'expérience dont j'ai parlé ci-devant, j'ose te donner assurance que tous les efforts qu'elle pourrait recevoir en la transportant si loin que tu voudras, ne sauraient la corrompre ni lui faire souffrir la moindre altération.

Gottfried Wilhelm Leibniz
Nouveaux Essais sur l'entendement humain
Livre deuxième – Chap XIV

§ 4. *Philalèthe*. Dans les nombres les idées sont et plus précises et plus propres à être distinguées les unes des autres que dans l'étendue, où on ne peut point observer ou mesurer chaque égalité et chaque excès de grandeur aussi aisément que dans les nombres, par la raison que dans l'espace nous ne saurions arriver par la pensée à une certaine petitesse déterminée au-delà de laquelle nous ne puissions aller, telle qu'est l'unité dans le nombre.

Théophile. Cela se doit entendre du nombre entier. Car autrement le nombre dans sa latitude, comprenant le rompu, le sourd, le transcendant et tout ce qui se peut prendre entre deux nombres entiers, est proportionnel à la ligne, et il y a là aussi peu de minimum que dans le continu. Aussi cette définition, que le nombre est une multitude d'unités, n'a lieu que dans les entiers. La distinction précise des idées dans l'étendue ne consiste pas dans la grandeur : car pour reconnaître distinctement la grandeur, il faut recourir aux nombres entiers, ou aux autres connus par le moyen des entiers, ainsi de la quantité continue il faut recourir à la quantité discrète pour avoir une connaissance distincte de la grandeur. Ainsi les modifications de l'étendue, lorsqu'on ne se sert point des nombres, ne peuvent être distinguées par la figure, prenant ce mot si généralement qu'il signifie tout ce qui fait que deux étendus ne sont pas semblables l'un à l'autre.

§ 5. *Philalèthe*. En répétant l'idée de l'unité et la joignant à une autre unité, nous en faisons une idée collective que nous nommons deux. Et quiconque peut faire cela et avancer toujours d'un de plus à la dernière idée collective, à laquelle il donne un nom particulier, peut compter, tandis qu'il a une suite de noms et assez de mémoire pour la retenir.

Théophile. Par cette manière seule on ne saurait aller loin. Car la mémoire serait trop chargée s'il fallait retenir un nom tout à fait nouveau pour chaque addition d'une nouvelle unité. C'est pourquoi il faut un certain ordre et une certaine réplication dans ces noms, en recommençant suivant une certaine progression. [...]

Gottfried Wilhelm Leibniz
Nouveaux Essais sur l'entendement humain
Livre troisième – Chap. II

§ 1*Philalèthe.* Maintenant, les mots étant employés par les hommes pour être signes de leurs idées, on peut demander d'abord comment ces mots y ont été déterminés ; et l'on convient que c'est non par aucune connexion naturelle qu'il y ait entre certains sons articulés et certaines idées (car en ce cas il n'y aurait qu'une langue parmi les hommes), mais par une institution arbitraire en vertu de laquelle un tel mot a été volontairement le signe d'une telle idée.

Théophile. Je sais qu'on a coutume de dire dans les écoles et partout ailleurs que les significations des mots sont arbitraires (ex instituto) et il est vrai qu'elles ne sont point déterminées par une nécessité naturelle, mais elles ne laissent pas de l'être par des raisons tantôt naturelles, où le hasard a quelque part, tantôt morales, où il y entre du choix [...]

Karl Marx (Le capital)

Un homme qui ne dispose d'aucun loisir, dont la vie tout entière, en dehors des simples interruptions purement physiques pour le sommeil, les repas, etc., est accaparée par son travail pour le capitaliste, est moins qu'une bête de somme. C'est une simple machine à produire la richesse pour autrui, écrasée physiquement et abrutie intellectuellement. Et pourtant, toute l'histoire moderne montre que le capital, si on n'y met pas obstacle, travaille sans égard ni pitié à abaisser toute la classe ouvrière à ce niveau d'extrême dégradation.

Kurt Gödel
(note de 1963 ajouté à son article de 1931)

On peut démontrer rigoureusement que dans tout système formel consistant contenant une théorie des nombres finitaire relativement développée, il existe des propositions arithmétiques indécidables et que, de plus, la consistance d'un tel système ne saurait être démontrée à l'intérieur de ce système.

Kurt Gödel
(note de 1963 ajouté à son article de 1931)

Grâce à certains travaux qui ont suivi cet article [article de 1931], notamment ceux de A.M. Turing, nous disposons désormais d'une définition sûre, précise et adéquate du concept de système formel [...] dont la propriété est qu'en son sein et en principe, le raisonnement peut-être entièrement remplacé par des règles mécaniques.

Alan Turing

L'identification des fonctions 'effectivement calculables' avec les fonctions calculables est peut-être plus convaincante que l'identification avec les fonctions λ-définissables ou récursives générales. Pour ceux qui adoptent ce point de vue, la démonstration formelle de l'équivalence fournit une justification du calcul de Church et permet de remplacer les 'machines' qui engendrent des fonctions calculables par les λ-définitions qui sont plus commodes.

Alan Turing

Hydra ressemble à une anémone de mer mais vit en eau douce et possède cinq à dix tentacules. Si l'on coupe une partie de *Hydra*, cette partie se réorganise pour former un nouvel organisme complet. Lors de ce processus, l'organisme prend la forme d'un tube, ouvert et légèrement évasé du côté de la tête, et fermé de l'autre côté. Le tout possède encore une symétrie circulaire. Ultérieurement, la symétrie disparaît au point qu'une tache spécifique se révèle, celle-ci étant à l'origine d'un certain nombre de plaques du côté de la tête. Ces plaques se manifestent aux endroits où apparaîtront les tentacules.

Gershom Scholem
(Lecture at Weizmann Institute on June 17, 1965)

Once upon a time, there was a great Rabbi in Prague. His name was Rabbi Jehuda Loew ben Bezalel and he is known in Jewish tradition as the Maharal of Prague. A famous scholar and mystic, he is credited by Jewish popular tradition with the creation of a Golem – a creature produced by the magical power of man and taking on human shape. Rabbi Loew's robot was made of clay and given a sort of life by being infused with the concentrated power of the Rabbi's mind. This great human power is, however, nothing but a reflection of God's own creative power, and therefore, after having gone through all the necessary procedures in building his Golem, the Rabbi finally put a slit of paper into its mouth with the mystic and ineffable Name of God written on it. So long as this seal remains in his mouth, the Golem was alive – if you can call such a state alive. For the Golem could work and do the biding of his master and perform all kinds of chores for him, helping him and the Jews of Prague in many ways. But the poor creature could not speak. He could respond to orders and could sort them out, but no more than that. [...]

Now, THIS IDEA of the Golem is deeply ingrained in the thinking of the Jewish mystics of the Middle Ages known as the Kabbalists. I want to give you an inkling of what lies behind the idea. It may be far remove from what the modern electronic engineer and applied mathematician have in mind when they concoct their own species of Golem – and yet, all theological trappings notwithstanding, there is straight line linking to the two developments. As a matter of fact, the Golem – a creature created by human intelligence and concentration, which is controlled by its creator and performs tasks set for him, but which at the same time may have a dangerous tendency to outgrow that control and develop destructive potentialities – is nothing but a replica of Adam, the first Man himself. God could create Man from a heap of clay and invest him with a spark of His divine life force and intelligence (this, in the last analysis, is the "divine image" in which man was created). Without this intelligence and the spontaneous creativity of the human mind, Adam would have been nothing but a Golem – as, indeed, he is called in some of the old rabbinic stories interpreting the Biblical account. [...]

The universe, so the Kabbalists tell us, is built essentially on the prime elements of numbers and letters, because letters of God's language reflected in human language are nothing but concentrations of His creative energy. Thus, by assembling these elements in all their possible combinations and permutations, the Kabbalist who contemplates the mysteries of Creation radiates some of this elementary power into the Golem. The creation of a Golem is then in some way an affirmation of the productive and creative power of Man. It repeats, on however small a scale, the work of creation.

Isaac Asimov : "The Three Laws of Robotics"

1. A robot may not injure a human being or, through inaction, allow a human being to come to harm.
2. A robot must obey any orders given to it by human beings, except where such orders would conflict with the First Law.
3. A robot must protect its own existence as long as such protection does not conflict with the First or Second Law.